Rachunek Prawdopodobieństwa - Lista 5

Wydział Matematyki, kier. matematyka, studia licencjackie, II rok.

Zad.1 Obliczyć liczbę dróg z $(0,3)$ do $(11,6)$
(a) nie przecinających osi OX.
(b) nie dotykających osi OX.
(c) takich, że $S_{11} > S_k$ dla $k = 0, 1, \ldots, 10$.

Zad.2 Mówimy, że droga $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ osiąga swoje maksimum po raz pierwszy w punkcie k, $k \leq n$ jeżeli

$$s_k > 0,\ s_k > s_1, \ldots, s_k > s_{k-1}, \quad s_k \geq s_{k+1}, \ldots, s_k \geq s_n.$$

Pokaż, że
(a) Prawdopodobieństwo tego, że w czasie $2n$ droga osiągnie swoje maksimum po raz pierwszy w punkcie 0 jest równe u_{2n} (tak samo dla czasu $2n-1$).
(b) Stosując zasadę dwoistości wywnioskuj, że prawdopodobieństwo osiągnięcia maksimum po raz pierwszy na końcu jest równe $\frac{1}{2}u_{2n}$, dla czasu $2n$ lub $2n+1$.

Zad.3 Niech X_n oznacza (losowe) położenie pierwszego osiągnięcia maksimum przez cząstkę błądzącą w czasie $2n$. Wykaż, że
(a) $\mathbf{P}(X_n = 2k) = \frac{1}{2}\, u_{2k}u_{2n-2k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$
(b) $\mathbf{P}(X_n = 2k+1) = \frac{1}{2}\, u_{2k}u_{2n-2k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$
(c) $\mathbf{P}(X_n = 0) = u_{2n}$.

Zad.4 W kolejce do kasy kina stoi $2n$ osób, przy czym n osób ma tylko dziesięciozłotówki, a pozostałe n osób ma tylko dwudziestozłotówki. Bilet do kina kosztuje dziesięć złotych, a na początku w kasie jest pusto. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że nikt nie będzie czekał na resztę? Spróbuj rozwiązać to zadanie bez wykonywania rachunków.

Zad.5 Wykaż bezpośrednim rachunkiem (z definicji wartości oczekiwanej), że w symetrycznym błądzeniu losowym po liczbach całkowitych wartość oczekiwana czasu powrotu do zera jest nieskończona.

Zad.6 Rzucamy symetryczną monetą, aż do chwili T, w której liczba orłów jest większa o 3 od liczby reszek. Wyznacz rozkład oraz wartość oczekiwaną zmiennej losowej T.

Zad.7 Uzasadnić, że $u_{2n} = \sum\limits_{k=1}^{n} f_{2k}u_{2n-2k}$, gdzie $f_{2k} = \frac{1}{2k}u_{2k-2}$.

Zad.8 Wykazać, że błądzenie symetryczne po kracie $\mathbb{Z}^2$ (cząstka skacze do jednego z 4 sąsiednich punktów z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$) powraca do punktu $(0,0)$ z prawdopodobieństwem 1. Dokładniej:
(a) Wykaż, że

$$u_{2n} = \frac{1}{4^{2n}} \sum_{i=0}^{n} \frac{(2n)!}{i!i!(n-i)!(n-i)!}.$$

(b) Sproważ powyższy wzór do postaci $u_{2n} = \dfrac{1}{4^{2n}} \dbinom{2n}{n}^2$.

Zad.9 Zbadaj zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_{2n}$.

Zad.10 Załóżmy, że w pewnej chwili dwie cząstki rozpoczynają (z różnych punktów startu) niezależne błądzenia losowe po kracie $\mathbb{Z}^2$. Powiemy, że cząstki „spotkają się", gdy dla pewnego n ich odległość jest równa zero lub jeden. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że cząstki się spotkają?

Zad.11 Niech $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ będzie spacerem losowym na $\mathbb{Z}$, gdzie X_i są i.i.d. oraz

$$\mathbf{P}(X_1 = 0) = \tfrac{2}{3}, \qquad \mathbf{P}(X_1 = 1) = \mathbf{P}(X_1 = -1) = \tfrac{1}{6}.$$

Sprawdzić czy spacer powraca do zera z prawdopodobieństwem 1.