Równania różniczkowe zwyczajne

zadania podstawowe, z odpowiedziami

Maciej Burnecki

pełne listy

Spis treści

Uwaga: poniżej stosowane są pełne oznaczenia, na przykład na wartości funkcji: $y(t), x(t)$, jednak przy rozwiązywaniu zadań, ze względu na długość obliczeń, lepiej pisać mniej formalnie: x, y, a także wprowadzać inne, skrótowe oznaczenia.

1 Równania pierwszego rzędu

1.1 o rozdzielonych zmiennych

1. Napełniony, stulitrowy zbiornik zawiera wodny roztwór soli o stężeniu masowo-objętościowym $0,1\%$ m/v. Do zbiornika jedną rurką wpływa czysta woda z prędkością 5 litrów na minutę, a drugą wypływa mieszanina z tą samą prędkością. Wyznacz ilość soli w zbiorniku w zależności od czasu. Przyjmij, że proces mieszania cieczy i rozpuszczania soli jest natychmiastowy.
   Uwaga: stężenie masowo-objętościowe $p\,\%$ m/v oznacza, że w 100 ml płynu znajduje się p gram danej substancji.

2. Napełniony, czterystulitrowy zbiornik zawiera wodny roztwór soli o stężeniu masowo-objętościowym $0,5\%$ m/v. Do zbiornika jedną rurką wpływa czysta woda z prędkością 10 litrów na minutę, a drugą wypływa mieszanina z prędkością 20 litrów na minutę. Wyznacz ilość soli w zbiorniku w zależności od czasu. Przyjmij, że proces mieszania cieczy i rozpuszczania soli jest natychmiastowy.

3. Rozwiąż zagadnienie początkowe

(a) $y'(t)+y^2(t)\operatorname{ctg}(t)=0, y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,$ (b) $(1+t)y'(t)-1-y^2(t)=0, y\,(0)=0,$

(c) $e^t y'(t)=(y(t)+1)^2, y(0)=0,$ (d) $y'(t)-\frac{\cos(t)}{\sin(y(t))}=0, y\,(0)=\frac{\pi}{2},$

1.2 liniowe

1. Dwoma sposobami, za pomocą czynnika całkującego oraz przez uzmiennianie stałej, rozwiąż równanie

(a) $y'(t)+5y(t)=t,$ (b) $y'(t)+ty(t)=t,$ (c) $y'(t)+2y(t)=\cos(t).$

2. Rozwiąż zagadnienie początkowe

(a) $t\,dy+(y(t)-te^t)\,dt=0, y(1)=1,$ (b) $\operatorname{tg}t\,dy+\left(\frac{y(t)}{\cos^2(t)}+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=0, y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\ln\sqrt{\frac{4+\pi}{4-\pi}}\,.$

2 Równania liniowe dowolnych rzędów

1. Metodą uzmienniania stałych rozwiąż równanie

(a) $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=e^{-t},$ (b) $y''(t)+6y'(t)+8y(t)=16t^2.$

2. Metodą uzmienniania stałych rozwiąż zagadnienie początkowe

(a) $y''(t)+y'(t)-2y(t)=3\mathrm{e}^{2t}, y(0)=\frac{3}{4}, y'(0)=\frac{9}{2},$ (b) $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=-\mathrm{e}^{-t}, y(0)=\frac{7}{2}, y'(0)=-\frac{17}{2}.$

3. Metodą współczynników nieoznaczonych rozwiąż równanie

(a) $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=\mathrm{e}^t,$ (b) $y''(t)+4y'(t)+3y(t)=\mathrm{e}^{-3t},$

(c) $y''(t)-4y'(t)+4y(t)=2\mathrm{e}^{2t},$ (d) $y''(t)-4y'(t)-5y(t)=t-\sin t.$

4. Metodą współczynników nieoznaczonych rozwiąż zagadnienie początkowe

(a) $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=6t^2+16t+13,$ jeśli $y(0)=4, y'(0)=-7,$

(b) $y''(t)-y'(t)-2y(t)=2\cos(t)\ +\ 4\sin(t),$ jeśli $y(0)=3, y'(0)=3.$

3 Układy równań liniowych

3.1 jednorodnych

1. Metodami Eulera i eliminacji rozwiąż układ

(a) $\begin{cases} x'(t)=2x(t)+y(t)\\ y'(t)=3x(t)+4y(t). \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x'(t)=-x(t)+\frac{1}{2}y(t)\\ y'(t)=4x(t), \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x'(t)=x(t)+y(t)\\ y'(t)=-2x(t)+4y(t), \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x'(t)=7x(t)+2y(t)\\ y'(t)=-17x(t)-3y(t). \end{cases}$

3.2 niejednorodnych

2. Metodami: Eulera z następującym uzmiennianiem stałych oraz eliminacji rozwiąż układ

(a) $\begin{cases} x'(t)=-y(t)-e^{-t}\\ y'(t)=6x(t)-5y(t)-6e^{-t}, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x'(t)=x(t)-y(t)+\sin(t)+\cos(t)\\ y'(t)=2x(t)-y(t)+2\sin(t), \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x'(t)=-x(t)+y(t)\\ y'(t)=2x(t)+4, \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x'(t)=x(t)+y(t)+3\\ y'(t)=2x(t)-2t-1, \end{cases}$

