

Zadania z matematyki, z rozwiązaniami lub odpowiedziami

dla osób z zagranicy, przygotowujących się do studiów w Polsce

Problems in mathematics, with solutions or answers

for foreigners

Ejercicios de matemáticas, con soluciones o respuestas

para extranjeros

Maciej Burnecki

Spis treści

I Zadania

Problems

Ejercicios

1

II Rozwiązania, odpowiedzi

Solutions, answers

Soluciones, respuestas

5

Część I

Zadania

Problems

Ejercicios

- 150% liczby x wynosi 12. Oblicz x .
150% of the number x is equal to 12. Find x .
150% del número x es 12. Hallar x .
- Oblicz pole powierzchni bocznej walca o promieniu podstawy $r = 4$ i wysokości $H = 2$.
Find the area of the lateral surface of the cylinder if the radius of the base $r = 4$ and the height $H = 2$.

Hallar la área de la superficie lateral del cilindro si el radio de la basa $r = 4$ y la altitud $H = 2$.

3. Rozwiąż równanie

Solve the equation

Resolver la ecuación

$$|x - 1| - |x - 3| = 0.$$

4. Usuń niewymierności z mianownika w liczbie

Remove the roots from the denominator

Eliminar las raíces del denominador en el número

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{5} + 1}.$$

5. Rozwiąż równanie

Solve the equation

Resolver la ecuación

$$\log(2^x) + \log(5^x) + \ln \left[(\sqrt{e})^{(x^2)} \right] = 0.$$

6. Długość d przekątnej sześcianu wynosi $d = 5\sqrt{3}$. Oblicz objętość tego sześcianu.

Find the volume of the cube if the diagonal of the cube $d = 5\sqrt{3}$.

7. Naskicuj wykres funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, określonej wzorem

$$f(x) = |4 - |3x + 4||.$$

Dokładnie zaznacz (podaj współrzędne) ekstrema i miejsca zerowe.

Sketch the graph of the function $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |4 - |3x + 4||$. Mark the extreme points and zeros of the function.

8. Rozwiąż nierówność

Solve the inequality

Resolver

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x - 3\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 8 < 0.$$

9. Rozwiąż nierówność

Solve the inequality

Resolver

$$-2\sin^2(x) - \cos(x) + 1 < 0.$$

Wyniki podaj w mierze łukowej.

The results should be given in the arc measure.

10. Udowodnij równość

Prove the equation

Demostrar

$$\frac{\operatorname{tg}(x) + \operatorname{ctg}(x)}{2} = \frac{1}{\sin(2x)}.$$

11. Oblicz

Calculate

Calcular

$$\log_7 \frac{4^{-\frac{1}{2}} \cdot 10^{-1} \cdot 120}{9^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{2}}}.$$

12. Wyznacz wzór oraz naszkicuj wykres funkcji liniowej, która przechodzi przez punkt $A = (1, 2)$ i jest równoległa do prostej $y = -x + 254$.

Find the formula and sketch the graph of the linear function which includes the point $A = (1, 2)$ and is parallel to the line $y = -x + 254$.

13. Rozwiąż równanie

Solve the equality

Resolver

$$|x + 4| + |x + 5| = 3.$$

14. Rozwiąż następujący układ równań:

Solve the following system of linear equations:

Resolver

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - z = 4 \\ y - 3z = 4. \end{cases}$$

15. Rozwiąż nierówność

Solve the inequality

Resolver

$$(x + 4) \cdot (x^2 + 5x + 7) \geq (x + 3) \cdot (x + 1)^2 + 3x^2 + 10x + 16.$$

16. Naszkicuj wykres funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, określonej wzorem

$$f(x) = |x^2 + 4x + 3|.$$

Dokładnie zaznacz (podaj współrzędne) ekstrema i miejsca zerowe.

Sketch the graph of the function $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 + 4x + 3|$. Mark the extreme points and zeros.

17. Rozwiąż nierówność

Solve the inequality

Resolver

$$|\sin(x)| > \frac{1}{2}.$$

Wyniki podaj w mierze łukowej.

The results should be given in the arc measure.

