Spis treści:

1. Liczby rzeczywiste. Zadania na dowodzenie

1. (V.2010) Wykaż, że jeśli $a > 0$, to $\frac{a^2+1}{a+1} \geq \frac{a+1}{2}$.

2. (VIII.2010) Wykaż, że jeśli $a > 0$ i $b > 0$ oraz $\sqrt{a^2+b} = \sqrt{a+b^2}$, to $a = b$ lub $a + b = 1$.

3. (V.2011) Uzasadnij, że jeśli $a + b = 1$ i $a^2 + b^2 = 7$, to $a^4 + b^4 = 31$.

4. (VI.2011) Uzasadnij, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ jest wielokrotnością liczby 10.

5. (V.2012) Uzasadnij, że jeśli liczby rzeczywiste a, b, c spełniają nierówności $0 < a < b < c$, to $\frac{a+b+c}{3} > \frac{a+b}{2}$.

6. (VIII.2012) Uzasadnij, że jeśli $c < 0$, to trójmian kwadratowy $y = x^2 + bx + c$ ma dwa różne miejsca zerowe.

7. (V.2013) Wykaż, że liczba $6^{100} - 2 \cdot 6^{99} + 10 \cdot 6^{98}$ jest podzielna przez 17.

8. (VIII.2013) Wykaż, że jeśli a jest liczbą rzeczywistą i $a + \frac{1}{a} = 3$, to $a^2 + \frac{1}{a^2} = 7$.

9. (VI.2014) Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwa jest nierówność $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$.

10. (VIII.2014) Wykaż, że suma sześcianów trzech kolejnych liczb naturalnych parzystych jest podzielna przez 24.

11. (V.2015) Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y prawdziwa jest nierówność $4x^2 - 8xy + 5y^2 \geq 0$.

12. (VIII.2015) Wykaż, że dla dowolnych nieujemnych liczb rzeczywistych x i y prawdziwa jest nierówność $x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2$.

13. (V.2016) Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 2n^2 + 2n$ dla $n \geq 1$. Wykaż, że suma każdych dwóch kolejnych wyrazów tego ciągu jest kwadratem liczby naturalnej.

14. (VIII.2016) Wykaż, że jeśli liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunek $abc = 1$, to $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} = ab + bc + ca$.

2. Planimetria – zadania na dowodzenie

1. (V.2011) Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$. Na boku BC wybrano taki punkt E, że $|EC| = |CD|$ i $|EB| = |BA|$. Wykaż, że kąt AED jest prosty.

2. (VI.2011) Dany jest trójkąt równoboczny ABC. M jest punktem na odcinku AC. Punkt N leży na przedłużeniu odcinka BC poza punkt C i $|AM| = |CN|$. Wykaż, że $|BM| = |MN|$.

3. (V.2012) W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczne kątów A i B. Dwusieczne te przecinają się w punkcie P. Uzasadnij, że kąt APB jest rozwarty.

4. (VIII.2012) Dany jest równoległobok $ABCD$. Na przedłużeniu przekątnej AC (poza punkt C) wybrano punkt E tak, że $|CE| = \frac{1}{2}|AC|$. Uzasadnij, że pole równoległoboku $ABCD$ jest cztery razy większe od pola trójkąta DCE.

5. (V.2014) Środek S okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym ABC o ramionach AC i BC leży wewnątrz tego trójkąta. Wykaż, że miara kata wypukłego ASB jest cztery razy większa od miary kąta wypukłego SBC.

6. (VI.2014) W trójkącie ABC spodek D wysokości CD leży pomiędzy A i B, E jest środkiem odcinka BC, ponadto $|CD| = |DE|$. Wykaż, że trójkąt CDE jest równoboczny.

7. (V.2015) Dany jest kwadrat $ABCD$. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie E. Punkty K i M są środkami odcinków – odpowiednio – AE i EC. Punkty L i N leżą na przekątnej BD tak, że $|BL| = \frac{1}{3}|BE|$, $|DN| = \frac{1}{3}|DE|$. Wykaż, że stosunek pola czworokąta $KLMN$ do pola kwadratu $ABCD$ jest równy $1:3$.

8. (V.2015) Punkty M i L leżą na okręgu o środku O. Na stycznej do tego okręgu w punkcie L wybrano taki punkt K, że środek okręgu leży na odcinku KM. Kąt LKM ma miarę 28°. Wykaż, że miara kąta KML jest równa 31°.

9. (VI.2016) Dany jest trapez prostokątny $ABCD$ o podstawach AB i CD oraz wysokości AD. Dwusieczna kąta ABC przecina ramię AD w punkcie E oraz dwusieczną kąta BCD w punkcie F. Wykaż, że w czworokącie $CDEF$ sumy miar przeciwległych kątów są sobie równe.

