Analiza matematyczna II
zadania z odpowiedziami

Maciej Burnecki

zadania z analizy matematycznej I

Spis treści

1 Całki niewłaściwe pierwszego rodzaju **2**

2 Całki niewłaściwe drugiego rodzaju **2**

3 Szeregi liczbowe **3**

4 Szeregi potęgowe **3**

5 Podstawowe własności funkcji dwóch i trzech zmiennych **3**

6 Podstawy rachunku różniczkowego funkcji dwóch i trzech zmiennych **4**

7 Ekstrema funkcji dwóch zmiennych **4**

8 Ogólne własności całek podwójnych **5**

9 Współrzędne biegunowe w całkach podwójnych **5**

10 Ogólne własności całek potrójnych **5**

11 Współrzędne walcowe **6**

12 Współrzędne sferyczne **6**

13 Przekształcenie Laplace'a **6**

14 Przekształcenie Fouriera **7**

15 Przykładowe egzaminy **7**
15.1 Zestaw A . . . 7
15.2 Zestaw B . . . 7
15.3 Zestaw C . . . 8
15.4 Zestaw D . . . 8

16 Odpowiedzi, wskazówki **9**
16.1 Całki niewłaściwe pierwszego rodzaju . . . 9
16.2 Całki niewłaściwe drugiego rodzaju . . . 9
16.3 Szeregi liczbowe . . . 9
16.4 Szeregi potęgowe . . . 9
16.5 Podstawowe własności funkcji dwóch i trzech zmiennych . . . 10
16.6 Podstawy rachunku różniczkowego funkcji dwóch i trzech zmiennych . . . 10
16.7 Ekstrema funkcji dwóch zmiennych . . . 11
16.8 Ogólne własności całek podwójnych . . . 11
16.9 Współrzędne biegunowe w całkach podwójnych . . . 11

16.10 Ogólne własności całek potrójnych . . . 11
16.11 Współrzędne walcowe . . . 12
16.12 Współrzędne sferyczne . . . 12
16.13 Przekształcenie Laplace'a . . . 12
16.14 Przekształcenie Fouriera . . . 12
16.15 Przykładowe egzaminy . . . 12
16.15.1 Zestaw A . . . 12
16.15.2 Zestaw B . . . 13
16.15.3 Zestaw C . . . 13
16.15.4 Zestaw D . . . 13

Oznaczamy: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ – zbiór liczb naturalnych, $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ – zbiór liczb naturalnych dodatnich, $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$ – zbiór liczb całkowitych, $\mathbb{Q} = \left\{\frac{n}{m} : n \in \mathbb{Z} \wedge m \in \mathbb{N}_+\right\}$ – zbiór liczb wymiernych (ułamków), $\mathbb{R}$ – zbiór liczb rzeczywistych. Jeśli zbiór indeksów jest pusty, to suma liczb po tym zbiorze wynosi 0, a iloczyn 1. Dowolna liczba do potęgi 0 to 1, także $0^0 = 1$ (nie należy mylić z symbolem nieoznaczonym dla granic).

1 Całki niewłaściwe pierwszego rodzaju

1.1. Korzystając z kryterium porównawczego, zbadaj zbieżność całki

$$\text{(a)} \int_1^\infty \frac{2+\cos x}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx, \quad \text{(b)} \int_0^\infty \frac{x^2 \operatorname{arc\,tg} x}{\sqrt{1+x^7}}\,dx, \quad \text{(c)} \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3} + \frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg} x^2}, \quad \text{(d)} \int_2^\infty \frac{\cos\frac{\pi}{2x}}{x+\sin x^2}\,dx.$$

1.2. Korzystając z kryterium ilorazowego, zbadaj zbieżność całki

$$\text{(a)} \int_1^\infty \sin^4 \frac{1}{\sqrt[8]{x}}\,dx, \quad \text{(b)} \int_1^\infty \frac{2-\sin\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx, \quad \text{(c)} \int_1^\infty \frac{25x^8 - 9x^2 + 3}{x^7 - x^2 + 1}\,dx, \quad \text{(d)} \int_0^\infty \frac{1000^x}{(2^x+1)^{10}}\,dx, \quad \text{(e)} \int_1^\infty \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x}\,dx.$$

1.3. Zbadaj zbieżność całki

$$\text{(a)} \int_1^\infty \sqrt{x}\,\sin\frac{1}{x}\,dx, \quad \text{(b)} \int_1^\infty \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1}{\sqrt{x}}\,dx.$$

1.4. Zbadaj zbieżność i zbieżność bezwzględną całki

$$\text{(a)} \int_0^\infty \frac{3\cos(4x) - 2\sin\left(x^6\right)}{x^2 - x + 1}\,dx, \quad \text{(b)} \int_0^\infty \frac{x^2 - 5\operatorname{arc\,tg} x}{\sqrt{x^5 + \cos x + 1}}\,dx, \quad \text{(c)} \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,dx.$$

1.5. Oblicz całkę i jej wartość główną, o ile któraś z tych wielkości istnieje:

$$\text{(a)} \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}, \quad \text{(b)} \int_{-\infty}^\infty e^{-|x|}\,dx, \quad \text{(c)} \int_{-\infty}^\infty x\sin x\,dx, \quad \text{(d)} \int_{-\infty}^\infty x\cos x\,dx.$$

2 Całki niewłaściwe drugiego rodzaju

2.1. Dwoma sposobami, za pomocą kryterium porównawczego oraz ilorazowego, zbadaj zbieżność całki

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x}, \quad \text{(b)} \int_0^1 \frac{dx}{\sin\left(x^4\right)}, \quad \text{(c)} \int_0^1 \frac{dx}{\sin\sqrt{x}}.$$

2.2. Zbadaj zbieżność i zbieżność bezwzględną całki

$$\int_0^\pi x\sin\frac{1}{x}\,dx, \quad \text{(b)} \int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{x\operatorname{arc\,tg} x}\,dx.$$