4 Przekształcenie Laplace'a

1. Za pomocą transformacji Laplace'a rozwiąż zagadnienie początkowe

   (a) $y'(t)+7y(t)=-14t,\ y(0)=\dfrac{2}{7}$, (b) $y'(t)+5y(t)=6+5t,\ y(0)=2$,

   (c) $y''(t)-8y'(t)+7y(t)=-5e^{2t},\ y(0)=3,\ y'(0)=10$, (d) $y''(t)+y'(t)-2y(t)=2e^{2t},\ y(0)=0,\ y'(0)=\dfrac{1}{2}$,

   (e) $\begin{cases} x'(t)=4x(t)+y(t) \\ y'(t)=-x(t)+6y(t), \end{cases} \begin{cases} x(0)=0 \\ y(0)=1, \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x'(t)=3x(t)-\frac{1}{2}y(t) \\ y'(t)=2x(t)+y(t), \end{cases} \begin{cases} x(0)=0 \\ y(0)=-1. \end{cases}$

5 Odpowiedzi, wskazówki

5.1 Równania pierwszego rzędu

5.1.1 o rozdzielonych zmiennych

1. $y(t)=0,1e^{-0,05t}$ kg.

2. $y(t)=\dfrac{(t-40)^2}{800}$ kg.

3. (a) $y(t)=\dfrac{1}{1+\ln\sin(t)}$ (b) $y(t)=\mathrm{tg}\left(\ln(t+1)\right)$, (c) $y(t)=-1+e^t$, (d) $y(t)=\dfrac{\pi}{2}+t$.

5.1.2 liniowe

1. (a) $y(t)=\dfrac{1}{5}t-\dfrac{1}{25}+Ce^{-5t}$, (b) $y(t)=1+Ce^{-\frac{1}{2}t^2}$, (c) $y(t)=\dfrac{2\cos(t)}{5}+\dfrac{\sin(t)}{5}+Ce^{-2t}$.

2. (a) $y(t)=e^t-\dfrac{e^t}{t}+\dfrac{1}{t}$. (b) $y(t)=\mathrm{ctg}(t)\ \ln\sqrt{\dfrac{1+t}{1-t}}$.

5.2 Równania liniowe dowolnych rzędów

1. (a) $y(t)=te^{-t}+Ce^{-t}+De^{-2t}$, (b) $y(t)=2t^2-3t+\dfrac{7}{4}+Ce^{-2t}+De^{-4t}$.

2. (a) $y(t)=0,75e^{2t}+e^t-e^{-2t}$, (b) $y(t)=-0,5e^{-t}+3e^{-2t}+e^{-3t}$.

3. (a) $y(t)=\dfrac{1}{6}e^t+Ce^{-t}+De^{-2t}$, (b) $y(t)=-\dfrac{1}{2}te^{-3t}+Ce^{-t}+De^{-3t}$,

   (c) $y(t)=t^2e^{2t}+Ce^{2t}+Dte^{2t}$, (d) $y(t)=-\dfrac{t}{5}+\dfrac{4}{25}-\dfrac{1}{13}\cos(t)+\dfrac{3}{26}\sin(t)+C_1e^{-t}+C_2e^{5t}$.

4. (a) $y(t)=t^2+t+1+e^{-2t}+2e^{-3t}$, (b) $y(t)=-\dfrac{1}{5}\cos(t)-\dfrac{7}{5}\sin(t)+\dfrac{38}{15}e^{2t}+\dfrac{2}{3}e^{-t}$.

5.3 Układy równań liniowych

5.3.1 jednorodnych

1. (a) Wartościami własnymi są $1,5$, odpowiadają im przykłady wektorów własnych $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$,

   co daje rozwiązanie $\begin{cases} x(t)=Ce^t+De^{5t} \\ y(t)=-Ce^t+3De^{5t}, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x(t)=Ce^{-2t}+De^t \\ y(t)=-2Ce^{-2t}+4De^t, \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} x(t)=Ce^{2t}+De^{3t}, \\ y(t)=Ce^{2t}+2De^{3t}, \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x(t)=e^{2t}\left[C\cos(3t)+D\sin(3t)\right], \\ y(t)=e^{2t}\left[\left(-\frac{5}{2}C+\frac{3}{2}D\right)\cos(3t)+\left(-\frac{3}{2}C-\frac{5}{2}D\right)\sin(3t)\right]. \end{cases}$

5.3.2 niejednorodnych

2. (a) $\begin{cases} x(t) = e^{-t} + Ce^{-2t} + De^{-3t} \\ y(t) = 2Ce^{-2t} + 3De^{-3t}, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x(t) = t(\cos(t) + \sin(t)) + C\cos(t) + D\sin(t) \\ y(t) = 2t\sin(t) + (C-D)\cos(t) + (C+D)\sin(t), \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} x(t) = -2 + Ce^{t} + De^{-2t} \\ y(t) = -2 + 2Ce^{t} - De^{-2t}, \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x(t) = t + Ce^{2t} + De^{-t} \\ y(t) = -2 - t + Ce^{2t} - 2De^{-t}, \end{cases}$

5.4 Przekształcenie Laplace'a

1. (a) $y(t) = \dfrac{2}{7} - 2t$, (b) $y(t) = e^{-5t} + t + 1$, (c) $y(t) = e^{t} + e^{7t} + e^{2t}$, (d) $y(t) = \dfrac{1}{2}e^{2t} - \dfrac{1}{2}e^{t}$,

   (e) $\begin{cases} x(t) = te^{5t}, \\ y(t) = e^{5t} + te^{5t} \end{cases}$, (f) $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}te^{2t} \\ y(t) = -e^{2t} + te^{2t}. \end{cases}$