10. (V.2017) Dane są dwa okręgi o środkach w punktach P i R, styczne zewnętrznie w punkcie C. Prosta AB jest styczna do obu okręgów odpowiednio w punktach A i B oraz $|\sphericalangle APC| = \alpha$, $|\sphericalangle ABC| = \beta$. Wykaż, że $\alpha = 180° - 2\beta$.

11. (V.2018) Dwa okręgi są styczne zewnętrznie i każdy z nich jest styczny do obu ramion danego kąta prostego. Promień większego okręgu jest równy 2. Uzasadnij, że promień drugiego okręgu jest mniejszy od $\sqrt{2} - 1$.

3. Ciągi

1. (V.2012, 4 pkt) Ciąg $(9, x, 19)$ jest arytmetyczny, a ciąg $(x, 42, y, z)$ jest geometryczny. Oblicz x, y, z.

2. (V.2015, 5 pkt) W nieskończonym ciągu arytmetycznym (a_n), określonym dla $n \geq 1$, suma jedenastu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 187. Średnia arytmetyczna pierwszego, trzeciego i dziewiątego wyrazu tego ciągu jest równa 12. Wyrazy a_1, a_3, a_k tworzą w podanej kolejności nowy ciąg – trzywyrazowy ciąg geometryczny. Oblicz k.

3. (VI.2015, 4 pkt) Dany jest nieskończony ciąg arytmetyczny (a_n), określony dla $n \geq 1$, taki że $a_5 = 18$. Wyrazy a_1, a_3, a_{13} tego ciągu są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem pewnego ciągu geometrycznego. Wyznacz wzór na $n -$ ty wyraz ciągu (a_n).

4. (VIII.2015, 4 pkt) Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) o różnicy $r \neq 0$ i pierwszym wyrazie $a_1 = 2$. Pierwszy, drugi i czwarty wyraz tego ciągu są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego. Oblicz iloraz tego ciągu geometrycznego.

5. (VI.2016, 5 pkt) Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n), określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, w którym $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2016$ oraz $a_5 + a_6 + a_7 + \cdots + a_{12} = 2016$. Oblicz pierwszy wyraz, różnicę oraz najmniejszy dodatni wyraz ciągu (a_n).

6. (VIII.2016, 4 pkt) Ciąg arytmetyczny (a_n) określony jest wzorem $a_n = 2016 - 3n$ dla $n \geq 1$. Oblicz sumę wszystkich dodatnich wyrazów tego ciągu.

7. (VI.2018, 4 pkt) W ciągu arytmetycznym (a_n), określonym dla liczb naturalnych $n \geq 1$, wyraz szósty jest liczbą dwa razy większą od wyrazu piątego, a suma dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa $S_{10} = \frac{15}{4}$. Oblicz wyraz pierwszy oraz różnicę tego ciągu.

8. (V.2019, 4 pkt) Ciąg arytmetyczny (a_n) jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Różnicą tego ciągu jest liczba $r = -4$, a średnia arytmetyczna początkowych sześciu wyrazów tego ciągu jest równa 16.
   a) Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu.
   b) Wyznacz liczbę k, dla której $a_k = -78$.

9. (VIII.2019, 4 pkt) W ciągu arytmetycznym $(a_1, a_2, \ldots, a_{39}, a_{40})$ suma wyrazów tego ciągu o numerach parzystych jest równa 1340, a suma wyrazów ciągu o numerach nieparzystych jest równa 1400. Wyznacz ostatni wyraz tego ciągu.

10. (VI.2020, 4 pkt) Wszystkie wyrazy ciągu geometrycznego (a_n), określonego dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, są dodatnie. Wyrazy tego ciągu spełniają warunek $6a_1 - 5a_2 + a_3 = 0$. Oblicz iloraz q tego ciągu należący do przedziału $\left(2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\right)$.

4. Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa

1. (VIII.2011, 4 pkt) Ile jest wszystkich liczb pięciocyfrowych, spełniających jednocześnie następujące cztery warunki:
   a) cyfry setek, dziesiątek i jedności są parzyste,
   b) cyfra setek jest większa od cyfry dziesiątek,
   c) cyfra dziesiątek jest większa od cyfry jedności,
   d) w zapisie tej liczby nie występuje cyfra 9.

2. (VI.2012, 4 pkt) Oblicz, ile jest liczb naturalnych pięciocyfrowych, w zapisie których nie występuje 0, jest dokładnie jedna cyfra 7 i dokładnie jedna cyfra parzysta.