2.3. Oblicz całkę i jej wartość główną, o ile któraś z tych wielkości istnieje:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}, \quad \text{(b)} \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}, \quad \text{(c)} \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

3 Szeregi liczbowe

3.1. Wykorzystując warunek konieczny zbieżności, wykaż rozbieżność szeregu

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg} n}{\arccos \frac{1}{n}}, \quad \text{(b)} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n}{1-n}\right)^n.$$

3.2. Korzystając z kryterium d'Alemberta, zbadaj zbieżność szeregu

$$\text{(a)} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n^{10}}{10^n}, \quad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{6^n (n!)^2}, \quad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{3^n}.$$

3.3. Korzystając z kryterium Cauchy'ego, zbadaj zbieżność szeregu

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\operatorname{arctg}(2^n+1))^n}, \quad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-3^n+7^n}{2^n+5^n}.$$

3.4. Zbadaj zbieżność szeregu

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{2}}{n}, \quad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi) \operatorname{tg} \frac{1}{n}, \quad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} 2^n, \quad \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,(-2)^n}{\pi^n}, \quad \text{(e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2}.$$

4 Szeregi potęgowe

4.1. Wyznacz przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^n}, \quad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{6^n} x^n, \quad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(6-2x)^n}{\sqrt{n+1}}, \quad \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4x-8)^n}{n\ 8^n}, \quad \text{(e)} \sum_{n=1}^{\infty} n(2-4x)^n.$$

4.2. Dla zadanej funkcji f wyznacz szereg Maclaurina, przedział jego zbieżności oraz wzór na n-ty współczynnik w tym rozwinięciu, jeśli

$$\text{(a) } f(x) = \frac{4x}{x-4}, \quad \text{(b) } f(x) = \frac{2x}{16+x^4}, \quad \text{(c) } f(x) = x^3 \ln\left(1 - \frac{1}{4}x^2\right), \quad \text{(d) } f(x) = x^2 e^{-5x^3}.$$

4.3. Korzystając z rozwinięć Maclaurina funkcji elementarnych, oblicz

$$\text{(a) } f^{(4)}(0) \text{ dla } f(x) = x^2\cos(2x), \quad \text{(b) } f^{(12)}(0) \text{ dla } f(x) = x^2\sin(3x), \quad \text{(c) } f^{(5)}(0) \text{ dla } f(x) = \frac{x^3}{1+4x}.$$

4.4. Korzystając z twierdzenia o różniczkowaniu lub całkowaniu szeregu potęgowego, oblicz sumę

$$\text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n+4}{3^n}, \quad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{3^n}, \quad \text{(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2)5^n}, \quad \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)2^n}.$$

5 Podstawowe własności funkcji dwóch i trzech zmiennych

5.1. Niech x, y, z oznaczają zmienne rzeczywiste. Wyznacz dziedzinę D naturalną funkcji f, opisz zadaną poziomicę oraz określ kształt pozostałych poziomic, jeśli

$$\text{(a) } f(x,y) = e^{1/(x^2+y^2-3)}, \text{ poziomica } f(x,y) = e, \quad \text{(b) } f(x,y,z) = \frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2-0,5}, \text{ poziomica } f(x,y,z) = 2.$$

5.2. Zbadaj istnienie i ewentualnie oblicz $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{2-\sqrt{4-x^2-y^2-z^2}}{x^2+y^2+z^2}$.

5.3. Wyznacz zbiór A punktów ciągłości funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, określonej wzorami

(a) $f(x,y) = \begin{cases} xy, & \text{gdy } y \leqslant x^2 \\ 2x^3 - 1, & \text{gdy } x^2 < y, \end{cases}$ (b) $f(x,y) = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg}(xy), & \text{gdy } |xy| < 1 \\ x, & \text{gdy } 1 \leqslant |xy|, \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \cos(x-y), & \text{gdy } |x-y| < \frac{\pi}{4} \\ y, & \text{gdy } \frac{\pi}{4} \leqslant |x-y|, \end{cases}$ (d) $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{z-7}{x^2+y^2+z^2-25}, & \text{gdy } x^2+y^2+z^2 \neq 25 \\ \frac{1}{2}, & \text{gdy } x^2+y^2+z^2 = 25. \end{cases}$

6 Podstawy rachunku różniczkowego funkcji dwóch i trzech zmiennych

6.1. Oblicz wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu funkcji $f(x,y) = \sin(xy^3) + \dfrac{x}{\sqrt{y}}$ w punkcie $(\pi, 1)$.

6.2. Dla funkcji $f(x,y,z) = x^2 \ln(y+2z)$ oblicz $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial z \partial y}(7,1,0)$.

6.3. Sprawdź, czy spełniony jest warunek wystarczający dla istnienia płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, a następnie wyznacz równanie tej płaszczyzny, jeśli

(a) $f(x,y) = \operatorname{tg}^2(x+y^2), (x_0,y_0) = \left(0, \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$, (b) $f(x,y) = \ln(x+y^2), (x_0,y_0) = (0, \mathrm{e})$,

(c) $f(x,y) = \dfrac{\ln y}{\arccos x}, (x_0,y_0) = \left(\dfrac{1}{2}, \sqrt{\mathrm{e}}\right)$, (d) $f(x,y) = 3^{y-4x}, (x_0,y_0) = (1,4)$,

(e) $f(x,y) = 4 \operatorname{arc\,tg}\left(2xy^2\right), (x_0,y_0) = \left(\dfrac{1}{4}, \sqrt{2}\right)$.

6.4. Wyznacz kierunek najszybszego wzrostu funkcji f w punkcie P_0, jeśli

(a) $f(x,y) = 2^{x-y}, P_0 = \left(\dfrac{1}{\ln 4}, \dfrac{1}{\ln 2}\right)$, (b) $f(x,y,z) = \sin\left(x\sqrt{y}\right) + \operatorname{arc\,tg} z, P_0 = \left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{16}{9}, 1\right)$.

