Spis treści

1. Liczby rzeczywiste. Zadania na dowodzenie

1. Wykaż, że jeśli $p \geq 5$ jest liczbą pierwszą, to liczba $p^2 - 1$ jest podzielna przez 24.

2. Uzasadnij, że dla każdej liczby całkowitej k liczba $k^6 - 2k^4 + k^2$ jest podzielna przez 36.

3. Wykaż, że dla dowolnej liczby całkowitej n liczba $(n+2)^4 - n^4$ jest podzielna przez 16.

4. Wykaż, że $2^{14} + 5^8$ nie jest liczbą pierwszą.

5. Wykaż, że jeśli $x > 0$, to $x^3 + \frac{60}{x} > 36$.

6. Wykaż, że jeśli $x + y = 6$, to $x^4 + y^4 \geq 162$.

7. Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c: $(a+b+c) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$.

8. Liczby a i b są takie, że $a - b = 4$ i $ab = 7$. Oblicz $a^3b + ab^3$.

9. Uzasadnij, że jeśli $a + b = 1$ i $a^2 + b^2 = 7$, to $a^4 + b^4 = 31$.

10. Liczby dodatnie a i b spełniają równość $a^2 + 2a = 4b^2 + 4b$. Wykaż, że $a = 2b$.

11. Wykaż, że $x^4 - x^2 - 2x + 3 > 0$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x.

12. Wykaż, że dowolne liczby rzeczywiste nieujemne x i y, takie że $x^2 + y^2 = 2$, spełniają nierówność $x + y \leq 2$.

13. Wykaż, że liczba $4^{2017} + 4^{2018} + 4^{2019} + 4^{2020}$ jest podzielna przez 17.

14. Udowodnij, że dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x i y prawdziwa jest nierówność $x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0$.

15. Wykaż, że dla dowolnych liczb całkowitych k i m liczba $k^3m - km^3$ jest podzielna przez 6.

16. Wykaż, że suma sześcianów trzech kolejnych liczb całkowitych jest podzielna przez 9.

17. Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność
$$x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9 \geq 0.$$

18. Współczynniki wielomianu $W(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tworzą ciąg geometryczny. Liczba -3 jest pierwiastkiem tego wielomianu. Uzasadnij, że suma współczynników wielomianu jest podzielna przez 8.

19. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność
$$2x^2 + 5y^2 + 10 > 6xy + 4y.$$

2. Funkcja kwadratowa

1. Liczby -1 i 3 są miejscami zerowymi funkcji kwadratowej f. Oblicz $\frac{f(6)}{f(12)}$.

2. Funkcja kwadratowa $f(x) = x^2 + bx + c$ nie ma miejsc zerowych. Wykaż, że $1 + c > b$.

3. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2 + (m-1)x + 1 - m^2 = 0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 i x_2 spełniające warunek $2x_1^2 + x_2^3 = x_1^3 + 2x_2^2$.

4. Dla jakich wartości parametru m pierwiastkami równania $x^2 - 2mx - m^2 - 2m + 4 = 0$ są dwie różne liczby ujemne x_1 , x_2 spełniające warunek $|x_1 - x_2| = 4\sqrt{2}$?

5. Dany jest trójmian kwadratowy $f(x) = x^2 + 2(m+1)x + 6m + 1$. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których ten trójmian ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1 i x_2 tego samego znaku, spełniające warunek $|x_1 - x_2| < 3$.

6. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie
$$x^2 + (m+1)x - m^2 + 1 = 0$$
ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 i x_2 spełniające warunek $x_1^3 + x_2^3 > -7x_1x_2$.

7. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których funkcja kwadratowa f określona wzorem $f(x) = (2m+1)x^2 + (m+2)x + m - 3$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1 i x_2 spełniające warunek $(x_1 - x_2)^2 + 5x_1x_2 \geq 1$.

8. Niech $f(k)$ oznacza sumę odwrotności dwóch różnych rozwiązań równania $(k^2 - 9)x^2 - (2k - 6)x + k - 1 = 0$ z niewiadomą x i parametrem k. Naszkicuj wykres funkcji $y = f(k)$ i odczytaj z wykresu zbiór jej wartości.

9. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których przedział $(2,3)$ jest zawarty w zbiorze rozwiązań nierówności $(m+1)x^2 + mx + 1 < 0$.

10. Dane jest równanie $2x^2 + (m-1)x - m^2 = 0$. Wyznacz te wartości parametru m, dla których liczby: 1, suma pierwiastków, suma odwrotności pierwiastków tego równania, tworzą ciąg geometryczny.

11. Wyznacz zbiór wartości funkcji $y = \frac{x}{x^2+1}$.

12. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + (m-1)x + m - 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki, z których jeden jest sinusem, a drugi cosinusem tego samego kąta?

13. Dla jakich wartości parametru m jeden z pierwiastków równania
$$(2m+1)x^2 - mx + m - 2 = 0$$
jest większy od 1, a drugi mniejszy od -1?

14. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2+(m+2)x+\frac{m}{2}+1=0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 takie, że punkt $P=(x_1, x_2)$ leży na okręgu o środku $S=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ i promieniu długości $\frac{\sqrt{14}}{2}$.

15. (0-5) materiały CKE

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$2x^2-(2m+7)x+m^2-3m+21=0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 oraz x_2, spełniające warunek $x_1=2x_2$.

Zapisz obliczenia.

16. (0-4) CKE arkusz pokazowy III.22

Dane jest równanie

$$(x-6)\cdot[(m-2)x^2-4(m+3)x+m+1]=0$$

z niewiadomą x i parametrem $m \in \mathbb{R}$.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których to równanie ma trzy różne rozwiązania rzeczywiste tego samego znaku.

Zapisz obliczenia.

17. (0-5) CKE XII.22

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$x^2-(m-4)x+m^2-7m+12=0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 oraz x_2, spełniające warunek

$$x_1^3+x_2^3<5x_1^2\cdot x_2+5x_1\cdot x_2^2$$

Zapisz obliczenia.

18. (0-5) CKE V.22

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$x^2-(m+1)x+m=0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 oraz x_2, spełniające warunki:

$$x_1 \neq 0, \quad x_2 \neq 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+2=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$$

3. Równania trygonometryczne

1. Rozwiąż równanie:
   a) $\sin 3x = \cos 2x$
   b) $\cos x + \sin 3x = 0$ w przedziale $\langle \pi, 2\pi \rangle$
   c) $\cos 2x + 3\cos x = -2,\ x \in \langle 0, 2\pi \rangle$
   d) $\sin 6x + \cos 3x = 2\sin 3x + 1$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$
   e) $\sin 5x - \cos 2x + \sin x = 0$
   f) $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \frac{1}{4}\sin 4x$
   g) $\sqrt{3}\cos x = 1 + \sin x,\ x \in \langle 0, 2\pi \rangle$
   h) $(\cos x)\left[\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right] = \frac{1}{2}\sin x$
   i) $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$
   j) $3\cos 2x + 10\cos^2 x = 24\sin x - 3$ dla $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$

2. (0-4) CKE arkusz pokazowy III.22

   Rozwiąż równanie
   $$\mathbf{\sin(3x) = 2\sin x}$$
   w zbiorze $[0, \pi]$.

3. (0-5) materiały CKE X.22

   Rozwiąż równanie
   $$\mathbf{\cos^2 x - \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin x \cos x - \sin^2 x = 0}$$
   w przedziale $[-\pi, \pi]$.

4. (0-4) CKE V.22

   Rozwiąż równanie $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$.

5. (0-4) CKE VI.22

   Rozwiąż równanie $\cos(3x) + \sqrt{3}\sin(3x) + 1 = 0$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$.

6. (0-4) CKE XII.22

   Rozwiąż równanie
   $$\mathbf{6\sin x + 2\sqrt{3}\cos x + 3\,\mathrm{tg}\, x + \sqrt{3} = 0}$$

4. Trygonometria

1. Kąt α jest taki, że $\cos\alpha + \sin\alpha = \frac{4}{3}$. Oblicz wartość wyrażenia $|\cos\alpha - \sin\alpha|$.

2. Wyznacz zbiór wartości i miejsca zerowe funkcji $f(x) = \cos x + \sqrt{3}\sin x + \sqrt{3}$.

3. Wykaż, że jeżeli między miarami kątów α, β, γ w trójkącie zachodzi związek

   $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(1 - \cos\gamma)$, to trójkąt jest równoramienny.