18. Udowodnij równość

Prove the equation

Demostrar

$$\sin(2x) = \operatorname{tg}(x) \cdot [1 + \cos(2x)].$$

19. Długość tworzącej stożka wynosi $l = 5$, a promień podstawy $r = 4$. Oblicz wysokość, a następnie objętość tego stożka.

The slant height l of a cone $l = 5$ and the radius of its base $r = 4$. Find the height and the volume of the cone.

20. Narysuj wykres funkcji $f(x) = |2 - |2x - 8||$. Dokładnie zaznacz (podaj wartości) ekstremum i miejsca zerowe.

Sketch the graph of the function $f(x) = |2 - |2x - 8||$. Mark the extreme points and zeros.

21. Rozwiąż układ równań

Solve

Resolver

$$\begin{cases} -x + 2y - 2z = 4 \\ -x - y + 4z = -2 \\ -x + 3y = 4. \end{cases}$$

22. Rozwiąż równanie

Solve

Resolver

$$\sin^2(2x) - 2 \cos^2(2x) \sin(2x) - 1 = 0.$$

Wyniki podaj w mierze łukowej.

The results should be given in the arc measure.

23. Wyznacz dziedzinę naturalną funkcji

Find the natural domain of the function

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x} - 1} + (x+2) \ln(5 - x^2 - 4x).$$

24. Długość d przekątnej sześcianu wynosi $d = 6$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego sześcianu.

Find the surface area of the cube if the diagonal of the cube $d = 6$.

25. Naskicuj wykres funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, określonej wzorem $f(x) = |x^2 - 1| - 1$. Dokładnie zaznacz (podaj współrzędne) ekstrema i punkty przecięcia z osiami współrzędnych.

Sketch the graph of the function $f(x) = |x^2 - 1| - 1$. Mark the extreme points and zeros.

26. Rozwiąż układ równań

Solve

Resolver

$$\begin{cases} \frac{x+y}{4} - \frac{x-2y}{6} = \frac{4}{3} \\ \frac{3x+2}{8} - \frac{x+y}{6} = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

27. Rozwiąż nierówność

Solve

Resolver

$$\log_7(x+2) \geq \log_7(2-x).$$

28. Rozwiąż nierówność

Solve

Resolver

$$|\operatorname{tg}(x)| > \sqrt{3}.$$

Wyniki podaj w mierze łukowej.

The results should be given in the arc measure.

29. Czy jest prawem rachunku zdań (tautologią) wyrażenie

Is the following formula a tautology:

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow p?$$

Odpowiedź uzasadnij, wypełniając odpowiednią tabelkę.

Fill the proper table.

30. Rozwiąż równania

Solve

Resolver

$$9^x - 4 \cdot 3^{x+1} + 27 = 0.$$

31. Rozwiąż nierówność

Solve

Resolver

$$\log_{100}(1-2x) > 0.$$

Część II

Rozwiązania, odpowiedzi

Solutions, answers

Soluciones, respuestas

1. $1,5 \cdot x = 12, x = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8.$

2. $P = 2\pi rH = 16\pi.$

3. $|x - 1| - |x - 3| = 0 \Leftrightarrow |x - 1| = |x - 3| \Leftrightarrow x - 1 = x - 3 \vee x - 1 = -(x - 3)$
 $\Leftrightarrow -1 = -3$ (niemożliwe) (impossible) $\vee 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2.$

4. Stosujemy wzór
We apply the formula

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Podstawiam
We put

$$a = \sqrt[3]{5}, b = 1$$

i otrzymujemy
and we obtain

$$(\sqrt[3]{5})^3 - 1^3 = 5 - 1 = 4 = (\sqrt[3]{5} - 1) \cdot ((\sqrt[3]{5})^2 + \sqrt[3]{5} \cdot 1 + 1^2) = (\sqrt[3]{5} - 1) \cdot (\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{5} + 1).$$

Na koniec,
Finally

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{5} + 1} \cdot \frac{\sqrt[3]{5} - 1}{\sqrt[3]{5} - 1} = \frac{\sqrt[3]{5} - 1}{4}.$$