3. (V.2010, 4 pkt) Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że w pierwszym rzucie otrzymamy parzystą liczbę oczek i iloczyn liczb oczek w obu rzutach będzie podzielny przez 12. Wynik przedstaw w postaci ułamka nieskracalnego.

4. (V.2016, 4 pkt) Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych losujemy kolejno bez zwracania dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma wylosowanych liczb będzie równa 30. Wynik przedstaw w postaci ułamka nieskracalnego.

5. (V.2018, 4 pkt) Dane są dwa zbiory:
   $A = \{100, 200, 300, 400, 500, 600, 600, 700\}$ i $B = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$.
   Z każdego z nich losujemy jedną liczbę. . Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma wylosowanych liczb podzielna przez 3. Oblicz prawdopodobieństwo zapisz w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

6. (VI.2018, 2 pkt) Rzucamy cztery razy symetryczną monetą. Po przeprowadzonym doświadczeniu zapisujemy liczbę uzyskanych orłów (od 0 do 4) i liczbę uzyskanych reszek (również od 0 do 4). . Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że w tych czterech rzutach liczba uzyskanych orłów będzie większa niż liczba uzyskanych reszek.

7. (VIII.2018, 4 pkt) Ze zbioru $A = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ losujemy jedną liczbę a, natomiast ze zbioru $B = \{ -1, 0, 1, 2\}$ losujemy liczbę b. Te liczby są – odpowiednio – współczynnikiem kierunkowym i wyrazem wolnym funkcji liniowej $f(x) = ax + b$. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że otrzymana funkcja f jest rosnąca i ma dodatnie miejsce zerowe.

8. (VIII.2019, 2 pkt) Ze zbioru liczb naturalnych dwucyfrowych losujemy jedną liczbę. . Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosowana liczba ma w zapisie dziesiętnym nieparzystą cyfrę dziesiątek i parzystą cyfrę jedności.

9. (VI.2020, 2 pkt) Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry, która na każdej ściance ma inną liczbę oczek – od jednego do sześciu oczek. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że co najmniej jeden raz wypadnie ścianka z pięcioma oczkami.

5. Trygonometria

1. Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$. Oblicz $\cos\alpha$.

2. Kąt α jest ostry i $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

3. Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{1}{4}$. Oblicz $3 + \operatorname{tg}^2\alpha$.

4. Uzasadnij, że jeśli α jest kątem ostrym, to $\sin^4\alpha + \cos^2\alpha = \sin^2\alpha + \cos^4\alpha$.

5. Kąt α jest ostry i $\frac{4}{\sin^2\alpha} + \frac{4}{\cos^2\alpha} = 25$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

6. Kąt α jest ostry i $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \frac{3}{2}$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

7. Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{7}{2}$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

8. Kąt α jest ostry i $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}$. Oblicz wartość wyrażenia $\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$.

9. Kąt α jest ostry i spełniona jest równość $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{2}$. Oblicz wartość wyrażenia $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2$.

10. Kąt α jest ostry i $\frac{2\sin\alpha + 3\cos\alpha}{\cos\alpha} = 4$. Oblicz $\operatorname{tg}\alpha$.

6. Geometria analityczna

1. Dane są punkty $A = (-43, -12)$ i $B = (50, 19)$. Prosta AB przecina oś OX w punkcie P. Oblicz współrzędne punktu P.

2. Punkty $A = (2, 11), B = (8, 23), C = (6, 14)$ są wierzchołkami trójkąta. Wysokość trójkąta poprowadzona z wierzchołka C przecina prostą AB w punkcie D. Oblicz współrzędne punktu D.

3. Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC| = |BC|$ oraz $A = (2, 1), C = (1, 9)$. Podstawa AB tego trójkąta jest zawarta w prostej $y = \frac{1}{2}x$. Oblicz współrzędne wierzchołka B.

4. Punkty $A = (-1, -5), B = (3, -1), C = (2, 4)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Oblicz pole tego równoległoboku.

5. Wyznacz równanie osi symetrii trójkąta o wierzchołkach $A = (-2, 2), B = (6, -2), C = (10, 6)$.

6. Punkty $A = (4, 3)$ i $B = (10, 5)$ są wierzchołkami trójkąta ABC. Wierzchołek C leży na prostej o równaniu $y = 2x + 3$. Oblicz współrzędne punktu C, dla którego kąt ABC jest prosty.

