

Algebra z geometrią analityczną

podstawowe zadania, z odpowiedziami

Maciej Burnecki

pełne listy

Spis treści

1	Wyrażenia algebraiczne, dwumian Newtona	1
2	Macierze i wyznaczniki	1
3	Układy równań liniowych	2
4	Liczby zespolone	2
5	Wielomiany i funkcje wymierne	3
6	Geometria analityczna w przestrzeni	3
7	Odpowiedzi, wskazówki	4

1 Wyrażenia algebraiczne, dwumian Newtona

1. Uprość wyrażenie

$$(a) \frac{a-b}{a^2-2ab+b^2} \left(\frac{a}{b}-1\right), \quad (b) \frac{b-a}{a^2-b^2} \left(\frac{b}{a}+1\right),$$
$$(c) \frac{a^4+a^3b+a^2b^2}{a^3-b^3} \left(\frac{b^2}{a^2}-1\right), \quad (d) \frac{(a^2-b^2)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)}{a^6-b^6+ab^5-ba^5}.$$

2. W rozwinięciu dwumianowym wyrażenia $f(x)$ wyznacz współczynnik przy α , jeśli

$$(a) f(x) = (x + \sin x)^7, \alpha = x^4 \sin^3 x, \quad (b) f(x) = (1 - e^x)^{10}, \alpha = e^{3x},$$
$$(c) f(x) = \left(x^4 - \frac{1}{x^2}\right)^9, \alpha = x^{24}, \quad (d) f(x) = \left(\frac{1}{x} + \sqrt[3]{x}\right)^{99}, \alpha = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^{98}}.$$

3. Zapisz w prostszej postaci liczbę

$$(a) \sum_{k=0}^n \left[\binom{n}{k} 3^k \right], \quad (b) \sum_{k=0}^n \left[\binom{n}{k} (-2)^k \right].$$

2 Macierze i wyznaczniki

1. Rozwiąż równanie macierzowe

$$(a) 2X - 3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad (b) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot X^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Oblicz wyznacznik

$$(a) W = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}, \quad (b) W = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}, \quad (c) W = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad (d) W = \begin{vmatrix} 9 & 4 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \\ 5 & 5 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

3. Wyznacz macierz odwrotną do macierzy A , jeśli

$$(a) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad (b) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (c) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (d) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Wyznacz rząd $r(A)$ macierzy A , jeśli

$$(a) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad (b) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad (c) A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 4 \\ 2 & 8 & 10 & -1 \\ 3 & 12 & 1 & 12 \end{pmatrix}, \quad (d) A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 9 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

3 Układy równań liniowych

1. Rozwiąż układ równań

$$(a) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + y - z = 2, \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + y + z - t = 4 \\ x + y - z + t = -4 \\ x - y + z + t = 2 \\ -x + y + z + t = -2, \end{cases} \quad (c) \begin{cases} -x - y + z + t = 4 \\ x - y - z + t = 0 \\ x - y - z - t = -8, \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x + y + z + t = 6 \\ x + 2y + z + t = 8 \\ x + y + 2z + t = 9 \\ 4x + 5y + 6z + 4t = 0. \end{cases}$$

2. W zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$, rozwiąż układ równań

$$(a) \begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 2x - ay = 8, \end{cases} \quad (b) \begin{cases} (a+6)x + y + 2z = 4 \\ x + (a+5)y + 2z = 4 \\ x + 2z = 4. \end{cases}$$

3. Wyznacz te wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których poniższy układ równań ma przynajmniej jedno rozwiązanie:

$$(a) \begin{cases} 2x + 3y = a^2 \\ -8x - 12y = -36, \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + y + 4z = a \\ 4x - 2y - 2z = 5 \\ 7x + y + 10z = 8. \end{cases}$$

4. W zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$, określ liczbę rozwiązań układu

$$(a) \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 7x + ay = a, \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = a \\ ax + y + z = -a - 1. \end{cases}$$

4 Liczby zespolone

1. Zapisz w postaci algebraicznej oraz zaznacz na płaszczyźnie liczbę zespoloną

$$(a) z = \frac{1+i}{2-i}, \quad (b) z = \frac{2+3i}{4+5i}, \quad (c) z = \frac{5}{|4-3i|i}, \quad (d) z = \frac{i-2}{i+|i-\sqrt{3}|}.$$

2. Zapisz w postaci algebraicznej liczbę zespoloną

$$(a) z = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{20}, \quad (b) z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{40}, \quad (c) z = (-1+i)^{81}, \quad (d) z = (-\sqrt{3}-i)^{123}.$$

3. Zapisz w postaci algebraicznej wszystkie pierwiastki trzeciego stopnia z liczby

$$(a) z = -1, \quad (b) z = i, \quad (c) z = -2 + 2i, \quad (d) z = 1 + i.$$

4. W zbiorze liczb zespolonych rozwiąż równanie
 (a) $z^2 - 2z + 4 = 0$, (b) $z^2 + 8z + 25 = 0$, (c) $z^2 + 10z + 34 = 0$.