4. Udowodnij, że w dowolnym trójkącie $\sin\alpha + \sin\beta > \sin\gamma$.

5. Wykaż, że jeżeli miary kątów α, β, γ w trójkącie spełniają nierówność $\sin^2\alpha + \sin^2\beta < \sin^2\gamma$,

   to $\cos\gamma < 0$.

6. Udowodnij, że nierówność $|\sin x + 2\cos x| \leq \sqrt{5}$ jest prawdziwa dla dowolnej liczby rzeczywistej x.

7. Wykaż, że jeżeli między miarami kątów α, β w trójkącie zachodzi związek $\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}$, to trójkąt jest prostokątny lub równoramienny.

8. Wykaż, że jeśli α i β są kątami trójkąta, takimi że $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha - \beta)$, to trójkąt ten jest równoramienny lub prostokątny.

9. Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste x spełniające równanie $2\sin^2 x - \cos 2x = 1$. Oblicz sumę wszystkich rozwiązań tego równania należących do przedziału $\langle 0, 32\pi\rangle$.

10. Wyznacz zbiór wartości funkcji:
    a) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$; b) $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$.

11. (0-2) materiały CKE X.22

    Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y), dane są dwie proste l_1 oraz l_2. Kąt między tymi prostymi ma miarę $45°$. Współczynnik kierunkowy w równaniu prostej l_1 jest równy $\frac{2}{3}$.

    Oblicz współczynnik kierunkowy w równaniu prostej l_2. Zapisz obliczenia.

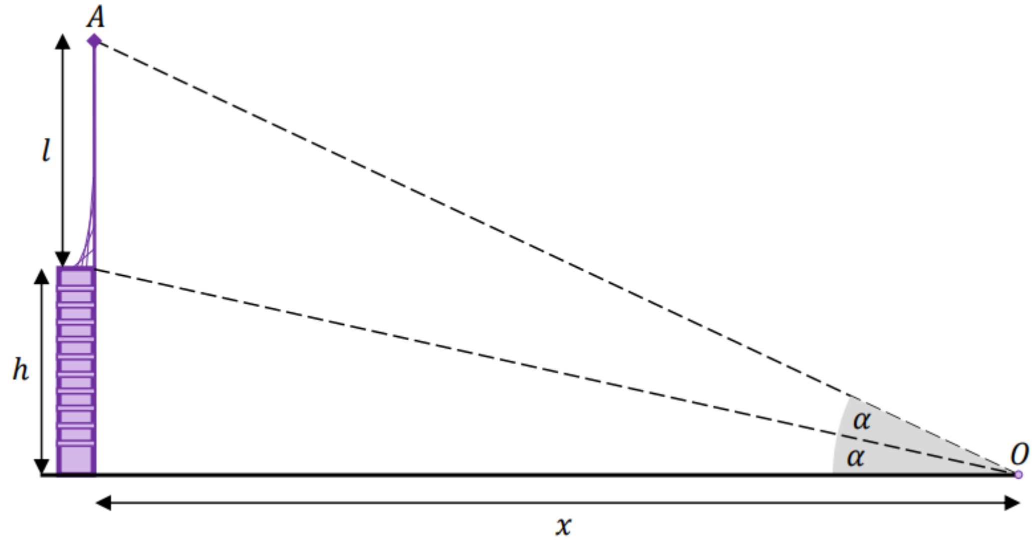
12. (0-4) materiały CKE X.22

    W trapezie $ABCD$ przekątna BD jest dwusieczną kąta CBA i przecina przekątną AC w punkcie K, takim, że $|CK| : |KA| = 1 : 3$. Pole tego trapezu jest równe $100(\sqrt{6} - \sqrt{2})$, $\sin\sphericalangle BAD = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $|AD| = 10$ oraz kąt BAD jest ostry.

    Oblicz długości pozostałych boków trapezu $ABCD$. Zapisz obliczenia.

13. (0-3) materiały CKE X.22

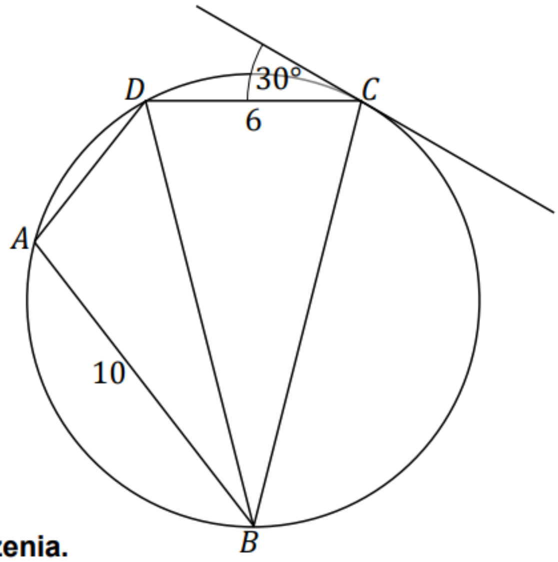
Na szczycie wieży o wysokości h umieszczono pionowo antenę radiową stacji nadawczej o długości l $(l > h)$. Punkt O leży na płaszczyźnie poziomej przechodzącej przez podnóże wieży, a punkt A znajduje się na końcu anteny. Koniec anteny A widać z punktu O pod dwukrotnie większym kątem niż wieżę (zobacz rysunek).



Oblicz odległość x podnóża wieży od punktu A. Zapisz obliczenia.

14. (0-6) materiały CKE X.22

W pewien okrąg wpisano czworokąt $ABCD$ taki, że $|AB| = 10$, $|CD| = 6$ oraz $|BC| = |BD|$. Styczna do tego okręgu w punkcie C tworzy z bokiem CD kąt α o mierze $30°$ (zobacz rysunek).



Oblicz pole czworokąta $ABCD$. Zapisz obliczenia.

5. Wielomiany i funkcje wymierne

1. Wielomian $W(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ jest podzielny przez trójmian $x^2 + x - 6$, a przy dzieleniu przez dwumian $x + 1$ daje resztę 6. Wyznacz współczynniki a, b i c.

2. Wielomian $P(x)$ przy dzieleniu przez $x - 2$ daje resztę 11, zaś przy dzieleniu przez $x + 3$ resztę (- 4). Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $P(x)$ przez $x^2 + x - 6$.

3. Jeden z pierwiastków wielomianu $W(x) = x^3 + 3x^2 + (m - 7)x - m + 1$ jest średnią arytmetyczną pozostałych. Wyznacz wartość parametru m oraz iloczyn wszystkich pierwiastków tego wielomianu.

4. Wyznacz zbiór tych argumentów, dla których wartości funkcji $f(x) = x^3 - 7x + 6$ i $g(x) = -2x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 8x$ są przeciwnych znaków.

5. Nie wykonując dzielenia wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $P(x) = x^{23} + 5x^{12} - 4x^7 + 3$ przez wielomian $Q(x) = x^2 - 1$.

6. Dany jest wielomian $W(x) = -2x^3 + x + a^2$. Liczba a jest pierwiastkiem tego wielomianu, a reszta z dzielenia tego wielomianu przez dwumian $2x + a$ jest większa od a. Oblicz a.

7. Dla jakich wartości parametru p równanie $(x + 1)(x^2 - (p + 1)x + p) = 0$ ma trzy różne pierwiastki rzeczywiste, których suma kwadratów jest równa 6?

8. Wielomian $W(x) = 2x^3 + (m^3 + 2)x^2 - 11x - 2(2m + 1)$ jest podzielny przez dwumian $(x - 2)$ oraz przy dzieleniu przez dwumian $(x + 1)$ daje resztę 6. Oblicz m i dla wyznaczonej wartości m rozwiąż nierówność $W(x) \leq 0$.

9. Wykaż, że jeśli równanie $x^3 + px + q = 0$ ma pierwiastek wielokrotny, to $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$.