7. Dany jest punkt $A = (-18, 10)$. Prosta o równaniu $y = 3x$ jest symetralną odcinka AB. Wyznacz współrzędne punktu B.

8. Punkty $A = (3, 3)$ i $B = (9, 1)$ są wierzchołkami trójkąta ABC, a punkt $M = (1, 6)$ jest środkiem boku AC. Oblicz współrzędne punktu przecięcia prostej AB z wysokością tego trójkąta poprowadzoną z wierzchołka C.

9. Dany jest kwadrat $ABCD$, w którym $A = \left(5, -\frac{5}{3}\right)$. Przekątna BD tego kwadratu jest zawarta w prostej o równaniu $y = \frac{4}{3}x$. Oblicz współrzędne punktu przecięcia przekątnych AC i BD oraz pole kwadratu $ABCD$.

10. Punkty $A = (-20, 12)$ i $B = (7, 3)$ są wierzchołkami trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC| = |BC|$. Wierzchołek C leży na osi OY układu współrzędnych. Oblicz współrzędne punktu C oraz obwód tego trójkąta.

7. Funkcja kwadratowa

1. (0-2) Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = 2x^2 + bx + c$ jest parabola, której wierzchołkiem jest punkt $W = (4, 0)$. Oblicz wartości współczynników b i c.

2. (0-2) Oblicz najmniejszą i największą wartość funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - 6x + 3$ w przedziale $\langle 0, 4 \rangle$.

3. (0-2) Funkcja kwadratowa f dla $x = -3$ przyjmuje wartość największą równą 4. Do wykresu funkcji f należy punkt $A = (-1, 3)$. Zapisz wzór funkcji kwadratowej f.

4. (0-5) Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$. Zbiorem rozwiązań nierówności $f(x) > 0$ jest przedział $(0, 12)$. Największa wartość funkcji f jest równa 9. Oblicz współczynniki a, b, c funkcji f.

5. (0-2) Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem $f(x) = x^2 + 11x$. Oblicz najmniejszą wartość funkcji f w przedziale $\langle -6, 6 \rangle$.

6. (0-4) Funkcja kwadratowa f jest określona dla wszystkich liczb rzeczywistych x wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$. Największa wartość funkcji f jest równa 6 oraz $f(-6) = f\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$. Oblicz wartość współczynnika a.

7. (0-4) Funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$ ma dwa miejsca zerowe $x_1 = -2$ i $x_2 = 6$. Wykres funkcji f przechodzi przez punkt $A = (1, -5)$. Oblicz najmniejszą wartość funkcji f.

8. (0-2) Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + bx + c$ jest parabola, na której leży punkt $A = (0, -5)$. Osią symetrii tej paraboli jest prosta o równaniu $x = 7$. Oblicz wartości współczynników b i c.

9. (0-2) Funkcja kwadratowa $f(x) = x^2 + bx + c$ nie ma miejsc zerowych. Wykaż, że $1 + c > b$.

8. Planimetria

1. (0-2) W trapezie prostokątnym krótsza przekątna dzieli go na trójkąt prostokątny i trójkąt równoboczny. Dłuższa podstawa trapezu jest równa 6. Oblicz obwód tego trapezu.

2. (0-2) Podstawy trapezu prostokątnego mają długości 6 i 10 oraz tangens jego kąta ostrego jest równy 3. Oblicz pole tego trapezu.

3. (0-2) W trójkącie równoramiennym ABC dane są $|AC| = |BC| = 6$ i $|\sphericalangle ABC| = 30°$. Oblicz wysokość AD trójkąta opuszczoną z wierzchołka A na bok BC.

4. (0-4) Punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym ABC. Kąt ACS jest trzy razy większy od kąta BAS, a kąt CBS jest dwa razy większy od kąta BAS. Oblicz katy trójkąta ABC.

5. (0-5) Dane są dwie prostokątne działki. Działka pierwsza ma powierzchnię równą 6000 m^2. Działka druga ma wymiary większe od wymiarów pierwszej działki o 10 m i 15 m oraz powierzchnię większą o 2250 m^2. Oblicz wymiary pierwszej działki.

6. (0-4) Dany jest romb o boku długości 35. Długości przekątnych tego rombu różnią się o 14. Oblicz pole tego rombu.

7. (0-4) Jeden z kątów trójkąta jest trzy razy większy od mniejszego z dwóch pozostałych kątów, które różnią się o $50°$. Oblicz kąty tego trójkąta.

8. (0-4) Ramię trapezu równoramiennego $ABCD$ ma długość $\sqrt{26}$. Przekątne w tym trapezie są prostopadłe, a punkt ich przecięcia dzieli je w stosunku 2:3. Oblicz pole tego trapezu.

9. (0-4) W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątna AC ma długość 5, a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 2. Oblicz pole trójkąta ABC.