6.5. Wyznacz pochodną kierunkową funkcji f w punkcie P_0 i w kierunku wektora $\mathbf{v}$, jeśli

(a) $f(x,y) = x\sin\left(y^2+x^3\right), P_0 = \left(-\sqrt[3]{\pi}, 0\right), \mathbf{v} = \left(\dfrac{1}{\pi}, \sqrt{1 - \dfrac{1}{\pi^2}}\right)$,

(b) $f(x,y,z) = x\sin(y+z), P_0 = \left(1, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right), \mathbf{v} = \left(1, -1, \sqrt{2}\right)$.

6.6. Za pomocą różniczki funkcji dwóch zmiennych podaj przybliżoną wartość wyrażenia

(a) $\sqrt{1,002} \cdot 0,999^4$, (b) $\operatorname{arc\,tg} \dfrac{0,01 + 0,07^2}{1 - 0,0007}$.

6.7. Oszacuj, o ile mogliśmy się pomylić obliczając pole powierzchni całkowitej ścian prostopadłościanu, jeśli krawędzie mierzyliśmy z dokładnością 0,1 mm i otrzymaliśmy wyniki 10.0 mm, 20.0 mm, 30.0 mm.

7 Ekstrema funkcji dwóch zmiennych

7.1. Wyznacz wszystkie ekstrema lokalne funkcji

(a) $f(x,y) = -4x^3 - 3xy^2 + 12xy$, (b) $f(x,y) = (x^2+2y^2)\,\mathrm{e}^{-y}$, (c*) $f(x,y) = \left(x^2 - 2y^3 + 3y^2\right)\mathrm{e}^{-x}$,

(d*) $f(x,y) = x^n + y^n - nxy$, gdzie $n \geqslant 2$ jest ustaloną liczbą naturalną.

7.2. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji f na zbiorze D, jeśli

(a) $f(x,y) = y^2x + 2yx + x^2 - 2x, D = [1,2] \times [-2,0]$, (b) $f(x,y) = (x+y^2)\sqrt{\mathrm{e}^x}, D = [-3,-1] \times [-1,1]$,

(c) $f(x,y) = x^2 - x + y^2 + \dfrac{1}{4}, D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leqslant 1\}$,

(d) $f(x,y) = 3(x-2)y, D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 4x + y^2 \leqslant 0\}$.

7.3. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji $f(x,y)$ przy warunku $g(x,y)=0$, jeśli

(a) $f(x,y)=2x^2-y^2, g(x,y)=x-y-1,$ (b) $f(x,y)=x^2-\ln\left(x^4y^2\right), g(x,y)=xy-1.$

8 Ogólne własności całek podwójnych

8.1. Zmień kolejność całkowania w całce iterowanej (a) $\int\limits_1^2 dy \int\limits_{2-y}^{y^2} f(x,y)\,dx,$ (b) $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{-x^2}^{x^2} f(x,y)\,dy.$ Sporządź rysunek.

8.2. Oblicz pole ograniczonego obszaru D na płaszczyźnie, wyznaczonego przez krzywe o równaniach

(a) $y^2=-5x, y=-x,$ (b) $y=-1, y^2=4x, xy=-2,$ (c) $xy=10, x+y+7=0,$ (d) $y=\mathrm{e}^{x-1}, y=\dfrac{1}{x}, x=2,$

(e) $y=\sin x, y=\dfrac{2}{\pi}|x|,$ (f) $y=3^x, y=2x+1,$ (g) $y=\mathrm{e}^x, y=(\mathrm{e}-1)x+1.$

Sporządź rysunek.

8.3. Oblicz masę obszaru D o gęstości powierzchniowej σ, jeśli

(a) $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -\dfrac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant -\dfrac{\pi}{4}, \sin x\leqslant y\leqslant 0\right\}, \sigma(x,y)=-x,$

(b) D jest ograniczony przez krzywe $xy=3, x+y-4=0$, a $\sigma(x,y)=y$.

Na płaszczyźnie zaznacz obszar D.

9 Współrzędne biegunowe w całkach podwójnych

9.1. Wprowadzając współrzędne biegunowe, oblicz

(a) $\iint\limits_D y\,dxdy$, jeśli $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{3}x, x^2+y^2\leqslant 9\}$,

(b) $\iint\limits_D 3^{x^2+y^2}\,dx\,dy$, jeśli $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geqslant 0, y\leqslant 0, x^2+y^2\leqslant 4\right\}$,

(c) $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\,dx\,dy$, jeśli $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \sqrt{3}\,x\leqslant y\leqslant 0, x^2+y^2\leqslant 4\right\}$.

Obszar D zaznacz na płaszczyźnie.

9.2. Wprowadzając współrzędne biegunowe, oblicz masę obszaru $D\subseteq\mathbb{R}^2$ o gęstości powierzchniowej $\sigma(x,y)$, jeśli D jest ograniczony krzywymi

(a) $y=0,\ y=\sqrt{3}\,x,\ x=\sqrt{1-y^2},\ x=\sqrt{9-y^2}$, a $\sigma(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$,

(b) $x=0, y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x, y=-\sqrt{4-x^2}, y=-\sqrt{16-y^2}$, a $\sigma(x,y)=x^2+y^2$,

(c) $x=0,\ y=\sqrt{3}\,x,\ y=\sqrt{4-x^2}$, a $\sigma(x,y)=x$.

Obszar D zaznacz na płaszczyźnie.

10 Ogólne własności całek potrójnych

10.1. Zmień kolejność całkowania na $dzdydx$ oraz $dzdxdy$ w całce

(a) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-2+x}^0 dy \int\limits_0^{4-2x+2y} f(x,y,z)\,dz,$ (b) $\int\limits_{-2}^0 dx \int\limits_0^{2+x} dy \int\limits_0^{3+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}y} f(x,y,z)\,dz,$

(c) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{4-4y} dz \int\limits_0^{1-y-\frac{1}{4}z} f(x,y,z)\ dx$, (d) $\int\limits_0^4 dy \int\limits_0^{4-y} dz \int\limits_{-1+\frac{1}{4}y+\frac{1}{4}z}^{0} f(x,y,z)\ dx$.