10. Wykaż, że liczba $\sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}$ jest całkowita.

11. Rozwiąż równanie $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 12$.

12. Wyznacz wszystkie pary liczb całkowitych (x, y) spełniających równanie $(x - 1)y = 2x + 6$.

13. Punkt $A = (-5, 3)$ jest środkiem symetrii wykresu funkcji homograficznej określonej wzorem $f(x) = \frac{ax+7}{x+d}$, gdy $x \neq -d$. Oblicz iloraz $\frac{d}{a}$.

14. Funkcję homograficzną $y = F(x) = \frac{2x+10}{x+3}$ przedstaw w postaci $y = \frac{a}{x-p} + q$. Naszkicuj wykres funkcji $y = |F(x)|$ (zaznacz asymptoty i punkty wspólne z osiami układu współrzędnych). Na tej podstawie określ liczbę rozwiązań równania $|F(x)| = k$ w zależności od wartości parametru k.

15. Rozwiąż nierówność $\frac{2x-1}{1-x} \leq \frac{2+2x}{5x}$.

16. (0-5) materiały CKE X.22

Rozwiąż nierówność

$$\boldsymbol{x + 4 + \frac{8}{x - 4} \geq \frac{-2x - 8}{x^2 - 16}}$$

17. (0-5) CKE arkusz pokazowy III.22

Dane jest równanie

$$(x - 6) \cdot [(m - 2)x^2 - 4(m + 3)x + m + 1] = 0$$

z niewiadomą x i parametrem $m \in \mathbb{R}$.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których to równanie ma trzy różne rozwiązania rzeczywiste tego samego znaku.

18. (0-3) informator CKE

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = \frac{-3x + 41}{x - 13} \quad \text{dla } x \neq 13.$$

Punktem kratowym nazywamy punkt w układzie współrzędnych, którego obie współrzędne są liczbami całkowitymi.

Wyznacz wszystkie punkty kratowe należące do wykresu funkcji f.

19. (0-3) informator CKE

Wielomian W jest określony wzorem $W(x) = (x - 1)(x^2 - mx + m - 1)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których wielomian W ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty.

20. (0-4) CKE V.22

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = 4x^3 - 6x^2 - (5m + 1)x - 2m$ przez dwumian $x + 2$ jest równa (-30).

Oblicz m i dla wyznaczonej wartości m rozwiąż nierówność $W(x) \geq 0$.

21. (0-3) CKE VI.22

Rozwiąż nierówność

$$\frac{3x + 1}{2x + 1} \leq \frac{3x + 4}{2x + 3}$$

22. (0-5) CKE XII.22

Rozwiąż nierówność

$$\boldsymbol{\frac{x - 1}{x^2 - 4} - \frac{1}{2 - x} \geq \frac{3}{2 + x} + 2}$$

6. Geometria analityczna

1. W trójkącie ABC dane są wierzchołek $C = (4,3)$ i równania dwóch środkowych: $x + y = 3$ oraz $x + 5y - 7 = 0$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków trójkąta ABC i oblicz jego pole.

2. Wyznacz obraz punktu $P = (-2,1)$ przez symetrię względem prostej $l: 3x + 2y - 9 = 0$.

3. Dane są punkty $A = (-1,0)$ i $B = (3,2)$. Na prostej $l: x - 3y + 7 = 0$ wyznacz taki punkt C, aby trójkąt ABC był prostokątny.

4. Dany jest okrąg o środku $S = (2,2)$ i promieniu $R = 2$ i styczna do tego okręgu w punkcie P, którego współrzędne są liczbami dodatnimi. Styczna ta przecina oś OX w punkcie $Q = (6,0)$. Wyznacz współrzędne punktu P.

5. Punkt $A = (7,-1)$ jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego ABC , w którym $AC = BC$. Obie współrzędne punktu C są liczbami ujemnymi. Okrąg wpisany w trójkąt ABC ma równanie $x^2 + y^2 = 10$. Oblicz współrzędne punktów B i C.

6. Dla jakich wartości parametru m okręgi o równaniach $x^2 + y^2 = m^2 - 2m + 1$ oraz $x^2 - 6x + y^2 + 8y = 4m^2 - 25$ są styczne zewnętrznie?

7. Prosta o równaniu $3x - 4y - 36 = 0$ przecina okrąg o środku $S = (3, 12)$ w punktach A i B. Długość odcinka AB jest równa 40. Wyznacz równanie tego okręgu.

8. Oblicz miarę kąta między stycznymi do okręgu $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$ poprowadzonymi przez punkt $A = (2,0)$.

9. Dane są punkty $A = (-4, 1)$ i $C = (2, -1)$ leżące na okręgu o środku w punkcie S i promieniu długości r. Środek tego okręgu ma obie współrzędne ujemne i jest oddalony o $\sqrt{13}$ od prostej l o równaniu $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$. Wyznacz równanie tego okręgu oraz współrzędne takiego punktu B leżącego na tym okręgu, że trójkąt ABC jest prostokątny.

10. Wyznacz wszystkie wartości współczynników a i b, dla których prosta $y = ax + b$ jest prostopadła do prostej $x - 3y + 6 = 0$ i ma co najmniej jeden punkt wspólny z okręgiem $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 10$.

11. Prosta $k: x - 2y + 3 = 0$ zawiera przekątną kwadratu $ABCD$ wpisanego w okrąg, który przechodzi przez punkty $P = (-1, -3)$ i $Q = (-3, 3)$. Wyznacz równanie tego okręgu i współrzędne wierzchołków kwadratu.

12. Wyznacz równanie okręgu o promieniu długości 8, stycznego do prostych k i l o równaniach: $k: 3x - 4y + 10 = 0$, $l: y = -\frac{3}{4}x$.

13. Punkt $A = (0, 0)$ jest wierzchołkiem równoległoboku $ABCD$. Punkty $M = (8, 1)$ i $N = (10, 5)$ są odpowiednio środkami boków BC i CD. Wyznacz współrzędne punktów B, C i D.

14. Wyznacz współrzędne środka jednokładności, w której obrazem okręgu o równaniu $(x-16)^2+y^2=4$ jest okrąg o równaniu $(x-6)^2+(y-4)^2=16$, a skala tej jednokładności jest liczbą ujemną.

15. Dane są okręgi o równaniach $x^2+y^2-2ax+4y+a^2-77=0$ oraz $x^2+y^2-12x-8y+43=0$. Wyznacz wszystkie wartości parametru a, dla których te okręgi mają dokładnie jeden punkt wspólny. Rozważ wszystkie przypadki.

16. Dane są punkty $A=(-4,0)$ i $M=(2,9)$ oraz prosta k o równaniu $y=-2x+10$. Wierzchołek B trójkąta ABC to punkt przecięcia prostej k z osią Ox układu współrzędnych, a wierzchołek C jest punktem przecięcia prostej k z prostą AM. Oblicz pole trójkąta ABC.

17. Dany jest punkt $B=(-4,7)$ i wektor $\vec{u}=[-3,5]$. Wyznacz taki punkt A, że $\overrightarrow{AB}=-3\vec{u}$.

18. Dane są punkty $A=(3,-1), B=(4,1), C=(5,-3), D=(8,3)$. Sprawdź, że odcinki AB i CD są jednokładne. Wyznacz skalę i środek tej jednokładności.

19. Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkty $A=(4,4)$ i $B=(5,3)$, który jest styczny do okręgu $x^2+y^2=16$.

20. Wyznacz równanie okręgu stycznego do obu osi układu współrzędnych, o środku leżącym na prostej $x-2y+3=0$.

21. Dane są okręgi $o_1\colon x^2+y^2=1$ i $o_2\colon x^2+6x+y^2-8y=0$. Wyznacz środek i skalę jednokładności, która przekształca okrąg o_1 na okrąg o_2.

22. W okrąg o równaniu $(x-2)^2+(y-1)^2=5$ jest wpisany trójkąt ABC, którego bok AB jest zawarty w prostej o równaniu $x-2y=0$. Pole trójkąta ABC jest równe 5. Wyznacz współrzędne punktu C.

23. W trójkącie równoramiennym ABC wysokość poprowadzona do podstawy AB ma długość 10. Wyznacz współrzędne punktu C, jeśli $A=(-3,-4)$, $B=(5,2)$.