10. (0-4) Dany jest trójkąt rozwartokątny ABC, w którym $\sphericalangle ACB$ ma miarę $120°$. Ponadto $|BC| = 10$, $|AB| = 10\sqrt{7}$. Oblicz długość trzeciego boku trójkąta ABC.

11. (0-2) W trapezie prostokątnym $ABCD$ ($\sphericalangle DAB = 90°$) dłuższa podstawa AB ma długość 8. Przekątna AC tego trapezu ma długość 4 i tworzy z krótszą podstawą CD kąt o mierze $30°$. Oblicz długość przekątnej BD.

12. (0-4) Środek okręgu leży w odległości 10 cm od cięciwy tego okręgu. Długość tej cięciwy jest o 22 cm większa od promienia tego okręgu. Oblicz promień tego okręgu.

9. Stereometria

1. (0-5) Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa $24\sqrt{3}$. Długość krawędzi podstawy ostrosłupa jest równa 6. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

2. (0-4) Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu jest równe 198. Stosunki długości krawędzi prostopadłościanu wychodzących z tego samego wierzchołka to 1:2:3. Oblicz długość przekątnej tego prostopadłościanu.

3. (0-4) Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 100 cm^2, a jego pole powierzchni bocznej jest równe 260 cm^2. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

4. (0-4) Podstawą ostrosłupa $ABCDW$ jest prostokąt $ABCD$. Krawędź boczna DW jest wysokością tego ostrosłupa. Krawędzie boczne AW, BW, CW mają odpowiednio długości 6, 9 i 7. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

5. (0-4) Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny $ABCDEF$ o podstawach ABC i DEFi krawędziach bocznych AD i BE CF. Oblicz pole trójkąta ABF wiedząc, że $|AB| = 10$ i $|CF| = 11$.

6. (0-5) Podstawą ostrosłupa prawidłowego trójkątnego $ABCS$ jest trójkąt równoboczny ABC. Wysokość OS tego ostrosłupa jest równa wysokości jego podstawy. Objętość ostrosłupa jest równa 27. Oblicz pole powierzchni bocznej ostrosłupa $ABCS$ oraz cosinus kąta, jaki tworzą wysokość ściany bocznej i płaszczyzna podstawy ostrosłupa.

7. (0-4) Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny. Pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe $45\sqrt{3}$. Pole podstawy graniastosłupa jest równe polu jednej ściany bocznej. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

8. (0-5) Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny, którego krawędź boczna ma długość 6. Ściana boczna tego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem, którego tangens jest równy $\sqrt{7}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

9. (0-5) Podstawą graniastosłupa prostego $ABCDEF$ jest trójkąt prostokątny ABC, w którym kąt ACB jest prosty. Stosunek długości przyprostokątnej AC tego trójkąta do długości przyprostokątnej BC jest równy 4:3. Punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, a długość odcinka SC jest równa 5. Pole ściany bocznej $BEFC$ graniastosłupa jest równe 48. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

10. (0-4) Wysokość prostopadłościanu $ABCDEFGH$ jest równa 1, a długość przekątnej BH jest równa sumie długości krawędzi AB i BC. Oblicz objętość tego prostopadłościanu.

10. Optymalizacja

1. (0-3) Materiały CKE, X.22

Firma handlowa ustaliła, że liczba sprzedanych przez nią egzemplarzy gry komputerowej w ciągu każdego tygodnia zależy od jej ceny. Liczbę sprzedanych egzemplarzy opisuje funkcja $f(x) = 2400 - 15x$, gdzie x oznacza cenę jednostkową gry.

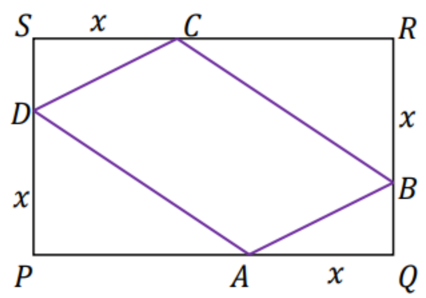
Jaka powinna być cena jednostkowa, aby tygodniowy przychód P ze sprzedaży gry był największy? Oblicz ten największy przychód.

Zapisz obliczenia.

Wskazówka: przyjmij, że przychód jest iloczynem liczby sprzedanych gier oraz ceny jednostkowej tej gry.