5 Wielomiany i funkcje wymierne

1. Wyznacz iloraz i resztę z dzielenia wielomianu $P(x)$ przez $Q(x)$, jeśli
 (a) $P(x) = x^5 - x^4 + 3x^3 + x + 7$, $Q(x) = x^3 + x + 1$, (b) $P(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 1$, $Q(x) = x^2 + x + 3$.
2. Rozłóż wielomian $W(x)$ na nierozkładalne czynniki rzeczywiste, jeśli
 (a) $W(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4$, (b) $W(x) = x^4 + 2x^3 - x - 2$.
3. Rozłóż funkcję wymierną właściwą $f(x)$ na sumę rzeczywistych ułamków prostych, jeśli
 (a) $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^3 + 2x^2 + 5x + 4}$, (b) $f(x) = \frac{-x + 2}{x^3 + 3x^2 + 4x + 4}$.

6 Geometria analityczna w przestrzeni

1. Wyznacz te wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których
 (a) równoległoscian o trzech kolejnych wierzchołkach podstawy $A = (-5, 2, 1)$, $B = (2, 1, 2)$, $C = (3, a^2, 3)$ i wierzchołku $E = (-a - 5, 4, -18)$ nad A , jest prostopadłością, jest prostopadłością,
 (b) kąt pomiędzy wektorami $\mathbf{u} = (a, -16, 4)$ oraz $\mathbf{v} = (2a, 1, -4)$ jest prosty,
 (c) wektory $\mathbf{u} = (1, a^2, 1)$ oraz $\mathbf{v} = (3, 12, 3)$ są równoległe.
2. Wyznacz pole P
 (a) równoległoboku o kolejnych wierzchołkach $A = (2, 2, 4)$, $B = (0, -2, -2)$, $C = (2, 1, 2)$,
 (b) równoległoboku o środku w punkcie $O = (2, 1, 2)$ i końcach jednego z boków $A = (2, 2, 4)$, $B = (0, -2, -2)$,
 (c) trójkąta o wierzchołkach $A = (-2, -2, -4)$, $B = (0, 2, 2)$, $C = (-2, -1, -2)$.
3. Wyznacz objętość V
 (a) czworoscianu o wierzchołkach $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 2, 2)$, $C = (1, -2, -2)$ i $D = (-1, 1, -1)$,
 (b) równoległoscianu rozpiętego na wektorach $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 1, 2)$ oraz $\mathbf{w} = (-1, -1, 3) \times (1, 2, 3)$.
4. Podaj
 (a) równanie ogólne płaszczyzny przechodzącej przez punkty $A = (-1, 1, 1)$, $B = (0, 1, 2)$, $C = (3, 0, 5)$,
 (b) równanie ogólne płaszczyzny o równaniu parametrycznym $\begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = 2 + t - s \\ z = 1 + t + s, \end{cases}$
 (c) równanie parametryczne prostej o równaniu krawędziowym $\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x + 2y + 3z - 2 = 0, \end{cases}$
 (d) równanie parametryczne prostej prostopadłej do prostych $m : \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 1 + t, \end{cases}$ $l : \begin{cases} x = -s \\ y = 2 + s \\ z = 1 - s, \end{cases}$
 w punkcie ich przecięcia.
5. Wyznacz odległość $d(P, \pi)$ punktu P od płaszczyzny π , jeśli
 (a) $P = (-2, 1, 3)$, $\pi : x + 2y + 2z - 3 = 0$, (b) $P = (1, 2, 1)$, $\pi : \begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = 2 + s \\ z = -1 - t + s. \end{cases}$
6. Wyznacz odległość $d(P, l)$ punktu P od prostej l , jeśli
 (a) $P = (2, 3, 4)$, $l : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t, \end{cases}$ (b) $P = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$, $l : \begin{cases} x + y + z + 5 = 0 \\ x - y - z + 2 = 0. \end{cases}$

7. Wyznacz rzut prostopadły P' punktu $P = (2, 2, 1)$ na

(a) prostą $l : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + t \\ z = -1 - 2t, \end{cases}$ (b) prostą $l : \begin{cases} x - 2y - 3z + 1 = 0 \\ x - y + z = 0, \end{cases}$

(c) płaszczyznę $\pi : x + 2y - 3z + 4 = 0$, (d) płaszczyznę $\pi : \begin{cases} x = 1 + 2t - s \\ y = -11 + t + s \\ z = t, \end{cases}$

a następnie odbicia symetryczne P'' punktu P względem powyższych prostych i płaszczyzn.

8. Wyznacz kąt φ pomiędzy

(a) prostymi $l : \begin{cases} x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ z = t \end{cases}$ oraz $m : \begin{cases} x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}s \\ y = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}s \\ z = 1 - s. \end{cases}$

(b) płaszczyznami $\pi_1 : \begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = t - s \\ z = t + s \end{cases}$ oraz $\pi_2 : y - z - 1 = 0$,

(c) prostą $l : \begin{cases} x + y + z + 2 = 0 \\ x - y + z + 3 = 0 \end{cases}$ i płaszczyznę $\pi : x + y + 5 = 0$.