Sporządź rysunek obszaru całkowania.

10.2. Oblicz objętość obszaru w przestrzeni, ograniczonego przez powierzchnie

(a) $z=2, z=8, x=5-y^2, x=3+y^2$, (b) $x=0, y=2, y=2x, x+y+z=0, 2x+y-z=0$.

Sporządź rysunek.

11 Współrzędne walcowe

11.1. Wprowadzając współrzędne walcowe, oblicz objętość obszaru $U \subseteq \mathbb{R}^3$, ograniczonego powierzchniami

(a) $x^2+y^2-z=0, \sqrt{x^2+y^2}-z+2=0$, (b) $x^2+y^2+z=0, \sqrt{x^2+y^2}-z-6=0$.

Sporządź rysunek.

11.2. Wprowadzając współrzędne walcowe, oblicz masę ograniczonego obszaru $U \subseteq \mathbb{R}^3$, o gęstości objętościowej masy γ, jeśli

(a) $\gamma(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}$, a obszar U jest wyznaczony przez powierzchnie o równaniach

$5\sqrt{x^2+y^2}+z=0, z+5=0$,

(b) $\gamma(x,y,z)=x^2+y^2$, a obszar U jest wyznaczony przez powierzchnie o równaniach

$x^2+y^2-z+1=0, 2x^2+2y^2-z=0$.

Sporządź rysunek.

12 Współrzędne sferyczne

12.1. Wprowadzając współrzędne sferyczne, oblicz objętość obszaru $U \subseteq \mathbb{R}^3$, ograniczonego powierzchniami

(a) $\sqrt{3}\,z-\sqrt{x^2+y^2}=0, z-\sqrt{9-x^2-y^2}=0$,

(b) $\sqrt{x^2+y^2}-z=0, \sqrt{9-x^2-y^2}-z=0, \sqrt{4-x^2-y^2}-z=0$.

Naszkicuj obszar całkowania.

12.2. Wprowadzając współrzędne sferyczne, oblicz masę kuli $K=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leqslant \frac{1}{4}\right\}$, o gęstości objętościowej masy $\gamma(x,y,z)=z+\frac{1}{2}$.

12.3. Oblicz masę obszaru $U \subseteq \mathbb{R}^3$, wyciętego z pierścienia kulistego $P=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 4\}$ przez stożek $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}\}$, jeśli gęstość objętościowa masy $\gamma(x,y,z)=5\left(x^2+y^2+z^2\right)$.

13 Przekształcenie Laplace'a

13.1. Niech $a>0$. Wyznacz transformatę Laplace'a funkcji

(a) $f(t)=\begin{cases} 1 \text{ dla } 0 \leqslant t < a \\ 0 \text{ dla } a \leqslant t, \end{cases}$ (b) $f(t)=\begin{cases} t \text{ dla } 0 \leqslant t < a \\ 0 \text{ dla } a \leqslant t, \end{cases}$ (c) $f(t)=\begin{cases} t & \text{dla } 0 \leqslant t < a \\ -t+2a & \text{dla } a \leqslant t < 2a \\ 0 & \text{dla } 2a \leqslant t. \end{cases}$

13.2. Za pomocą transformacji Laplace'a rozwiąż zagadnienie początkowe

(a) $y'+5y=-10t,\ y(0)=\frac{2}{5}$, (b) $y'+7y=-14t,\ y(0)=\frac{2}{7}$,

(c) $y''+y'-2y=4e^{2t},\ y(0)=0,\ y'(0)=1$, (d) $\begin{cases} x'=3x+y \\ y'=-x+y, \end{cases}$ $\begin{cases} x(0)=0 \\ y(0)=1. \end{cases}$

Uwaga: wartość transformacji (czyli transformata) Laplace'a $\mathcal{L}\left(t^n e^{\alpha t}\right)(s) = \dfrac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$,
w tym $\mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{\alpha t}\right)(s) = \dfrac{1}{s-\alpha}$, $\mathcal{L}\left(t^n\right)(s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, $\mathcal{L}(1)(s) = \dfrac{1}{s}$.

14 Przekształcenie Fouriera

14.1. Wyprowadź z definicji wzór na transformatę Fouriera funkcji

(a) $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 0 & \text{dla pozostałych } t \in \mathbb{R}, \end{cases}$ (b) $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } |t| \leqslant 1 \\ 0 & \text{dla pozostałych } t \in \mathbb{R}. \end{cases}$

15 Przykładowe egzaminy

Uwaga: zadania na kolokwiach i egzaminach mogą dotyczyć innych części obowiązującego materiału.

15.1 Zestaw A

15.1. Wyznacz środek x_0 i promień R przedziału zbieżności oraz zbadaj zbieżność na końcach szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 7^n (3x+1)^n$.

15.2. Wyznacz równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji $f(x,y) = \sin(2x-y)$ w punkcie $(x_0, y_0, z_0) = \left(\pi, \dfrac{\pi}{3}, f\left(x_0, y_0\right)\right)$.

15.3. Sprawdź, czy funkcja $f(x,y) = x^4 + y^4 + 4x - 32y$ przyjmuje ekstremum lokalne w punkcie $(x_0, y_0) = (-1, 2)$; w przypadku odpowiedzi pozytywnej, określ rodzaj i oblicz ekstremum.

15.4. Zmień kolejność całkowania w całce $\int\limits_1^2 dy \int\limits_{-\ln y}^{0} f(x,y)\, dx$. Sporządź rysunek obszaru całkowania.

