Rachunek Prawdopodobieństwa - Lista 3

Wydział Matematyki, kier. matematyka, studia licencjackie, II rok.

Zad.1 Mamy monetę, na której orzeł, wypada z prawdopodobieństwem p. Niech X oznacza liczbę rzutów do chwili uzyskania n orłów z rzędu. Oblicz $\mathbf{E}(X)$.

Wskazówka: Rozbić Ω na zbiory $A_k = \{$reszka wypadła pierwszy raz w k-tym rzucie$\}$ oraz zbiór $A_n = \{$reszka wypadła pierwszy raz po n-tym rzucie$\}$

Zad.2 Niech $\Omega = [0, 1)$ i $X : [0, 1) \to \mathbf{R}$ będzie zmienną losową. Opisz $\sigma(X)$, gdy
(a) $X(x) \equiv 12$;
(b) $X(x) = 1$ dla $x \in [0, \frac{9}{10}]$ oraz $X(x) = -4$ dla $x \in (\frac{9}{10}, 1)$,
(c) $X(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \leq x \leq 0,4 \\ 2 & \text{dla } 0,4 < x \leq 0,6 \\ 1 & \text{dla } 0,6 < x < 1 \end{cases}$
(d) $X(x) = \begin{cases} 3 & \text{dla } 0 \leq x \leq 0,4 \\ 2 & \text{dla } 0,4 < x \leq 0,6 \\ 1 & \text{dla } 0,6 < x < 1 \end{cases}$

Zad.3 Łączny rozkład zmiennych X i Y dany jest tabelką:

	$X = 1$	$X = 3$
$Y = 0$	0,2	0,3
$Y = 2$	0,1	0,4

Oblicz $\mathbf{E}(X|Y = k)$ dla $k = 0,\ 2$ oraz $\mathbf{E}(Y|\sigma(X))$.

Zad.4 Łatwo sprawdzić, że zmienne X i Y z poprzedniego zadania są zależne.
(a) Podaj taki zbiór prawdopodobieństw p_{ij} (czyli tak wypełnij tabelkę), aby X i Y były niezależne, ale rozkłady brzegowe pozostały takie same.
(b) Dla znalezionego rozkładu oblicz $\mathbf{E}(X|Y = k)$ i $\mathbf{E}(Y|X = n)$.

Zad.5 Niech $\Omega = [0, 1]$, zaś niech $\mathbf{P}$ będzie miarą Lebesgue'a na $[0, 1]$. Oblicz $\mathbf{E}(X|\mathcal{F})$, gdy
(a) $X = \sqrt{x}$, $\mathcal{F}$ jest σ-ciałem generowanym przez zbiory $[0, \frac{1}{4})$ i $[\frac{1}{4}, 1]$.
(b) $X = -x$, $\mathcal{F}$ jest σ-ciałem generowanym przez zbiory $[0, \frac{1}{2})$ i $[\frac{1}{3}, 1]$.

Zad.6 Niech X będzie liczbą orłów w trzykrotnym rzucie niesymetryczną monetą (prawdopodobieństwo wypadnięcia orła jest równe p) oraz A będzie zdarzeniem, że w pierwszym rzucie wypadł orzeł. Oblicz $\mathbf{E}(X|\mathcal{G})$, gdzie $\mathcal{G}$ jest σ-ciałem generowanym przez $\{A\}$.

Zad.7 Rozpatrzmy schemat n prób Bernoulliego z parametrem sukcesu p w każdej próbie. Jaka jest średnia liczba sukcesów w pierwszej próbie, jeżeli wiemy, ile sukcesów zaszło w całej serii?

Zad.8 Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o średnich zero. Połóżmy $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Wykaż, że dla każdego $n = 1,\ 2,\ 3, \ldots$ zachodzi równość

$$\mathbf{E}(S_{n+1}|\sigma(X_1, \ldots, X_n)) = S_n.$$

Zad.9 Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi, a f funkcją borelowską. Wykaż, że

$$\mathbf{E}(f(X, Y)|Y = t) = \mathbf{E}(f(X, t)).$$

Zad.10 Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie.
(a) Oblicz $\mathbf{E}(X|X + Y)$.
(b) Oblicz $\mathbf{E}(X|X^2 + Y^2)$, gdy obie zmienne mają rozkład $N(0, 1)$.

Zad.11 Niech X_1, X_2, i X_3 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o skończonych drugich momentach. Niech $\mathbf{E}X_i = m_i$ oraz $\mathbf{E}X_1^2 = s_i$. Oblicz
(a) $\mathbf{E}(X_1^2 + 2X_2^2|X_1)$,
(b) $\mathbf{E}((X_1 + X_2)^2|X_1)$,
(c) $\mathbf{E}((X_1 + X_2 + X_3)^2|X_1 + X_2)$

Zad.12 Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie, jednostajnym na $[0,1]$. Wyznacz

$$\mathbf{E}(\min(X,Y)|\max(X,Y)).$$

Czy dla innych rozkładów wynik jest taki sam?

Zad.13 Z wykładu wiemy, że jeśli Y jest zmienną $\mathcal{F}$-mierzalną oraz $\mathbf{E}|X| < \infty$, $\mathbf{E}|XY| < \infty$ to

$$\mathbf{E}(XY|\mathcal{F}) = Y\mathbf{E}(X|\mathcal{F}).$$

Czy warunek $\mathbf{E}|XY| < \infty$ można osłabić? Czy można go w ogóle pominąć?

Zad.14 Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym z parametrem $\lambda > 0$. Oblicz

(a) $\mathbf{E}(X|X+Y=t)$

(b) $\mathbf{P}(X < t|\min(X,Y) \leq t)$

(c) $\mathbf{P}(X > t|\max(X,Y) \leq 2t)$

Zad.15 Niech X_1 i X_2 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrami λ_1 i λ_2. Oblicz $\mathbf{E}(\min(X,Y)|X)$.

Zad.16 Wektor losowy (X,Y) ma rozkład o gęstosci $g(x,y) = 8xy1_{\{x>0,y>0,x^2+y^2<1\}}(x,y)$. Oblicz $\mathbf{E}(Y|X=\frac{1}{2})$.

Zad.17 Zmianna losowa (X,Y) ma gęstość $g(x,y) = \dfrac{x^3}{2}e^{-x(y+1)}\mathbf{1}_{\{x>0,y>0\}}$. Oblicz

(a) $\mathbf{E}(Y|X)$

(b) $\mathbf{E}(Y^2|X)$

(c) $\mathbf{E}(Y^2|X^2)$

(d) $\mathbf{P}(Y>1|X^3+1)$

Zad.18 Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają rozkład wykładniczy z parametrem 1. Oblicz

(a) $\mathbf{P}(X \in B|X+Y)$ (dla $B \in \mathrm{Borel}(\mathbf{R})$)

(b) $\mathbf{E}(\sin X|X+Y)$.

Zad.19 Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem 1, zaś Y jest zmienną losową taką, że jeśli $X=x$, to Y ma rozkład wykładniczy z parametrem x.

(a) Wyznaczyć rozkład Y.

(b) Obliczyć $\mathbf{P}(X>t|Y)$.

Zad.20 Zmienna losowa (X,Y) ma rozkład zadany gęstością

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{y} & \text{gdy } 0<x<y<1, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Oblicz $\mathbf{E}(X|Y)$, $\mathbf{E}(Y|X)$ oraz $\mathbf{E}(X|Y-X)$.