24. Każdy z wektorów $\vec{u}$ i $\vec{w}$ ma dodatnie współrzędne i długość 10. Wektor $\vec{u}$ jest prostopadły do prostej $3x+4y-8=0$, a wektor $\vec{w}$ jest równoległy do prostej $y=\frac{7}{24}x+4$. Wyznacz długość wektora $\vec{u}+\vec{w}$.

25. Na płaszczyźnie z układem współrzędnych dane są punkty $A=(2,-1)$, $B=(7,2)$ oraz $C=(5,3)$. Wyznacz współrzędne wektora o długości 1 równoległego do wektora $\vec{u}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$.

26. Wyznacz współrzędne punktu leżącego na paraboli $y=x^2-2x+1$ położonego najbliżej punktu $A=(4,0)$.

27. Punkt $A=(-4,2)$ jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego ABC. Punkt $K=(2,0)$ leży na podstawie AB tego trójkąta, $|AK|\colon|KB|=2\colon1$. Punkt $L=(0,6)$ leży na ramieniu AC tego trójkąta. Wyznacz współrzędne wierzchołków B i C oraz pole trójkąta ABC.

28. (0-6) CKE arkusz pokazowy III.22

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) punkt $A = (9, 12)$ jest wierzchołkiem trójkąta ABC. Prosta k o równaniu $y = \frac{1}{2}x$ zawiera dwusieczną kąta ABC tego trójkąta. Okrąg $\mathcal{O}$ o równaniu $(x-8)^2 + (y-4)^2 = 16$ jest wpisany w ten trójkąt.

Oblicz współrzędne punktu styczności prostej przechodzącej przez wierzchołki B i C tego trójkąta z okręgiem $\mathcal{O}$.

29. (0-6) CKE V.22

Punkt $A = (-3, 2)$ jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC| = |BC|$. Pole tego trójkąta jest równe 15. Bok BC zawarty jest w prostej o równaniu $y = x - 1$. Oblicz współrzędne wierzchołków B i C tego trójkąta.

30. (0-6) CKE VI.22

Dane są okrąg o_1 o równaniu $(x-6)^2 + (y-4)^2 = 98$ oraz okrąg o_2 o promieniu $2\sqrt{5}$. Środki okręgów o_1 i o_2 leżą po różnych stronach prostej k o równaniu $y = -3x - 6$, a punkty wspólne obu okręgów leżą na prostej k. Wyznacz równanie okręgu o_2.

31. (0-4) informator CKE

Czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem takim, że $\overrightarrow{BD} = [-21, -7]$ i $\overrightarrow{DC} = [15, 8]$.

Oblicz pole tego równoległoboku.

32. (0-4) informator CKE

Trapez $ABCD$ jest wpisany w okrąg o równaniu $x^2 + y^2 - 38x + 22y - 96 = 0$. Wierzchołek A trapezu ma obie współrzędne ujemne, a odcinek AB jest dłuższą z podstaw tego trapezu. Przekątna AC trapezu $ABCD$ jest zawarta w prostej o równaniu $y = x$.

Oblicz sinus kąta ABC.

7. Planimetria

1. W trójkącie ABC wysokość i środkowa poprowadzone z wierzchołka C podzieliły kąt ACB na trzy równe części. Wyznacz miary kątów tego trójkąta.

2. Oblicz pole części wspólnej czterech kół, których środki znajdują się w wierzchołkach kwadratu o boku 1, o promieniach równych długości boku kwadratu.

3. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długości: $AC = 12$, $BC = 9$. Na boku AB wybrano taki punkt D, że $BC = CD$. Oblicz długość odcinka AD.

4. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC = 17$ i $BC = 10$. Na boku AB leży taki punkt D, że $CD = 10$ oraz $AD: DB = 3: 4$. Oblicz pole trójkąta ABC.

5. W czworokącie $ABCD$ dane są długości boków: $AB = 24$, $CD = 15$, $AD = 7$. Ponadto kąty DAB i BCD są proste. Oblicz pole tego czworokąta i długości jego przekątnych.

6. W trójkącie ABC punkty D i E leżą odpowiednio na bokach AB i AC tak, że $AD: DB = 1: 2$ oraz $AE: EC = 2: 1$. F jest punktem wspólnym odcinków BE i CD. Wyznacz jaką część pola trójkąta ABC stanowi pole czworokąta $ADFE$.

7. Długości boków trójkąta są kolejnymi liczbami parzystymi. Najmniejszy kąt wewnętrzny tego trójkąta ma miarę dwa razy mniejszą niż największy. Oblicz długości boków trójkąta.

8. Punkty K, L, M, N są odpowiednio środkami boków AB, BC, CD, DA czworokąta wypukłego $ABCD$. Odcinki KM i LN przecinają się w punkcie S. Wykaż, że suma pól czworokątów $AKSN$ i $SLCM$ jest równa sumie pól czworokątów $KBLS$ i $NSMD$.

9. Przekątna trapezu równoramiennego ma długość $2\sqrt{7}$ cm, a jego obwód jest równy 16 cm. Oblicz długości boków trapezu, jeśli wiadomo, że w ten trapez można wpisać okrąg.

10. Długości boków czworokąta $ABCD$ są równe: $AB = 2$, $BC = 3$, $CD = 4$, $DA = 5$. Na tym czworokącie można opisać okrąg. Oblicz długość przekątnej AC.

11. Oblicz pole obszaru zawartego między dwoma okręgami wzajemnie stycznymi zewnętrznie o promieniach 1 i 3 oraz ich wspólną zewnętrzną styczną.

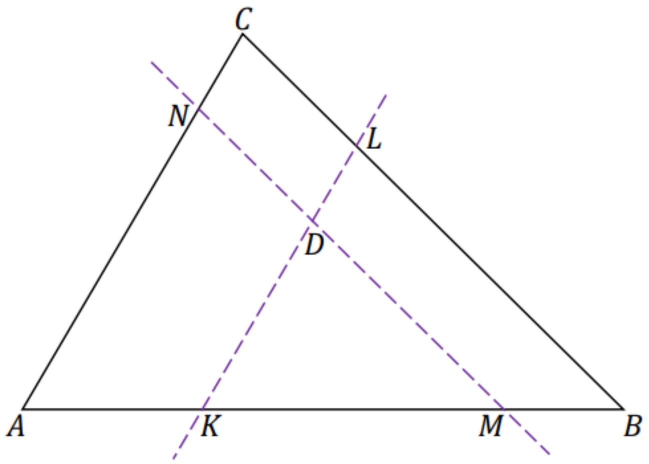
12. Dane są dwa okręgi: $o_1(S_1, R)$ i $o_2(S_2, r)$. Okręgi te są styczne zewnętrznie. Oblicz promień okręgu stycznego do obu tych okręgów i do ich wspólnej stycznej zewnętrznej.

13. Punkty M i L leżą odpowiednio na bokach AB i AC trójkąta ABC, przy czym $MB = 2AM$ oraz $LC = 3AL$. Punkt S jest punktem przecięcia odcinków BL i CM. Pole trójkąta ABC jest równe 660. Oblicz pola trójkątów AMS, BMS, ALS i CLS.

14. Dane są trzy okręgi o środkach A, B, C i promieniach równych odpowiednio $r, 2r, 3r$. Każde dwa z tych okręgów są zewnętrznie styczne: pierwszy z drugim w punkcie K, drugi z trzecim w punkcie L, a trzeci z pierwszym w punkcie M. Oblicz stosunek pola trójkąta KLM do pola trójkąta ABC.

15. (0-6) CKE, X.22

Punkt D leży wewnątrz trójkąta ABC. Prosta przechodząca przez punkt D i równoległa do boku AC przecina bok AB w punkcie K, a bok BC w punkcie L. Prosta przechodząca przez punkt D i równoległa do boku BC przecina bok AB w punkcie M, a bok AC w punkcie N (zobacz rysunek). Stosunek obwodu trójkąta KMD do obwodu trójkąta KBL jest równy $5:7$, a stosunek obwodu trójkąta KMD do obwodu trójkąta AMN jest równy $5:8$. Pole czworokąta $DLCN$ jest równe 15.



Oblicz pole trójkąta ABC. Zapisz obliczenia.