15.5. Oblicz masę ograniczonego obszaru $U \subseteq \mathbb{R}^3$, wyznaczonego przez powierzchnie o równaniach $x^2 + y^2 - 2z = 0, z = 2$, jeśli gęstość objętościowa $\gamma(x,y,z) = x^2 + y^2$.

15.6. Wyprowadź z definicji wzór na transformatę Laplace'a funkcji $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, określonej wzorami

$f(t) = \begin{cases} 1 \text{ dla } 1 \leqslant t < 2 \\ 0 \text{ dla pozostałych } t. \end{cases}$

15.2 Zestaw B

15.1. Zbadaj zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+n+1}{n^4+1}$.

15.2. Wyznacz pochodną kierunkową funkcji $f(x,y) = \operatorname{tg}(-x+2y)$ w punkcie $(x_0, y_0) = \left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right)$ i w kierunku wersora $\vec{v} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

15.3. Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x,y) = x^3 + x + y$ na trójkącie $D \subseteq \mathbb{R}^2$, wyznaczonym przez proste o równaniach $x = 0, y = 0, y = -x + 1$.

15.4. Zmień kolejność całkowania w całce $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\arcsin y} f(x,y)\, dx$. Sporządź rysunek obszaru całkowania.

15.5. Oblicz masę ograniczonego obszaru $U \subseteq \mathbb{R}^3$, wyznaczonego przez powierzchnie o równaniach $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, z = \sqrt{x^2 + y^2}$, jeśli gęstość objętościowa $\gamma(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

15.6. Wyprowadź z definicji wzór na transformatę Laplace'a funkcji $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, określonej wzorami

$$f(t) = \begin{cases} e^t & \text{dla } 1 \leqslant t < 3 \\ 0 & \text{dla pozostałych } t. \end{cases}$$

15.3 Zestaw C

15.1. Wyznacz środek x_0 i promień R przedziału zbieżności oraz zbadaj zbieżność na końcach szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x+2)^n}{8^n}.$$

15.2. Wyznacz równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji $f(x, y) = \cos(x - 3y)$ w punkcie

$$(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\pi}{4}, \pi, f\left(x_0, y_0\right)\right).$$

15.3. Sprawdź, czy funkcja $f(x, y) = x^3+3x^2-2xy+5y^2-4y^3$ przyjmuje ekstremum lokalne w punkcie $(x_0, y_0) = (0, 0)$. W przypadku odpowiedzi pozytywnej, określ rodzaj i oblicz ekstremum.

15.4. Zmień kolejność całkowania w całce $\int\limits_{-e}^{-1} dy \int\limits_{0}^{\ln(-y)} f(x, y)\, dx$. Sporządź rysunek obszaru całkowania.

15.5. Oblicz masę ograniczonego obszaru $U \subseteq \mathbb{R}^3$, wyznaczonego przez powierzchnie o równaniach $z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 2$, jeśli gęstość objętościowa $\gamma(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

15.6. Wyznacz z definicji transformatę Laplace'a funkcji $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, określonej wzorami

$$f(t) = \begin{cases} 2 & \text{dla } 2 \leqslant t < 3 \\ 0 & \text{dla pozostałych } t. \end{cases}$$

15.4 Zestaw D

15.1. Zbadaj zbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 + n^2 + 1}{n^5 + 5}$.

15.2. Wyznacz pochodną kierunkową funkcji $f(x, y) = \operatorname{arc\,tg}(-x + y)$ w punkcie $(x_0, y_0) = (1, 2)$ i w kierunku wersora

$$\vec{v} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

15.3. Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x, y) = y^3 + x + y$ na trójkącie $D \subseteq \mathbb{R}^2$, wyznaczonym przez proste o równaniach $x = 0, y = 0, y = x + 1$.

15.4. Zmień kolejność całkowania w całce $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\arccos y}^{\frac{\pi}{2}} f(x, y)\, dx$. Sporządź rysunek obszaru całkowania.

15.5. Oblicz masę ograniczonego obszaru $U \subseteq \mathbb{R}^3$, wyznaczonego przez powierzchnie o równaniach $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, z = \sqrt{3\left(x^2 + y^2\right)}$, jeśli gęstość objętościowa $\gamma(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

15.6. Wyznacz z definicji transformatę Laplace'a funkcji $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, określonej wzorami

$$f(t) = \begin{cases} e^{2t} & \text{dla } 1 \leqslant t < 4 \\ 0 & \text{dla pozostałych } t. \end{cases}$$

16 Odpowiedzi, wskazówki

16.1 Całki niewłaściwe pierwszego rodzaju

16.1.1. (a) Zbieżna, (b) zbieżna, (c) zbieżna, (d) rozbieżna do ∞.

16.1.2. (a) Rozbieżna do ∞, (b) rozbieżna do ∞, (c) zbieżna, (d) zbieżna, (e) zbieżna.

16.1.3. (a) Rozbieżna do ∞, (b) zbieżna.

16.1.4. (a) Zbieżna bezwzględnie (więc zbieżna),
(b) całka jest rozbieżna do ∞ i nie jest zbieżna bezwzględnie,
(c) zbieżna bezwzględnie (więc zbieżna).

16.1.5. (a) całka jest równa π, zatem tyle samo wynosi wartość główna,
(b) całka jest równa 2, zatem tyle samo wynosi wartość główna,
(c) ani całka, ani wartość główna całki nie istnieją,
(d) całka nie istnieje, wartość główna całki wynosi 0.

16.2 Całki niewłaściwe drugiego rodzaju

16.2.1. Dla kryterium porównawczego można wykorzystaj nierówności $\frac{2}{\pi}x < \sin x < x$, zachodzące dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$.
(a) Rozbieżna do ∞, (b) rozbieżna do ∞, (b) zbieżna.

16.2.2. (a) Zbieżna bezwzględnie (więc zbieżna), (b) zbieżna bezwzględnie (więc zbieżna).