2. (0-4) Materiały CKE, X.22

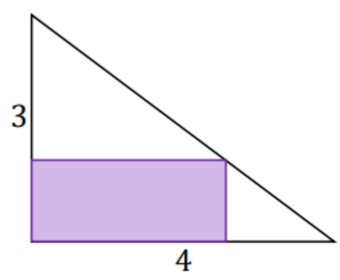
Dany jest prostokąt $PQRS$ o bokach długości $|PQ| = |SR| = 10$ oraz $|PS| = |QR| = 6$. Na bokach PQ, QR, RS, SP obrano odpowiednio punkty A, B, C, D takie, że $|AQ| = |BR| = |CS| = |DP| = x$ oraz $x \geq 3$ (zobacz rysunek).



Wyznacz długość odcinka x, dla którego pole czworokąta $ABCD$ jest najmniejsze. Wyznacz to pole. Zapisz obliczenia.

3. (0-4) Materiały CKE, X.22

Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 3 i 4. Wpisano w niego prostokąt w taki sposób, że dwa z jego boków zawierają się w przyprostokątnych trójkąta, a jeden wierzchołek leży na przeciwprostokątnej (zobacz rysunek).



Jakie wymiary powinien mieć prostokąt, aby jego pole było największe? Oblicz to największe pole. Zapisz obliczenia.

4. (0-4) CKE IX.22

Rodzinna firma stolarska produkuje małe wiatraki ogrodowe. Na podstawie analizy rzeczywistych wpływów i wydatków stwierdzono, że:

- przychód P (w złotych) z tygodniowej sprzedaży x wiatraków można opisać funkcją $P(x) = 251x$
- koszt K (w złotych) produkcji x wiatraków w ciągu jednego tygodnia można określić funkcją $K(x) = x^2 + 21x + 170$.

Tygodniowo w zakładzie można wyprodukować co najwyżej 150 wiatraków.

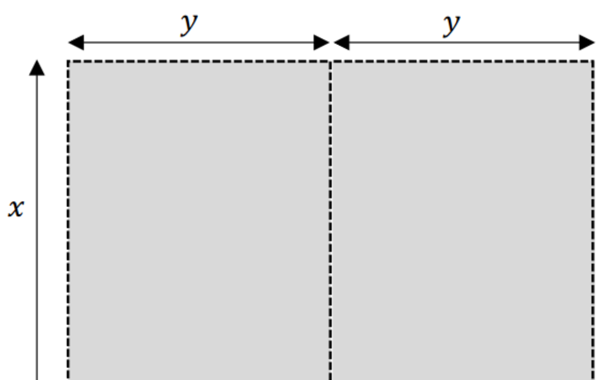
Oblicz, ile tygodniowo wiatraków należy sprzedać, aby zysk zakładu w ciągu jednego tygodnia był największy. Oblicz ten największy zysk.

Zapisz obliczenia.

Wskazówka: przyjmij, że zysk jest różnicą przychodu i kosztów.

5. (0-4) Informator CKE

Powierzchnia magazynowa będzie się składała z dwóch identycznych prostokątnych działek połączonych wspólnym bokiem. Całość ma być ogrodzona płotem, przy czym obie działki będzie rozdzielał wspólny płot. W ogrodzeniu będą zamontowane dwie bramy wjazdowe, każda o szerokości 10 m (zobacz rysunek poniżej). Łączna długość płotu ogradzającego oraz rozdzielającego obie działki wyniesie 580 metrów, przy czym szerokości obu bram wjazdowych nie wliczają się w długość płotu.



Oblicz wymiary x i y każdej z dwóch prostokątnych działek, tak aby całkowite pole powierzchni magazynowej było największe.

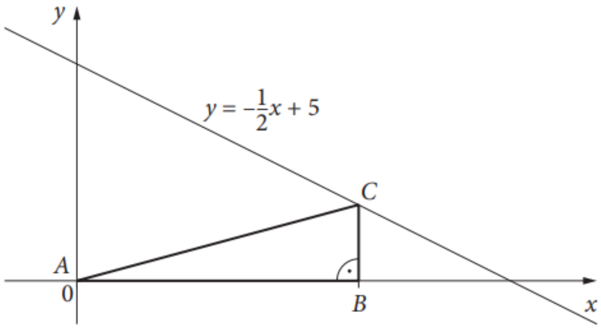
6. (0-4)CKE, arkusz pokazowy iii.22

Rozważamy wszystkie równoległoboki o obwodzie równym 200 i kącie ostrym o mierze $30°$.

Podaj wzór i dziedzinę funkcji opisującej zależność pola takiego równoległoboku od długości x boku równoległoboku.
Oblicz wymiary tego z rozważanych równoległoboków, który ma największe pole, i oblicz to największe pole.
Zapisz obliczenia.