7 Odpowiedzi, wskazówki

Wyrażenia algebraiczne, dwumian Newtona

1. (a) $\frac{1}{b}$, (b) $-\frac{1}{a}$, (c) $-a - b$, (d) 1.

2. (a) $a_4 = \binom{7}{3} = 35$, (b) $a_3 = -\binom{10}{3} = -120$, (c) $a_2 = \binom{9}{2} = 36$, (d) $a_1 = \binom{99}{1} = 99$.

3. (a) 4^n , (b) $(-1)^n$.

Macierze i wyznaczniki

1. (a) $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, (b) $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. (a) $W = -1$, (b) $W = 2$, (c) $W = 1$, (d) $W = -5$.

3. (a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$, (b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, (c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(d) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

4. (a) $r(A) = 2$, (b) $r(A) = 2$, (c) $r(A) = 3$, (d) $r(A) = 3$.

Układy równań liniowych

1. (a) $x = 1, y = 0, z = -1$, (b) $x = 1, y = -1, z = 2, t = -2$. (c) $x = z - 2, y = 2, t = 4, z \in \mathbb{R}$ - dowolne, (d) układ sprzeczny (brak rozwiązań).

2. (a) Dla $a \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ układ ma tylko jedno rozwiązanie $x = 4, y = 0$, a dla $a = -3$ nieskończenie wiele rozwiązań postaci $\begin{cases} x = 4 - \frac{3}{2}y \\ y \in \mathbb{R}, \end{cases}$
- (b) dla $a \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}$ układ ma tylko jedno rozwiązanie $x = y = 0, z = 2$, a dla $a = -5$ nieskończenie wiele rozwiązań postaci $\begin{cases} x = 4 - 2z \\ y = 0 \\ z \in \mathbb{R}. \end{cases}$
3. (a) $a = -3$ lub $a = 3$, (b) $a = 1$.
4. (a) Dla $a \in \mathbb{R} \setminus \{14\}$ układ ma tylko jedno rozwiązanie, dla $a = 14$ jest sprzeczny (nie ma rozwiązań),
 (b) dla $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ układ ma tylko jedno rozwiązanie, dla $a = -2$ nieskończenie wiele rozwiązań, a dla $a = 1$ jest sprzeczny (nie ma rozwiązań).

Liczby zespolone

1. (a) $z = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$, (b) $z = \frac{23}{41} + \frac{2}{41}i$.
 (c) $z = -i$, (d) $z = -1$.
2. (a) $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, (b) $z = 1$, (c) $z = -2^{40} + 2^{40}i$, (d) $-2^{123}i$.
3. (a) $w_0 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, w_1 = -1, w_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, (b) $w_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, w_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, w_2 = -i$,
 (c) $w_0 = 1 + i, w_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)i, w_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)i$,
 (d) $w_0 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}} + \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt[3]{2}}i, w_1 = \frac{-1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}i, w_2 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}} - \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}}i$.
- Wskazówka:* $\cos \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1 + \cos(2 \cdot \frac{\pi}{12})}{2}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.
4. (a) $z \in \{1 + \sqrt{3}i, 1 - \sqrt{3}i\}$, (b) $z \in \{-4 + 3i, -4 - 3i\}$, (c) $z \in \{-5 + 3i, -5 - 3i\}$.

Wielomiany i funkcje wymierne

1. (a) $I(x) = x^2 - x + 2, R(x) = 5$, (b) $I(x) = x^2 + x - 3, R(x) = x + 10$.
2. (a) $W(x) = (x + 2)(x - 2)(x^2 + x + 1)$, (b) $W(x) = (x - 1)(x + 2)(x^2 + x + 1)$.
3. (a) $f(x) = \frac{-1}{x^2 + x + 4} + \frac{1}{x + 1}$, (b) $f(x) = \frac{-x}{x^2 + x + 2} + \frac{1}{x + 2}$.

Geometria analityczna w przestrzeni

1. (a) $a = -3$, (b) $a = 4$ lub $a = -4$, (c) $a = 2$ lub $a = -2$.
2. (a) $P = 2\sqrt{6}$, (b) $P = 4\sqrt{6}$, (c) $P = \sqrt{6}$.
3. (a) $V = 1$, (b) $V = 15$.
4. (a) $x - z + 2 = 0$,
 (b) $x - z = 0$,
 (c) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 1 + t, \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = 2 - t. \end{cases}$

5. (a) $d(P, \pi) = 1$,

(b) równanie ogólne płaszczyzny: $x - 2y + z + 4 = 0$, odległość $d(P, \pi) = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

6. (a) $d(P, l) = \frac{2\sqrt{6}}{3}$, (b) $d(P, l) = \sqrt{3}$.

7. (a) $P' = \left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $P'' = \left(-\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, (b) $P' = \left(\frac{41}{21}, \frac{37}{21}, -\frac{4}{21}\right)$,

(c) $P' = \left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{2}\right)$, $P'' = (1, 0, 4)$, (d) $P' = (1, 1, 4)$, $P'' = (0, 0, 7)$.

8. (a) $\varphi = \frac{\pi}{3}$, (b) $\varphi = \frac{\pi}{3}$, (c) $\varphi = \frac{\pi}{6}$.