8. Planimetria – zadania na dowodzenie

1. Wykaż, że w dowolnym trójkącie dwusieczna kąta przy danym wierzchołku jest również dwusieczną kąta między wysokością trójkąta poprowadzoną z tego wierzchołka i odcinkiem łączącym ten wierzchołek ze środkiem okręgu opisanego na trójkącie.

2. Trapez równoramienny o podstawach a i b jest opisany na okręgu o promieniu r. Wykaż, że $4r^2 = ab$.

3. W trójkącie ABC kąt BAC jest dwa razy większy od kąta ABC. Wykaż, że prawdziwa jest równość $BC^2 - AC^2 = AB \cdot AC$.

4. Na trójkącie równobocznym ABC opisano okrąg. Wykaż, że dla dowolnego punktu M leżącego na krótszym łuku BC tego okręgu spełniona jest równość $MA = MB + MC$.

5. Wysokość CF dzieli trapez prostokątny $ABCD$ na kwadrat i trójkąt prostokątny równoramienny. Niech E będzie środkiem ramienia BC. Uzasadnij, że przekątna AC dzieli odcinek DE na połowy.

6. Wykaż, że jeśli a, b, c są długościami boków trójkąta, to $(a + b + c)^2 > 2(a^2 + b^2 + c^2)$.

7. Wykaż, że suma odległości dowolnego punktu wewnętrznego trójkąta od prostych zawierających jego boki jest większa od długości średnicy okręgu wpisanego w ten trójkąt.

8. Wykaż, że w każdym trójkącie dowolna prosta przechodząca przez środek okręgu wpisanego w ten trójkąt dzieli pole i obwód tego trójkąta w tym samym stosunku.

9. Niech P będzie dowolnym punktem wewnątrz trójkąta równobocznego ABC o boku a. Wykaż, że $a\sqrt{3} \le PA + PB + PC < 2a$.

10. W trójkącie ostrokątnym ABC bok AB ma długość c, długość boku BC jest równa a oraz $|\sphericalangle ABC| = \beta$. Dwusieczna kąta ABC przecina bok AC w punkcie E. Wykaż, że długość odcinka BE jest równa $\frac{2ac}{a+c} \cdot \cos\frac{\beta}{2}$.

11. Przekątne trapezu $ABCD$ przecinają się w punkcie P. Prosta równoległa do podstaw trapezu, przechodząca przez punkt P, przecina ramiona AD i BC odpowiednio w punktach M i N. Wykaż, że $MP = NP$.

12. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o środku S. Kąty wewnętrzne CAB, ABC i BCA są równe odpowiednio $\alpha, 2\alpha, 4\alpha$. Wykaż, że trójkąt ABC jest rozwartokątny, i udowodnij, że miary wypukłych kątów środkowych ASB, ASC, BSC tworzą w podanej kolejności ciąg arytmetyczny.

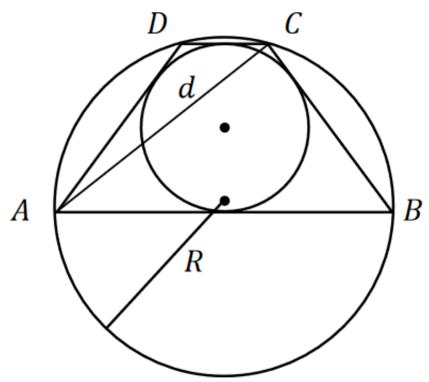
13. Dany jest trójkąt ABC. Z wierzchołka B poprowadzono środkową BD do boku AC. Punkt S jest środkiem odcinka BD. Prosta AS przecięła bok BC w punkcie P. Wykaż, że $CP = \frac{2}{3}BC$.

14. W czworokącie $ABCD$: $AB = BC$, $\sphericalangle DAB = 45°$, $\sphericalangle ABC = 150°$, $\sphericalangle BCD = 60°$. Wykaż, że trójkąt BCD jest równoboczny.

15. Miary kątów trójkąta ABC są równe $\alpha = \sphericalangle CAB$, $\beta = \sphericalangle ABC$ i $\gamma = \sphericalangle BAC$. Punkt S jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt, a proste zawierające odcinki AS i BS przecinają boki BC i AC tego trójkąta odpowiednio w punktach D i E. Wykaż, że jeśli $\alpha + \beta = 2\gamma$, to na czworokącie $DCES$ można opisać okrąg.

16. (0-4) CKE, III.22

Dany jest trapez równoramienny $ABCD$ o obwodzie l i podstawach AB oraz CD takich, że $|AB| > |CD|$. Trapez jest opisany na okręgu i wpisany w okrąg, a przekątna AC trapezu ma długość d (zobacz rysunek).



Wykaż, że promień R okręgu opisanego na trapezie $ABCD$ jest równy $\dfrac{d \cdot l}{2\sqrt{16d^2 - l^2}}$.

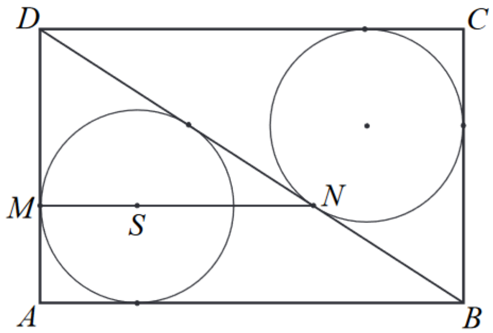
17. (0-3) CKE, V.22

Punkt P jest punktem przecięcia przekątnych trapezu $ABCD$. Długość podstawy CD jest o 2 mniejsza od długości podstawy AB. Promień okręgu opisanego na trójkącie <u>ostrokątnym</u> CPD jest o 3 mniejszy od promienia okręgu opisanego na trójkącie APB.

Wykaż, że spełniony jest warunek $|DP|^2 + |CP|^2 - |CD|^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot |DP| \cdot |CP|$.

18. (0-3) CKE V.2016

Dany jest prostokąt $ABCD$. Okrąg wpisany w trójkąt BCD jest styczny do przekątnej BD w punkcie N. Okrąg wpisany w trójkąt ABD jest styczny do boku AD w punkcie M, a środek S tego okręgu leży na odcinku MN, jak na rysunku.

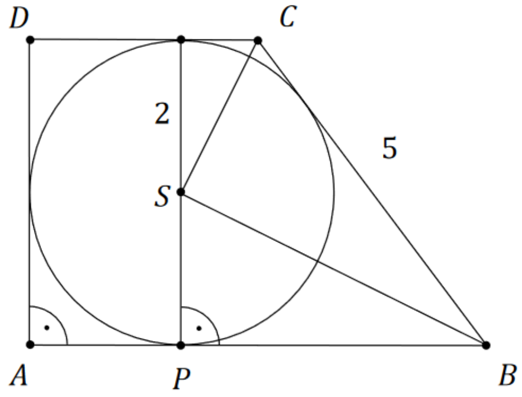


Wykaż, że $|MN| = |AD|$.

19. (0-5) materiały CKE 22

Dany jest trapez prostokątny $ABCD$ o kątach prostych przy wierzchołkach A i D. Ramię BC trapezu ma długość 5. W ten trapez wpisano okrąg o środku w punkcie S i promieniu 2. Punkt P jest punktem styczności okręgu i dłuższej podstawy AB tego trapezu (zobacz rysunek).

Wykaż, że trójkąty BPS i BSC są trójkątami podobnymi, oraz oblicz skalę tego podobieństwa.



20. (0-3) CKE, VI.22

W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD przez punkt O przecięcia się przekątnych poprowadzono dwie proste równoległe do boków BC i AD. Prosta równoległa do boku BC przecina bok AB w punkcie B', a prosta równoległa do boku AD przecina bok AB w punkcie A'. Wykaż, że $|AA'| = |BB'|$.