7. NE, I.23, zadanie 28

Rozważamy wszystkie trójkąty prostokątne ABC o przeciwprostokątnej AC, w których $A=(0,0)$, $B=(m,0)$, a wierzchołek C leży na prostej o równaniu $y=-\frac{1}{2}x+5$ i obie jego współrzędne są liczbami dodatnimi. Na rysunku przedstawiono jeden z takich trójkątów.

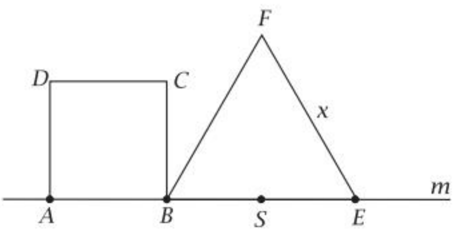


Zadanie 28.1. (0–3)
Wyznacz długość przeciwprostokątnej AC trójkąta – spośród rozważanych – w którym długość przyprostokątnej BC jest równa 2.

Zadanie 28.2. (0–4)
Podaj wzór i dziedzinę funkcji opisującej zależność pola trójkąta ABC od m. Oblicz współrzędne wierzchołka C tego spośród rozważanych trójkątów, który ma największe pole.

8. (0-4)

Dane są kwadrat $ABCD$ i trójkąt równoboczny BEF, którego bok ma długość x. Punkty A, B i E leżą na prostej m. Punkt S jest środkiem odcinka BE oraz długość odcinka AS jest równa 2 (zobacz rysunek).



Wyznacz taką wartość x, dla której suma pól kwadratu $ABCD$ i trójkąta BEF jest najmniejsza. Dla wyznaczonej wartości x oblicz długość łamanej $ADCBFE$. Zapisz obliczenia.

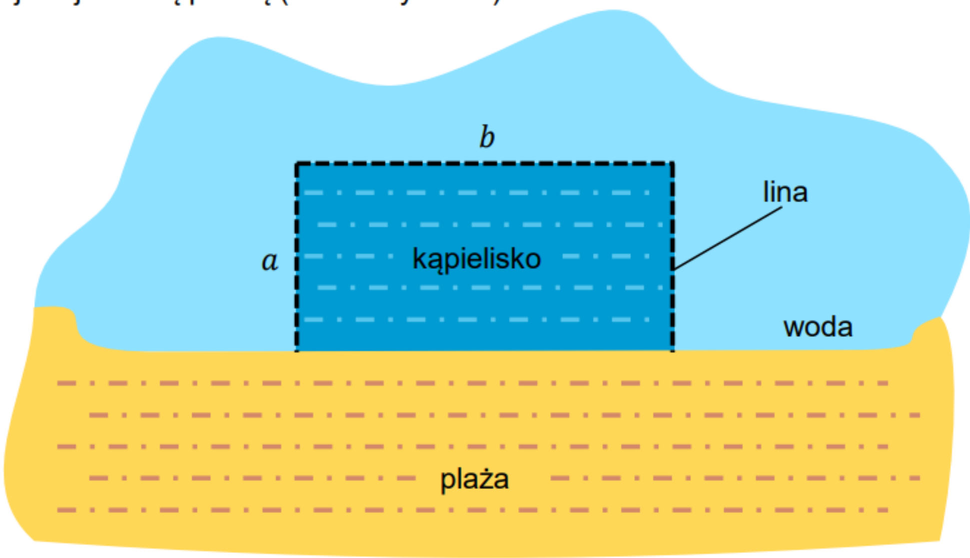
9. (0-4)

Zgodnie z założeniem architekta okno na poddaszu ma mieć kształt trapezu równoramiennego, który nie jest równoległobokiem. Dłuższa podstawa trapezu ma mieć długość $12\ \mathrm{dm}$, a suma długości krótszej podstawy i wysokości tego trapezu ma być równa $18\ \mathrm{dm}$.

Oblicz, jaką długość powinna mieć krótsza podstawa tego trapezu, tak aby pole powierzchni okna było największe. Oblicz to pole. Zapisz obliczenia.

