Rachunek Prawdopodobieństwa - Lista zero

Wydział Matematyki, kier. matematyka, studia licencjackie, II rok.

Fakt 1. Każda niemalejąca funkcja $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jest różniczkowalna prawie wszędzie względem miary Lebesgue'a.

Zad.1 Niech $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ będzie niemalejąca i prawostronnie ciągła. Korzystając z faktu udowodnij, że dla dowolnych $a \leq b$ zachodzi

$$\int_a^b F'(s)ds \leq F(b) - F(a).$$

Zad.2 Jeżeli F jest dystrybuantą, to dla każdego $t \in \mathbf{R}$ zachodzi

$$\int_{-\infty}^t F'(s)ds \leq F(t), \quad \text{oraz} \quad \int_t^{\infty} F'(s)ds \leq 1 - F(t).$$

Zad.3 Jeżeli F jest dystrybuantą oraz

$$\int_{\mathbf{R}} F'(s)ds = 1,$$

to F' jest gestością rozkładu o dystrybuancie F.

Zad.4 Niech $c \in [0, 1/2]$ oraz

$$F_\mu(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^t, & t < 0 \\ 1 - ce^{-t}, & t \geq 0. \end{cases}$$

(a) Korzystając z poprzedniego zadania wyznacz c, dla którego μ jest absolutnie ciągły.
(b) Wyznacz rozkład μ dla dowolnego $c \in [0, 1/2]$.

Zad.5 Pokazać, że jeśli X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach μ_X i μ_Y, to rozkład zmiennej $X + Y$ ma postać

$$\mu_{X+Y}(B) = \int_{\mathbf{R}} \mu_X(B - y)\mu_Y(dy) = \int_{\mathbf{R}} \mu_Y(B - x)\mu_X(dx).$$

Uwaga: Dla dwóch miar borelowskich μ i ν miarę

$$\mu * \nu(B) = \int_{\mathbf{R}} \mu(B - x)\nu(dx)$$

nazywamy splotem miar μ i ν.

Zad.6 Pokazać, że jeśli X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach μ i ν odpowiednio oraz dystrybuantach F_X i F_Y, to dystrybuanta sumy $X + Y$ zadana jest przez

$$F_{X+Y}(t) = \int_{\mathbf{R}} F_\mu(t - y)d\nu(y) = \int_{\mathbf{R}} F_\nu(t - x)d\mu(x).$$

Zad.7 Udowodnij, że jeżeli jeden z rozkładów μ, ν jest absolutnie ciągły, to rozkład $\mu * \nu$ jest absolutnie ciągły i wyznacz jego gęstość.

Zad.8 Podaj przykład zmiennych losowych X i Y o rozkładach absolutnie ciągłych, dla których $X + Y$ nie jest absolutnie ciągły.

Zad.9 Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, zaś $Y \sim B(1, p)$. Wyznacz gęstość rozkładu $X + Y$.