9. Ciągi

1. 1. Oblicz granice:

   a) $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+3n-2020}{3n^2-2n+9}$ b) $\lim_{n\to\infty}\frac{-7n^3+3n}{1+2n+3n^2+4n^5}$ c) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+9}+8n}{2n+7}$ d) $\lim_{n\to\infty}\frac{1+5+9+\cdots+(4n-3)}{n^2-n+1}$

   e) $\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+3}-3^{n+2}}{2\cdot 4^n+3^{n-1}}$ f) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{11n^3+6n+5}{6n^3+1}-\frac{2n^2+2n+1}{5n^2-4}\right)$ g) $\lim_{n\to\infty}\frac{(3n^2+5n)^3(2n-1)^4}{(6n^5+n+1)^2}$

   h) $\lim_{n\to\infty}(0{,}5n^3-10n^2-25n+89)$ i) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+4n+1}{2n+1}-\frac{6n^2+n-1}{4n-1}\right)$

   j) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+7}-\sqrt{n+1}\right)$ k) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2\sqrt{n}+3}-\sqrt{n-6\sqrt{n}+12}\right)$.

2. Ciąg (a,b,c) jest geometryczny, ciąg $(a+1,b+5,c)$ jest malejącym ciągiem arytmetycznym oraz $a+b+c=39$. Oblicz a,b,c.
3. Dla jakich wartości x liczby $\sin x+\cos x, \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos x-\sin x$ są kolejnymi wyrazami zbieżnego szeregu geometrycznego?

4. W pięciowyrazowym ciągu (a_n) dane są $a_1=2$ i $a_5=18$. Pierwsze trzy wyrazy tworzą ciąg arytmetyczny, a ostatnie trzy ciąg geometryczny. Suma wszystkich wyrazów ciągu (a_n) jest równa 45. Wyznacz ten ciąg.

5. Oblicz sumę wszystkich liczb trzycyfrowych, które są podzielne przez 4, ale nie są podzielne przez 7.

6. Trzy liczby tworzą ciąg geometryczny. Jeśli do drugiej z nich dodamy 8, to ciąg ten zmieni się na arytmetyczny. Jeśli zaś do ostatniej liczby nowego ciągu arytmetycznego dodamy 64, to tak otrzymany ciąg będzie znów geometryczny. Znajdź te liczby.

7. Ciąg geometryczny (a_n) ma 100 wyrazów i są one liczbami dodatnimi. Suma wszystkich wyrazów o numerach nieparzystych jest sto razy większa od sumy wszystkich wyrazów o numerach parzystych oraz $\log a_1+\log a_2+\log a_3+\cdots\log a_{100}=100$. Oblicz a_1.

8. Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) jest równy 2018. Dla pewnej liczby naturalnej n suma S_n wszystkich n początkowych wyrazów jest równa 0. Wyznacz sumę S_{2n} wszystkich $2n$ początkowych wyrazów ciągu (a_n).

9. Rozwiąż nierówność $1+\frac{2x}{1+x}+\frac{4x^2}{(1+x)^2}+\cdots\geq 5$, w której lewa strona jest sumą zbieżnego szeregu geometrycznego

10. Suma pięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego jest równa 4, a suma dziesięciu początkowych jego wyrazów wynosi 132. Oblicz sumę piętnastu początkowych wyrazów tego ciągu.

11. Wyznacz pierwszy wyraz i iloraz ciągu geometrycznego (a_n), którego wyrazy spełniają układ równań $\begin{cases}a_1+a_2+a_3+\cdots=57\\ a_2+a_5+a_8+\cdots=18\end{cases}$.

12. Długości boków trójkąta tworzą ciąg geometryczny. Jakie wartości może przyjmować iloraz tego ciągu?

13. Liczby a, b, c są – odpowiednio – pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Suma tych liczb jest równa 27. Ciąg $(a-2, b, 2c+1)$ jest geometryczny. Wyznacz liczby a, b, c.

14. Trzywyrazowy ciąg (a, b, c) o wyrazach dodatnich jest arytmetyczny, natomiast ciąg $\left(\frac{1}{a}, \frac{2}{3b}, \frac{1}{2a+2b+c}\right)$ jest geometryczny. Oblicz iloraz ciągu geometrycznego.

15. Wyrazy ciągu geometrycznego (a_n), określonego dla $n \geq 1$, spełniają układ równań
$$\begin{cases} a_3 + a_6 = -84 \\ a_4 + a_7 = 168 \end{cases}.$$
Wyznacz liczbę n początkowych wyrazów tego ciągu, których suma S_n jest równa 32769.

16. Ciąg (a_n) jest dla $n \geq 1$ określony wzorem $a_n = \frac{1}{\frac{1}{\log_2(n+1)}+\frac{1}{\log_3(n+1)}+\frac{1}{\log_4(n+1)}+\cdots+\frac{1}{\log_{2018}(n+1)}}$.
Uzasadnij, że $a_n = \log_{2018!}(n+1)$ i oblicz $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2017}$.

17. Ciąg geometryczny (a_n) ma 16 wyrazów i wszystkie te wyrazy są dodatnie. Suma wszystkich wyrazów o numerach parzystych jest 16 razy mniejsza od sumy wszystkich wyrazów o numerach nieparzystych. Ponadto spełniona jest równość $\log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \log_2 a_3 + \cdots \log_2 a_{16} = 32$. Oblicz a_1.

18. Suma pierwszych dwóch wyrazów pewnego monotonicznego, nieskończonego ciągu geometrycznego wynosi $\frac{5}{4}$, a suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa $\frac{4}{3}$. Wyznacz zbiór liczb naturalnych $n \geq 1$, dla których spełniona jest nierówność $|S - S_n| > \frac{1}{384}$.

19. Ciąg (a_n) o wyrazach dodatnich jest określony wzorem rekurencyjnym
$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ \log_3 a_{n+1} = \log_3 a_n + 1 \text{ dla } n \geq 1. \end{cases}$$
Wykaż, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_3 a_{n+1}}{\log_3 a_n} = 1$.

20. W nieskończonym ciągu arytmetycznym (a_n), określonym dla $n \geq 1$, suma jedenastu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 187. Średnia arytmetyczna pierwszego, trzeciego i dziewiątego wyrazu tego ciągu jest równa 12. Wyrazy a_1, a_3, a_k ciągu (a_n) tworzą nowy ciąg – trzywyrazowy ciąg geometryczny. Oblicz k.

21. Wyznacz wzór ogólny nieskończonego ciągu geometrycznego, jeśli suma jego wyrazów jest równa $\frac{16}{3}$, a suma kwadratów jego wyrazów jest równa $\frac{256}{15}$.

22. Wyznacz wszystkie wartości parametru p, dla których granicą ciągu $a_n = \frac{pn^2+3n+p}{(p-1)n^2+pn-p}$ jest liczba mniejsza od p.

23. Wszystkie wyrazy nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n), określonego dla $n \geq 1$, są dodatnie oraz spełniony jest warunek $\frac{a_2+a_4+a_6\ldots+a_{2n}+\cdots}{a_4+a_8+a_{12}\ldots+a_{4n}+\cdots} = 10$. Wyznacz iloraz tego ciągu.

24. Czterowyrazowy ciąg (a, b, c, d) jest rosnący i arytmetyczny. Kwadrat największego wyrazu tego ciągu jest równy podwojonej sumie kwadratów pozostałych wyrazów tego ciągu. Ponadto ciąg $(a+100, b, c)$ jest geometryczny. Oblicz wyrazy ciągu (a, b, c, d).

25. (0-5) CKE, X.22

Dany jest rosnący ciąg arytmetyczny (a_n) określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Ciąg $(a_1 \cdot a_2,\ a_2 \cdot a_3,\ a_3 \cdot a_1)$ jest geometryczny i ma wyrazy różne od zera.

26. (0-6) CKE, III.22

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n), określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Suma trzech początkowych wyrazów ciągu (a_n) jest równa 7, a suma S wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 8.

Wyznacz wszystkie wartości n, dla których spełniona jest nierówność

$$\left|\frac{S - S_n}{S_n}\right| < 0{,}001$$

gdzie S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n).

27. (0-4) CKE, V.22

Ciąg (a_n), określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, jest geometryczny i ma wszystkie wyrazy dodatnie. Ponadto $a_1 = 675$ i $a_{22} = \frac{5}{4}a_{23} + \frac{1}{5}a_{21}$.

Ciąg (b_n), określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, jest arytmetyczny.

Suma wszystkich wyrazów ciągu (a_n) jest równa sumie dwudziestu pięciu początkowych kolejnych wyrazów ciągu (b_n). Ponadto $a_3 = b_4$. Oblicz b_1.