16.2.3. (a) Całka rozbieżna (nie istnieje), wartość główna wynosi 0, (b) całka i wartość główna nie istnieją,
(c) całka wynosi 6, zatem wartość główna tyle samo.

16.3 Szeregi liczbowe

16.3.1. (a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{\pi}{2} \neq 0$, (b) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = e \neq 0$.

16.3.2. (a) Zbieżny bezwzględnie, (b) zbieżny bezwzględnie, (c) zbieżny bezwzględnie.

16.3.3. (a) Zbieżny bezwzględnie, (b) rozbieżny do ∞.

16.3.4. (a) Zbieżny warunkowo. *Wskazówka:* do pokazania zbieżności zastosować kryterium Leibniza, a do pokazania rozbieżności szeregu modułów wykorzystaj rozbieżność szeregu harmonicznego i nierówność $1 < \sqrt[n]{2}$,
(b) zbieżny warunkowo. *Wskazówka:* do pokazania zbieżności zastosować kryterium Leibniza, a do pokazania rozbieżności szeregu modułów wykorzystaj rozbieżność szeregu harmonicznego i oszacowanie $x < \operatorname{tg} x$ dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$, (c) zbieżny bezwzględnie, (d) rozbieżny, (e) rozbieżny do ∞.

16.4 Szeregi potęgowe

16.4.1. (a) $(-4, 0)$, (b) $(-6, 6)$, (c) $\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right]$, (d) $(-4, 0]$, (e) $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$.

16.4.2. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{4^{n-1}} x^n, (-4, 4), c_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n = 0 \\ \frac{-1}{4^{n-1}} & \text{dla } n \in \mathbb{N}_+, \end{cases}$

(b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{8 \cdot 16^k} x^{4k+1}, (-2, 2), c_n = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{4}}}{2^{n+2}} & \text{dla } n = 4k+1, k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{dla pozostałych } n \in \mathbb{N}, \end{cases}$

(c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{k4^k} x^{2k+3}, (-2, 2), c_n = \begin{cases} \frac{-1}{(n-3)2^{n-4}} & \text{dla } n = 2k+3, k \in \mathbb{N}_+ \\ 0 & \text{dla pozostałych } n \in \mathbb{N}, \end{cases}$

(d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-5)^k}{k!} x^{3k+2}, \mathbb{R}, c_n = \begin{cases} \frac{(-5)^{\frac{n-2}{3}}}{\frac{n-2}{3}!} & \text{dla } n = 3k+2, k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{dla pozostałych } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

16.4.3. (a) -48, (b) 0, (c) 1920.

16.4.4. (a) $\frac{33}{4}$, (b) 6, (c) $5 - 25 \ln \frac{6}{5}$, (d) $\frac{16}{9} - \frac{7}{3} \ln 2$.

16.5 Podstawowe własności funkcji dwóch i trzech zmiennych

16.5.1. (a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 3\}$ (płaszczyzna bez okręgu); szukaną poziomicą jest okrąg o środku w $(0, 0)$ i promieniu 2, pozostałymi poziomicami są okręgi o środku w $(0, 0)$ i promieniach $\varrho \in [0, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$,

(b) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \neq \frac{1}{2}\}$ (przestrzeń $\mathbb{R}^3$ bez sfery); szukaną poziomicą jest sfera o środku w $(0, 0, 0)$ i promieniu 1, pozostałymi poziomicami są sfery o środku w $(0, 0, 0)$ i promieniach $\varrho \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$.

16.5.2. $\frac{1}{4}$.

16.5.3. (a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq x^2\} \cup \{(1, 1)\}$ – funkcja jest ciągła poza parabolą $y = x^2$ i dodatkowo jest ciągła w punkcie $(1, 1)$,

(b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |xy| \neq 1\} \cup \left\{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{4}{\pi}\right), \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{4}{\pi}\right)\right\}$ – funkcja jest ciągła poza hiperbolami $y = \frac{1}{x}, y = -\frac{1}{x}$ i dodatkowo jest ciągła w punktach $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{4}{\pi}\right), \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{4}{\pi}\right)$,

(c) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = |y - x| \neq \frac{\pi}{4}\right\} \cup \left\{\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$ – funkcja jest ciągła poza prostymi $y = x - \frac{\pi}{4}, y = x + \frac{\pi}{4}$ i dodatkowo jest ciągła w punktach $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

(d) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \neq 25\}$ – funkcja jest ciągła poza sferą $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

16.6 Podstawy rachunku różniczkowego funkcji dwóch i trzech zmiennych

16.6.1. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\pi, 1) = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\pi, 1) = -\frac{21}{4}\pi, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\pi, 1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\pi, 1) = -\frac{7}{2}$.

16.6.2. $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial z \partial y}(7, 1, 0) = -4$.

16.6.3. (a) $z - 1 = 4x + 4\sqrt{\pi}\left(y - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$, (b) $z - 2 = \frac{1}{\mathrm{e}^2}x + \frac{2}{\mathrm{e}}(y - \mathrm{e})$, (c) $z - \frac{3}{2\pi} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi^2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{\pi\sqrt{\mathrm{e}}}(y - \sqrt{\mathrm{e}})$,

(d) $z - 1 = -4 \ln 3(x - 1) + \ln 3(y - 4)$, (e) $z - \pi = 8\left(x - \frac{1}{4}\right) + 2\sqrt{2}(y - \sqrt{2})$.

16.6.4. (a) $\mathrm{grad} f\,(P_0) = \left(\frac{\ln 2}{\sqrt{\mathrm{e}}}, -\frac{\ln 2}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)$, (b) $\mathrm{grad} f\,(P_0) = \left(\frac{2}{3}, \frac{3\pi}{64}, \frac{1}{2}\right)$.

16.6.5. (a) $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(P_0) = 3$, (b) $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(P_0) = \frac{1}{2}$.

16.6.6. (a) $0,997$, (b) $0,01$. *Wskazówka:* rozważ funkcję $f(x, y) = \operatorname{arc\,tg} \frac{x + y^2}{1 - xy}$.

