Geometria analityczna – zadania

1. Niech $A = (7, -2)$, $B = (3, 1)$. Wyznacz wektor $\overrightarrow{AB}$ i narysuj ten wektor w układzie współrzędnych.

2. Niech $B = (2, 1)$, $\overrightarrow{AB} = [4, 6]$. Oblicz A.

3. Dla jakiej wartości parametru p wektory $\vec{u} = [1, 4]$ i $\vec{v} = [6, p]$ są równoległe?

4. Wyznacz współrzędne środka odcinka AB, jeśli $A = (-1, 2)$, $B = (9, 14)$.

5. Punkt $S = (2, 5)$ jest środkiem odcinka AB, w którym $A = (4, 8)$. Wyznacz współrzędne punktu B.

6. Niech $A = (3, 4)$, $B = (10, 18)$. Na odcinku AB wyznacz taki punkt P, że $AP: PB = 2: 5$.

7. Dane są dwa wierzchołki $A = (-3, 5), B = (-2, -1)$ równoległoboku $ABCD$ i punkt przecięcia jego przekątnych $P = (3, 1)$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków równoległoboku i narysuj ten równoległobok w układzie współrzędnych.

8. Oblicz współrzędne punktu S przecięcia środkowych w trójkącie ABC o wierzchołkach $A = (-2, 7)$, $B = (1, 2)$ i $C = (4, 0)$.

9. W trójkącie ABC o wierzchołkach $A = (0, 0)$, $B = (1, 4)$ i $C = (-2, 7)$ oblicz długości jego boków i na tej podstawie rozstrzygnij, czy trójkąt ten jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny.

10. Oblicz cosinus kąta między wektorami $\vec{u} = [4, 8]$ i $\vec{v} = [1, -2]$.

11. Wyznacz miarę kąta między wektorami $\vec{a} = [3, 1]$ i $\vec{b} = [2, 4]$.

12. Wyznacz równanie kierunkowe prostej przechodzącej przez punkty $A = (-4, 1)$ i $B = (2, 7)$.

13. Wyznacz równanie kierunkowe prostej przechodzącej przez punkty $P = (-2, 5)$ i tworzącej kąt $60°$ z dodatnim zwrotem osi OX.

14. Dany jest trójkąt ABC o wierzchołkach $A = (-4, 3)$, $B = (4, -5)$ i $C = (8, 1)$. Wyznacz:
    a) długość środkowej AS
    b) równanie kierunkowe prostej AS
    c) współrzędne środka ciężkości trójkąta ABC.

15. Wyznacz równanie ogólne i kierunkowe prostej przechodzącej przez punkt $P = (3, 4)$ i prostopadłej do wektora $\vec{v} = [1, -2]$.

16. Wyznacz punkty przecięcia prostej $k: 2x - 3y - 18 = 0$ z osiami układu współrzędnych.

17. Dana jest prosta $l: 3x + 2y + 7 = 0$. Wyznacz równanie prostej:
    a) równoległej do l i przechodzącej przez punkt $P = (1, -4)$
    b) prostopadłej do l i przechodzącej przez punkt $Q = (5,\ 6)$.

18. Dane są punkty $A = (-1,0)$ i $B = (3,2)$. Na prostej $y = \frac{1}{3}(x + 7)$ znajdź taki punkt C, aby trójkąt ABC był prostokątny.

19. (P19, 4p) Dany jest punkt $A = (-18, 10)$. Prosta o równaniu $y = 3x$ jest symetralną odcinka AB. Wyznacz współrzędne punktu B.

20. (P18, 5p) W układzie współrzędnych punkty $A = (4, 3)$ i $B = (10, 5)$ są wierzchołkami trójkąta ABC. Wierzchołek C leży na prostej o równaniu $y = 2x + 3$. Oblicz współrzędne punktu C, dla którego kąt ABC jest prosty.

21. (R11, 4p) Oblicz miarę kąta między stycznymi do okręgu $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$, które przechodzą przez punkt $A = (2,0)$.

22. (R13, 4p) Prosta $3x - 4y - 36 = 0$ przecina okrąg o środku $S = (3,12)$ w punktach A i B. Długość odcinka AB jest równa 40. Wyznacz równanie tego okręgu.