5. Proszę pamiętać, że
Remember

$$\log(b) = \log_{10}(b), \ln(b) = \log_e(b).$$

Przekształcamy
We calculate

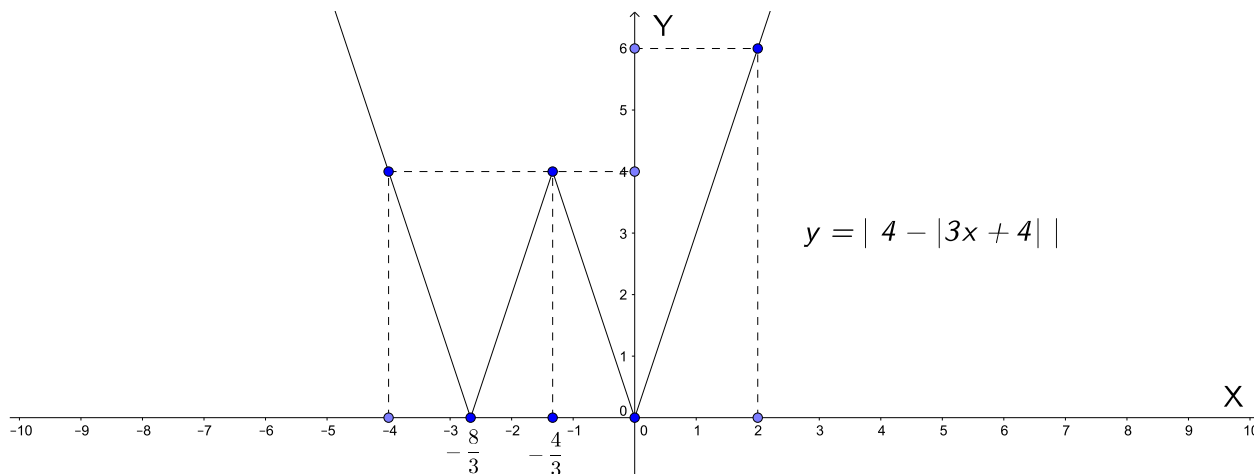
$$\begin{aligned} \log(2^x) + \log(5^x) + \ln \left[(\sqrt{e})^{(x^2)} \right] &= x \log(2) + x \log(5) + x^2 \cdot \ln \left[(\sqrt{e}) \right] \\ &= x(\log(2) + \log(5)) + x^2 \cdot \ln \left(e^{\frac{1}{2}} \right) = x \log(10) + \frac{1}{2} x^2 \cdot \ln(e) = x + \frac{1}{2} x^2 = x \left(1 + \frac{1}{2} x \right) = 0. \end{aligned}$$

Na koniec,

Finally $x = 0 \vee x = -2$.

6. $V = 125$.

7.



8. $-2 < x < -1$.

9. $x \in \left(2k\pi, \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \right) \cup \left(\frac{4}{3}\pi + 2k\pi, (2k + 2)\pi \right), k \in \mathbb{Z}$.

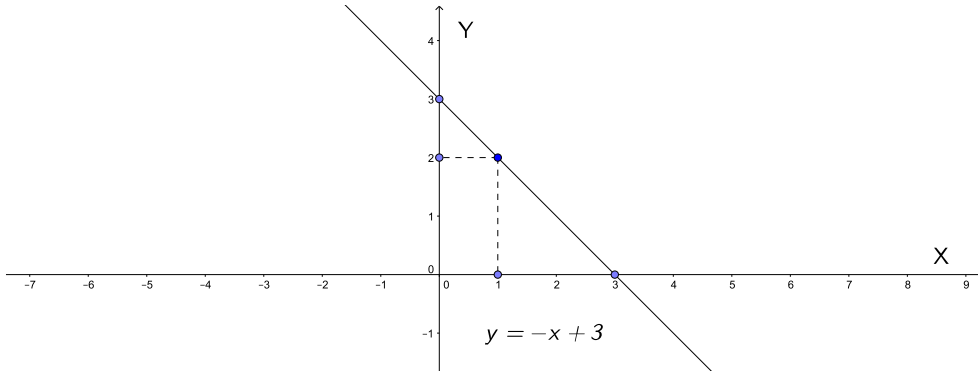
10. Można wykorzystać równości

It is useful to apply the following equalities:

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \operatorname{ctg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}, \sin(2x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x), \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

11. 0.