16.6.7. $\Delta_f \approx 24\ \mathrm{mm}^2$.

16.7 Ekstrema funkcji dwóch zmiennych

16.7.1. (a) $f(1,2)=8$ – maksimum lokalne właściwe, $f(-1,2)=-8$ – minimum lokalne właściwe,

(b) $f(0,0)=0$ – minimum lokalne właściwe (i najmniejsza wartość funkcji),

(c) $f(0,0)=0$ – minimum lokalne właściwe.

Wskazówka: dla punktu $P_0=(1,1)$ zauważ, że $\dfrac{\partial f^2}{\partial x^2}(P_0)=0$, $\dfrac{\partial f^3}{\partial x^3}(P_0)\neq 0$,

(d) $f(1,1)=2-n$ – minimum lokalne właściwe. dla dla n parzystych przyjmowane także w punkcie $(-1,-1)$.

16.7.2. (a) $M=0, m=-\dfrac{9}{4}$, (b) $M=0, m=-\dfrac{2}{\mathrm{e}}$, (c) $M=\dfrac{9}{4}, m=0$, (d) $M=6, m=-6$.

16.7.3. (a) Minimum lokalne (i jednocześnie najmniejsza wartość) $m=-2$ w punkcie $(-1,-2)$,

(b) minima lokalne właściwe (i najmniejsza wartość funkcji) równe 1 w punktach $(1,1)$ i $(-1,-1)$.

16.8 Ogólne własności całek podwójnych

16.8.1. (a) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_{2-x}^{2} f(x,y)\,dy + \int_1^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{2} f(x,y)\,dy$, (b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} dy \int_{-1}^{-\sqrt{|y|}} f(x,y)\,dx + \int_{-1}^{1} dy \int_{\sqrt{|y|}}^{1} f(x,y)\,dx$.

16.8.2. (a) $\dfrac{25}{6}$, (b) $2\ln 2-\dfrac{7}{12}$, (c) $\dfrac{21}{2}-10\ln 5+10\ln 2$, (d) $\mathrm{e}-1-\ln 2$, (e) $1-\dfrac{\pi}{4}$, (f) $2-\dfrac{2}{\ln 3}$, (g) $\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}$.

16.8.3. (a) $\dfrac{3\sqrt{2}-4}{24}\pi+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$, (b) $\dfrac{4}{3}$.

16.9 Współrzędne biegunowe w całkach podwójnych

16.9.1. (a) $-9\sqrt{3}$, (b) $\dfrac{20}{\ln 3}\pi$, (c) $\dfrac{4}{3}\pi$.

16.9.2. (c) $\dfrac{26}{9}\pi$, (b) 20π, (c) $\dfrac{4}{3}\left(2-\sqrt{3}\right)$.

16.10 Ogólne własności całek potrójnych

16.10.1. (a) $\displaystyle\int_0^4 dz \int_{-2+\frac{1}{2}z}^{0} dy \int_0^{2+y-\frac{1}{2}z} f(x,y,z)\,dx, \int_0^4 dz \int_0^{2-\frac{1}{2}z} dx \int_{-2+x+\frac{1}{2}z}^{0} f(x,y,z)\,dy,$

(b) $\displaystyle\int_0^3 dz \int_0^{2-\frac{2}{3}z} dy \int_{-2+y+\frac{2}{3}z}^{0} f(x,y,z)\,dx, \int_0^3 dz \int_{-2+\frac{2}{3}z}^{0} dx \int_0^{2+x-\frac{2}{3}z} f(x,y,z)\,dy,$

(c) $\displaystyle\int_0^4 dz \int_0^{1-\frac{1}{4}z} dy \int_0^{1-y-\frac{1}{4}z} f(x,y,z)\,dx, \int_0^4 dz \int_0^{1-\frac{1}{4}z} dx \int_0^{1-x-\frac{1}{4}z} f(x,y,z)\,dx,$

(d) $\displaystyle\int_0^4 dz \int_0^{4-z} dy \int_{-1+\frac{1}{4}y+\frac{1}{4}z}^{0} f(x,y,z)\,dx, \int_0^4 dz \int_{-1+\frac{1}{4}z}^{0} dx \int_0^{4+4x-z} f(x,y,z)\,dy.$

16.10.2. (a) 8, (b) $\dfrac{11}{3}$.

16.11 Współrzędne walcowe

16.11.1. (a) $\frac{16}{3}\pi$, (b) $\frac{32}{3}\pi$.

16.11.2. (a) $\frac{5}{6}\pi$, (b) $\frac{\pi}{6}$.

16.12 Współrzędne sferyczne

16.12.1. (a) 9π, (b) $\frac{19\left(2-\sqrt{2}\right)}{3}\pi$.

16.12.2. $\frac{\pi}{12}$.

16.12.3. $31(2-\sqrt{3})\pi$.

16.13 Przekształcenie Laplace'a

16.13.1. (a) $F(s)=\frac{1-e^{-as}}{s}$, (b) $F(s)=\frac{1-e^{-as}}{s^2}-\frac{ae^{-as}}{s}$, (c) $F(s)=\frac{1-2e^{-as}+e^{-2as}}{s^2}$.

16.13.2. (a) $y(t)=\frac{2}{5}-2t$, (b) $y(t)=\frac{2}{7}-2t$, (c) $y(t)=e^{2t}-e^{t}$, (d) $\begin{cases} x(t)=-te^{2t} \\ y(t)=-e^{2t}+te^{2t} \end{cases}$.

16.14 Przekształcenie Fouriera

16.14.1. (a) $\hat{f}(s)=\frac{1-e^{-si}}{si}$ dla $s\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, (b) $\hat{f}(s)=\frac{2\sin s}{s}$ dla $s\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

16.15 Przykładowe egzaminy

16.15.1 Zestaw A

16.15.1. $x_0=-\frac{1}{3}$, $R=\frac{1}{21}$.