10. (0-4)

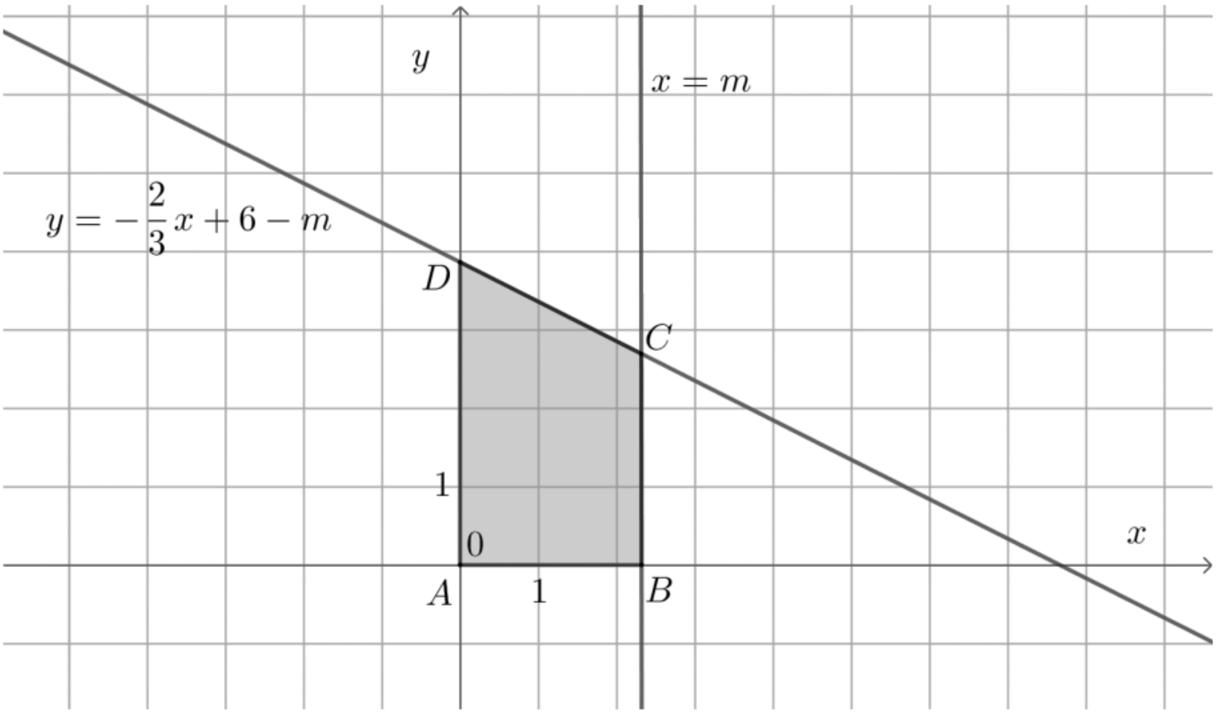
Do wyznaczenia trzech boków pewnego kąpieliska w kształcie prostokąta należy użyć liny o długości 200 m. Czwarty bok tego kąpieliska będzie pokrywał się z brzegiem plaży, który w tym miejscu jest linią prostą (zobacz rysunek).



Oblicz wymiary a i b kąpieliska tak, aby jego powierzchnia była największa.

10. (0-4)

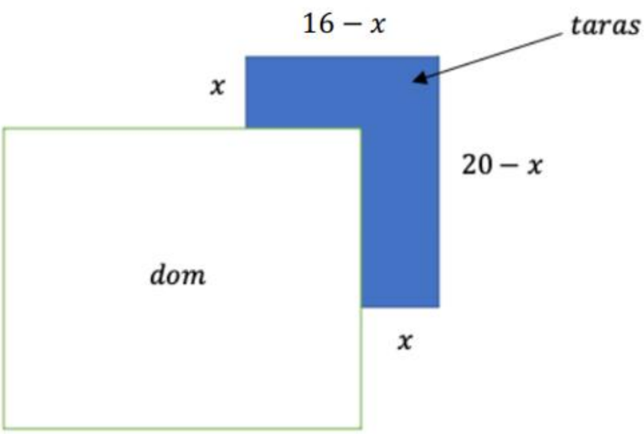
W kartezjańskim układzie współrzędnych, proste o równaniach $y = -\frac{2}{3}x + 6 - m$ oraz $x = m$, gdzie $m > 0$ przecinają się w punkcie C i wraz z osiami układu współrzędnych wyznaczają trapez $ABCD$ (patrz rysunek).



Dla jakiej wartości m trapez $ABCD$ ma największe pole? Zapisz obliczenia.

11. (0-4)

Właściciel domu chce wybudować taras wokół prawego rogu domu, w sposób przedstawiony na poniższym rysunku (wymiary wyrażone są w metrach), na którym położy kostkę brukową.



a) **Napisz wzór funkcji opisującej pole powierzchni tarasu w zależności od x oraz wyznacz dziedzinę funkcji.**

b) **Wyznacz x, dla którego taras będzie miał powierzchnię największą. Oblicz, ile metrów kwadratowych kostki właściciel musi kupić, aby położyć ją na wybudowanym tarasie.**