28. (0-4) CKE, VI.22

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n), określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, którego iloraz q jest równy pierwszemu wyrazowi i spełnia warunek $|q| < 1$.

Stosunek sumy S_N wszystkich wyrazów tego ciągu o numerach nieparzystych do sumy S_P wszystkich wyrazów tego ciągu o numerach parzystych jest równy różnicy tych sum, tj. $\frac{S_N}{S_P} = S_N - S_P$. Oblicz q.

29. (0-4) materiały CKE

W nieskończonym malejącym ciągu geometrycznym (a_n), określonym dla $n \geq 1$, jest spełniony warunek

$$\frac{a_5 + a_3}{a_3} = \frac{29}{25}.$$

Suma wszystkich wyrazów tego ciągu o numerach parzystych jest równa 6.

Wyznacz wzór na n–ty wyraz ciągu (a_n).

30. (0-3) materiały CKE

Ciąg (a_n) jest określony wzorem

$$a_n = (n+5)^2 \cdot \left(\frac{p+1}{(n+1)(n+2)} + \frac{2p+2}{(n+2)(n+3)}\right) \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Wyznacz wszystkie wartości parametru p, dla których granica ciągu jest równa 12.

10. Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa

1. Ile dzielników ma liczba 1728?

2. Ile jest kostek domina w jednym komplecie? (Na kostkach mamy wszystkie możliwe układy: od 0,0 do 6,6; każdy z nich występuje raz.)

3. Ile jest permutacji elementów zbioru $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$:
   a) które zaczynają się na AB
   b) które kończą się na FGH
   c) które zaczynają się na AB i kończą na FGH
   d) które zaczynają się na AB lub kończą na FGH
   e) w których E i F stoją obok siebie
   f) w których A występuje wcześniej niż C?

4. Oblicz, ile jest siedmiocyfrowych liczb naturalnych, takich że iloczyn wszystkich ich cyfr w zapisie dziesiętnym jest równy 28.

5. Rozdzielamy 10 jednakowych cukierków między troje dzieci. Na ile sposobów możemy to zrobić, jeśli:
   a) dopuszczamy wszystkie podziały, również te skrajnie niesprawiedliwe;
   b) każde dziecko ma dostać przynajmniej jeden cukierek?

6. a) Ile jest liczb 12-cyfrowych o sumie cyfr równej 5?
   b) Ile jest liczb 10-cyfrowych o sumie cyfr równej 13, jeśli żadna z cyfr nie jest zerem?

7. Z cyfr $0, 1, 2$ tworzymy pięciocyfrowe liczby całkowite dodatnie podzielne przez 15. Oblicz, ile możemy utworzyć takich liczb.

8. Ile różnych liczb 9-cyfrowych możemy utworzyć z cyfr:
   a) 2,2,2,3,3,7,7,7,7 b) 0,0,0,3,3,7,7,7,7?

9. Rozpatrujemy wszystkie liczby naturalne dziesięciocyfrowe, w zapisie których mogą występować wyłącznie cyfry 1,2,3, przy czym cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy. Uzasadnij, że takich liczb jest 15 360.

10. Ile jest liczb 7-cyfrowych, w których zapisie:
    a) występuje przynajmniej jedno 0
    b) nie występuje 6
    c) cyfra tysięcy jest większa od cyfry dziesiątek?

11. Z talii 52 kart losujemy 6. Na ile sposobów możemy otrzymać:
    a) 5 kierów i pika
    b) 3 piki, 1 kiera i dwie inne karty
    c) co najmniej 4 kiery
    d) co najwyżej 1 asa?

12. Na ile sposobów można zbiór złożony z 12 elementów podzielić na 6 rozłącznych podzbiorów 2-elementowych?

13. Na prostej k wybieramy 5 punktów, a na prostej l, równoległej do k, 8 punktów. Ile trójkątów o wierzchołkach w tych punktach można utworzyć?

14. Na płaszczyźnie rysujemy 10 prostych parami równoległych 7 prostych do nich prostopadłych. Ile powstanie prostokątów?

15. Dany jest trójkąt ABC. Bok AC dzielimy na 6 części i punkty podziału łączymy odcinkami z wierzchołkiem B. Bok AB dzielimy na 8 części i punkty podziału łączymy odcinkami z wierzchołkiem C. Ile trójkątów zostanie utworzonych?

16. Dany jest czworokąt wypukły $KLMN$. Na bokach KL, LM, MN, NL wybieramy kolejno 3, 4, 5 i 6 punktów różnych od wierzchołków czworokąta. Oblicz ile można utworzyć trójkątów o wierzchołkach w zbiorze tych 22 punktów (4 wierzchołki czworokąta i 18 dodanych punktów).

17. Z liczb ośmioelementowego zbioru $\{1,2,3,4,5,6,7,9\}$ tworzymy ośmiowyrazowy ciąg, którego wyrazy nie powtarzają się. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że żadne dwie liczby parzyste nie są sąsiednimi wyrazami utworzonego ciągu. Wynik zapisz w postaci ułamka nieskracalnego.

18. 6 osób wsiadło do windy na parterze budynku 12-piętrowego. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że przynajmniej 2 osoby wysiądą na tym samym piętrze. (W innej redakcji: oblicz prawdopodobieństwo, że wśród losowo wybranych 6 osób znajdą się przynajmniej dwie, które obchodzą urodziny w tym samym miesiącu.)

19. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w trzech rzutach symetryczną sześcienną kostką do gry suma kwadratów liczb uzyskanych oczek będzie podzielna przez 3.

20. W pudełku znajduje się 8 piłeczek oznaczonych kolejnymi liczbami naturalnymi od 1 do 8. Losujemy jedną piłeczkę, zapisujemy liczbę na niej występującą, a następnie zwracamy piłeczkę do urny. Tę procedurę powtarzamy jeszcze dwa razy i w ten sposób otrzymujemy zapisane trzy liczby. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania takich piłeczek, że iloczyn trzech zapisanych liczb jest podzielny przez 4. Wynik podaj w postaci ułamka zwykłego.

21. Z urny, w której umieszczono jedenaście kul oznaczonych liczbami od 1 do 11, losujemy n razy po jednej kuli ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że iloczyn liczb na wylosowanych kulach jest podzielny przez 22.

22. Niech A i B będą zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω. Wiadomo, że $P(A \cap B') = \frac{3}{10}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$ i $P(A \cup B) = \frac{9}{10}$. Oblicz $P(A)$ i $P(B)$.

23. Niech A i B będą zdarzeniami losowymi takimi, że $P(B) = P(B')$ i $P(A|B) + P(A|B') = \frac{3}{4}$. Oblicz $P(A)$.

24. $A, B \subset \Omega$ oraz $P(A \cup B) = 0.9$, $P(A - B) = 0.3$ i $P(A \cap B) = 0.4$. Oblicz $P(B)$, $P(A)$ oraz $P(A|B)$.

25. Ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 2n-1, 2n\}$ losujemy dwukrotnie ze zwracaniem jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że iloraz pierwszej z wylosowanych liczb przez drugą liczbę należy do przedziału $(1, 2\rangle$.

26. Rzucamy parą symetrycznych sześciennych kostek do gry. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że iloczyn liczb oczek otrzymanych na obu kostkach będzie liczbą nieparzystą pod warunkiem, że na każdej kostce wypadnie inna liczba oczek.

27. Ze zbioru funkcji $f(x) = ax^2 + c$, gdzie a i c są liczbami całkowitymi z przedziału $\langle -10, 5 \rangle$, losujemy jedną funkcję. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania funkcji, która ma miejsce zerowe. Wynik podaj w postaci ułamka nieskracalnego.

28. Wybieramy losowo jedną z liczb ze zbioru $\{1, 2, 3\}$ i gdy otrzymamy liczbę n, to rzucamy n razy symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej jednego orła. Wynik przedstaw w postaci ułamka nieskracalnego.

29. W jednej urnie jest 6 białych i 6 czarnych kul, w dwóch kolejnych urnach – po 4 czarne i 8 białych, a w trzech pozostałych po 3 białe i 9 czarnych kul. Wybrano losowo jedną urnę, a z niej jedną kulę. Wylosowana kula okazała się czarna. Oblicz prawdopodobieństwo, że pochodzi ona z urny zawierającej 9 kul czarnych.