16.15.2. $f_x=2\cos(2x-y), f_y=-\cos(2x-y)$, $f(\pi,\pi//3)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $f_x\left(\pi,\frac{pi}{3}\right)=1, f_y\left(\pi,\frac{\pi}{3}\right)=-0,5$,

$z+\frac{\sqrt{3}}{2}=x-\pi-\frac{1}{2}\left(y-\frac{\pi}{3}\right)$.

16.15.3. $f_x=4x^3+4, f_y=4y^3-32$, $f_x(-1,2)=f_y(-1,2)=0$, więc warunek konieczny spełniony,

$W(x,y)=\begin{vmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{vmatrix}, W(-1,2)>0$, zatem ekstremum,

$f_{xx}(-1,2)>0$, więc minimum lokalne właściwe $f(-1,2)=-51$.

16.15.4. $I=\int\limits_{-\ln 2}^{0} dx \int\limits_{e^{-x}}^{2} f(x,y)\,dy$.

16.15.5. $M=\int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{2} d\varrho \int\limits_{\varrho^2//2}^{2} \varrho^3 dz=2\pi\left(\frac{2\cdot 2^4}{4}-\frac{2^6}{2\cdot 6}\right)=\frac{16}{3}\pi$.

16.15.6. $F(s)=\int\limits_{1}^{2} e^{-st}dt=-\frac{e^{-2s}-e^{-s}}{s}\left(=\frac{e^{s}-1}{se^{2s}}\right)$.

16.15.2 Zestaw B

16.15.1. $\dfrac{n^2+n+1}{n^4+1} \sim \dfrac{1}{n^2}$, szereg zbieżny bezwzględnie.

16.15.2. $f_x = \dfrac{-1}{\cos^2(-x+2y)}, f_y = \dfrac{2}{\cos^2(-x+2y)}$, $f_x\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{4}{3}, f_y\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{8}{3}$, $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\right) = -2\sqrt{2}$.

16.15.3. Brak punktów krytycznych. Przy $x=0$: $f_1(y)=y$, największa wartość $M_1=1$, najmniejsza $m_1=0$. Przy $y=0$: $f_2(x)=x^3+x$, największa wartość $M_2=2$, najmniejsza $m_2=0$. Przy $y=-x+1$: $f_3(x)=x^3+1$, największa wartość $M_3=2$, najmniejsza $m_3=0$. Razem: największa wartość $M=2$, najmniejsza $m=0$.

16.15.4. $I = \int\limits_0^{\pi//2} dx \int\limits_{\sin x}^{1} f(x,y)\ dy.$

16.15.5. $M = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\pi//4}^{\pi//2} d\psi \int\limits_0^2 r^4 \cos\psi dr = 2\pi\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\dfrac{2^5}{5}\ \left(=\dfrac{32}{5}(2-\sqrt{2})\pi\right).$

16.15.6. $F(s) = \int\limits_1^3 e^{(1-s)t}dt = \dfrac{e^{3(1-s)}-e^{1-s}}{1-s}.$

16.15.3 Zestaw C

16.15.1. $x_0 = -\dfrac{1}{2}, R=2.$

16.15.2. $f_x = -\sin(x-3y), f_y = 3\sin(x-3y)$, $f\left(\dfrac{\pi}{4},\pi\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $f_x\left(\dfrac{\pi}{4},\pi\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, f_y\left(\dfrac{\pi}{4},\pi\right) = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$, $z+\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}(y-\pi)$.

16.15.3. $f_x = 3x^2+6x-2y, f_y = -2x+10y-12y^2$, $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, więc warunek konieczny spełniony, $W(x,y) = \begin{vmatrix} 6x+6 & 0-2 \\ -2 & 10-24y \end{vmatrix}, W(0,0) = 56 > 0$, więc jest ekstremum, $f_{xx}(0,0) > 0$, więc minimum lokalne właściwe $f(0,0)=0$.

16.15.4. $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{-e}^{-e^x} f(x,y)\ dy.$

16.15.5. $M = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 d\varrho \int\limits_{\varrho}^{2} \varrho^2 dz = \dfrac{2\pi}{3}\int\limits_0^2 (2\varrho^2-\varrho^3)d\varrho = 2\pi\left(\dfrac{16}{3}-4\right) = \dfrac{8}{3}\pi.$

16.15.6. $F(s) = 2\int\limits_2^3 e^{-st}dt = -2\dfrac{e^{-3s}-e^{-2s}}{s} = 2\dfrac{e^s-1}{se^{3s}}.$

16.15.4 Zestaw D

16.15.1. $a_n \sim \dfrac{1}{n}$, szereg rozbieżny.

16.15.2. $f_x = \dfrac{-1}{1+(-x+y)^2)}, f_y = \dfrac{-1}{1+(-x+y)^2)}$, $f_x(1,2) = -\dfrac{1}{2}, f_y(1,2) = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,2) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

16.15.3. Brak punktów krytycznych. Przy $y=0$: $f_1(x)=x$, największa wartość $M_1=0$, najmniejsza $m_1=-1$. Przy $x=0$: $f_2(y)=y^3+y$, największa wartość $M_2=2$, najmniejsza $m_2=0$. Przy $y=x+1$: $f_3(y)=y^3+2y-1$, największa wartość $M_3=2$, najmniejsza $m_3=-1$. Razem: największa wartość $M=2$, najmniejsza $m=-1$.

16.15.4. $I = \int\limits_{0}^{\pi//2} dx \int\limits_{\cos x}^{1} f(x,y)\ dy.$

16.15.5. $M = \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\pi//3}^{\pi//2} d\psi \int\limits_{0}^{1} r^3 \cos\psi dr = 2\pi \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \pi.$

16.15.6. $F(s) = \int\limits_{1}^{4} e^{(2-s)t} dt = \frac{e^{4(2-s)} - e^{2-s}}{2-s}.$