23. (R18, 6p) Punkt $A = (7, -1)$ jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC| = |BC|$. Obie współrzędne wierzchołka C są liczbami ujemnymi. Okrąg wpisany w trójkąt ABC ma równanie $x^2 + y^2 = 10$. Oblicz współrzędne wierzchołków B i C tego trójkąta.

24. (P17, 5p) Dane są punkty $A = (-4, 0)$ i $M = (2, 9)$ oraz prosta k o równaniu $y = -2x + 10$. Wierzchołek B trójkąta ABC to punkt przecięcia prostej k z osią Ox układu współrzędnych, a wierzchołek C jest punktem przecięcia prostej k z prostą AM. Oblicz pole trójkąta ABC.

25. (R17) Dane są punkt $B = (-4,7)$ i wektor $\vec{u} = [-3,5]$. Punkt A, taki że $\overrightarrow{AB} = -3\vec{u}$, ma współrzędne
A. $A = (5, -8)$ B. $A = (-13, 22)$ C. $A = (9, -15)$ D. $A = (12, 24)$

26. (R17, 5p) Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkty $A = (-5, 3)$ i $B = (0, 6)$, którego środek leży na prostej o równaniu $x - 3y + 1 = 0$.

27. (R17, 5p) Punkty $A = (30, 32)$ i $B = (0, 8)$ są sąsiednimi wierzchołkami czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg. Prosta o równaniu $x - y + 2 = 0$ jest jedyną osią symetrii tego czworokąta. Oblicz współrzędne wierzchołków C i D tego czworokąta.

28. (R 19, 6p) Dane są okręgi $x^2 + y^2 - 12x - 8y = 0$ i $x^2 + y^2 - 2ax + 4y + a^2 - 77 = 0$. Wyznacz wszystkie wartości parametru a, dla których te okręgi mają dokładnie jeden punkt wspólny. Rozważ wszystkie przypadki.

29. (R14, 4p) Punkty A, B, C, D, E, F są kolejnymi wierzchołkami sześciokąta foremnego, przy czym $A = (0, 2\sqrt{3})$, $B = (2,0)$, a C leży na osi OX. Wyznacz równanie stycznej do okręgu opisanego na tym sześciokącie, która przechodzi przez wierzchołek E.

30. Wyznacz obraz punktu $P = (-2,1)$ przez symetrię względem prostej $l: 3x + 2y - 9 = 0$.

31. Wyznacz równania dwusiecznych kątów między prostymi $x + 2y - 3 = 0$ i $2x - y = 0$.

32. Dane są punkty $A = (0, -7)$ i $B = (6,1)$. Na paraboli $y = x^2$ znajdź taki punkt C, aby pole trójkąta ABC było równe 25.

33. Wyznacz środek i promień okręgu $x^2 + y^2 + 10x - 6y + 30 = 0$. Sporządź rysunek.

34. Napisz równanie okręgu, który przechodzi przez punkt $A = (7,8)$ i jest styczny do osi OX w punkcie $B = (3,0)$.

35. Wyznacz równanie okręgu, który przechodzi przez punkty $A = (3, -1)$ i $B = (7,1)$, a którego środek leży na prostej $y = x - 2$.

36. Wyznacz równanie stycznej (stycznych) do okręgu $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ w punkcie:
    a) (0,0); b) (3,2).

37. Wyznacz równanie prostej stycznej jednocześnie do dwóch okręgów $x^2 + y^2 = 5$ oraz $(x - 5)^2 + y^2 = 20$.

38. Sprawdź, czy odcinki AB i CD, gdzie $A = (3, 1)$, $B = (1, 3)$, $C = (3, 6)$, $A = (6, 3)$, są jednokładne. Jeśli tak, wyznacz środek i skalę tej jednokładności.

39. W trójkącie ABC dane są: wierzchołek $C = (12, 4)$ i proste $k: 4x - 5y = 0$ oraz $l: y = -2x + 14$, zawierające dwie środkowe tego trójkąta. Wyznacz współrzędne wierzchołków A i B.