12.

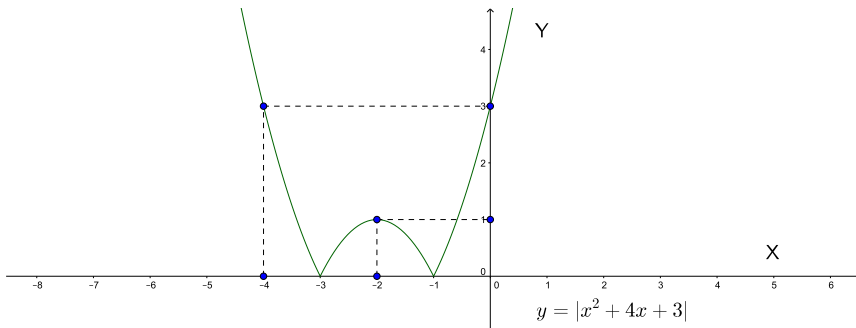


13. $x = -6 \vee x = -3$.

14. $x = 2, y = z = -2$.

15. $x \in (-\infty, -9] \cup [-1, \infty)$.

16.



17. $x \in \left(\frac{1}{6}\pi + k\pi, \frac{5}{6}\pi + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

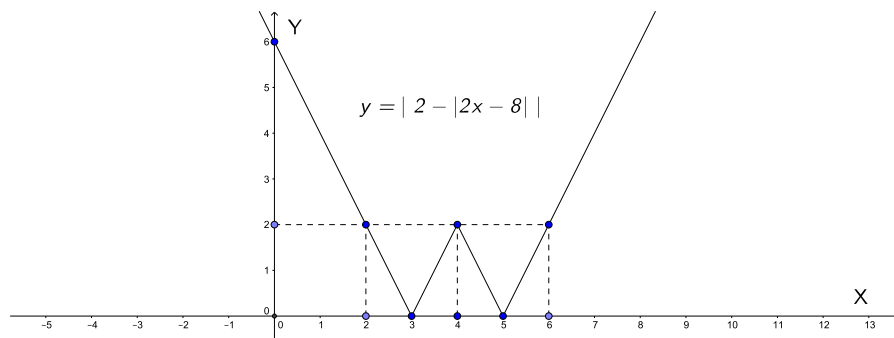
18. Można wykorzystać równości

We can apply the following formulas:

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x), \operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1.$$

19. $h = 3, V = 16\pi$.

20.



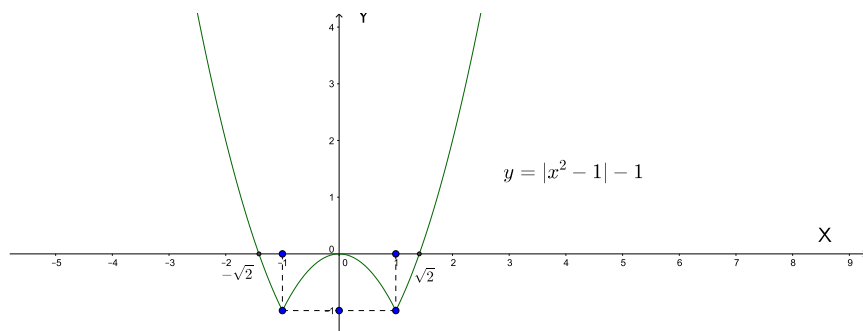
21. $x = -1, y = 1, z = -\frac{1}{2}$.

22. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \vee x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{11\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

23. $D_f = (-5, -1] \cup (0, 1)$.

24. $S = 72$.

25.



26. $x = 2, y = 2$.

27. $x \in [0, 2)$.

28. $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{3} + k\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

29. Nie.

No.

No.

30. $x \in \{1, 2\}$.

31. $x \in (-\infty, 0)$.