30. Niech $A \subset \Omega$ i $B \subset \Omega$ będą zdarzeniami niezależnymi. Wykaż, że jeśli $P(A \cup B) = 1$, to jedno z tych zdarzeń jest zdarzeniem pewnym, tj. $P(A) = 1$ lub $P(B) = 1$.

31. Rzucamy cztery razy sześcienną kostką do gry i zapisujemy kolejne wyniki. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia , że otrzymamy ciąg:
    a) różnowartościowy b) rosnący c) niemalejący.

32. Ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ losujemy kolejno ze zwracaniem trzy liczby. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że dokładnie dwie spośród trzech wylosowanych liczb będą równe. Wynik zapisz w postaci ułamka nieskracalnego.

33. W pewnej loterii przygotowano 3 losy wygrywające i n losów pustych. Wyznacz największą liczbę n, dla której prawdopodobieństwo, że pierwsza osoba kupująca dwa losy trafi co najmniej jeden los wygrywający, jest większe niż $\frac{5}{11}$.

34. Spośród wierzchołków 12-kąta foremnego wybieramy losowo trzy. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że trójkąt o tych wierzchołkach będzie prostokątny.

35. Z urny, w której jest 8 kul białych i 10 czarnych, losujemy bez zwracania trzy kule. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wśród wylosowanych kul będzie przynajmniej jedna czarna.

36. Ustawiamy losowo w ciąg liczby 1, 2, …, 8. Oblicz prawdopodobieństwo, że iloczyn dowolnych dwóch sąsiednich liczb będzie liczbą parzystą.

37. W partii 50 żarówek pewna ich liczba jest wadliwa. Z tej partii losowo wybiera się dwie żarówki. Jeśli co najmniej jedna z nich jest wadliwa, partię się odrzuca. Oblicz, ile co najwyżej

może być wadliwych żarówek, aby prawdopodobieństwo odrzucenia partii było nie większe od $0{,}04$.

38. Ze zbioru wszystkich liczb sześciocyfrowych większych niż 222000, w których zapisie dziesiętnym mogą wystąpić tylko cyfry ze zbioru $\{1, 2, 3\}$, losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A, polegającego na wylosowaniu liczby, w której zapisie każde dwie sąsiednie liczby różnią się o 1.

39. (0-5) Operon XI.22
Badając tzw. siłę kiełkowania nasion wysiewa się pewną ich liczbę i oblicza, jaki procent ziaren wykiełkował. Przeprowadzono badania siły kiełkowania pewnego rodzaju nasion. Wyniki tych badań zamieszczono w tabeli.

Liczba wysianych nasion	100	100	150	200	200	250
Liczba nasion, które wykiełkowały	60	66	92	110	106	166

Oblicz na podstawie tabeli siłę kiełkowania tych nasion. Następnie oblicz, ile najmniej tego typu nasion trzeba wysiać, aby z prawdopodobieństwem większym od 0,99 można było stwierdzić, że przynajmniej jedno z nich wykiełkuje.

40. (0-3) Operon XI.22
Uczeń założył, że w poniedziałek, wtorek i środę rozwiąże łącznie 10 zadań, przy czym każdego dnia wykona przynajmniej jedno zadanie. Następnie zapisał na oddzielnych kartkach wszystkie możliwości przypisania dniom konkretnych liczb zadań. Oblicz, ile takich kartek powstało.

41. (0-4) CKE III.22
Egzamin składa się z 15 zadań zamkniętych. Do każdego zadania podano cztery odpowiedzi, z których tylko jedna okazuje się poprawna. Zdający zalicza egzamin, jeśli udzieli poprawnych odpowiedzi w co najmniej 11 zadaniach. Pewien student przystąpił nieprzygotowany do egzaminu i w każdym zadaniu wybierał losowo odpowiedź. Przyjmij, że w każdym zadaniu wybór każdej z odpowiedzi przez studenta jest równo prawdopodobny.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że ten student zaliczył egzamin.

11. Analiza

1. Punkt $P = (10, 2429)$ leży na paraboli o równaniu $y = 2x^2 + x + 2219$. Prosta o równaniu $y = ax + b$ jest styczną do tej paraboli w punkcie P. Oblicz współczynnik b.

2. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Wyznacz równania tych stycznych do wykresu funkcji f, które są równoległe do prostej o równaniu $y = 4x$.

3. Styczna do paraboli o równaniu $y = \sqrt{3}x^2 - 1$ w punkcie $P = (x_0, y_0)$ jest nachylona do osi OX pod kątem 30°. Oblicz współrzędne punktu P.

4. Oblicz pochodną funkcji $f(x) = \frac{3x-1}{x^2+4}$.

5. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = \frac{2x-3}{4x+5}$.

6. Niech P będzie punktem leżącym na hiperboli $y = \frac{1}{x}$. Wykaż, że pole trójkąta utworzonego przez styczną do tej krzywej w punkcie P oraz osie układu współrzędnych nie zależy od wyboru punktu P.

7. Wielomian trzeciego stopnia $W(x)$ ma parami różne pierwiastki x_1, x_2 i x_3. Wykaż, że
$$\frac{1}{W'(x_1)} + \frac{1}{W'(x_2)} + \frac{1}{W'(x_3)} = 0.$$

8. Dana jest funkcja $f(x) = x^2 + 2x + 4$. Do wykresu tej funkcji poprowadzono styczne w punktach $A = (0,4)$ i $B = (-3,7)$ przecinające się w punkcie C. Oblicz pole trójkąta ABC.

9. Wyznacz równania wszystkich prostych, które są jednocześnie styczne do okręgu o równaniu $x^2 + (y+6)^2 = 8$ i do paraboli o równaniu $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$.

10. Wyznacz równania wszystkich prostych, które są jednocześnie styczne do krzywych $y = x^2$ oraz $y = -x^2 + 4x - \frac{5}{2}$.

11. Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x) = \frac{\sin^3 x + 4}{\sin x + 2}$.

12. Oblicz granice funkcji:

    a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2-7x+10}$; b) $\lim\limits_{x\to -3^-} \frac{x+5}{x^2-9}$; c) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{3x-12}$; d) $\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{3x^2-3}{x^3-3x-2}$.

13. Wyznacz wszystkie asymptoty funkcji $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$.

14. Wykaż, że jeśli $a > b \geq 1$, to $\frac{a}{a^3+2} < \frac{b}{b^3+2}$.

15. Wyznacz kąt, pod jakim przecinają się styczne do wykresów funkcji $y = x^2$ i $y = \sqrt[3]{x}$ poprowadzone w punktach wspólnych tych wykresów.

16. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^3 - 3x + 2 = m$ ma dwa pierwiastki ujemne i jeden dodatni.

17. Wykaż, że jeśli liczba x_0 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, to x_0 jest również pierwiastkiem jego pochodnej $W'(x)$.

18. (0-4) CKE X.22

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 1$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \in [-1, 3]$.

Wyznacz zbiór wartości funkcji f.

19. (0-3) CKE III.22

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 1$.

Wyznacz równanie stycznej do wykresu tej funkcji w punkcie $P = (-3, -3)$.

Zapisz obliczenia.

20. (0-4) Materiały CKE

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = x^4 + 0{,}5 \cdot (2x + 1)^4$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Oblicz najmniejszą wartość tej funkcji.

12. Optymalizacja

1. Na paraboli $y = 9 - x^2$ obrano punkt A o obu współrzędnych dodatnich. Punkt B jest obrazem punktu A w symetrii względem osi OY, zaś punkty C i D są rzutami odpowiednio punktów B i A na oś OX. Wyznacz współrzędne punktu A tak, aby pole prostokąta $ABCD$ było największe.

2. Pewien zakład otrzymał zamówienie na wykonanie prostopadłościennego zbiornika (całkowicie otwartego od góry) o pojemności 144 m^3. Dno zbiornika ma być kwadratem. Żaden z wymiarów zbiornika (krawędzi prostopadłościanu) nie może przekraczać 9 metrów. Całkowity koszt wykonania zbiornika ustalono w następujący sposób:
   -100 zł za 1 m^2 dna
   -75 zł za 1 m^2 ściany bocznej.
   Oblicz wymiary zbiornika, dla którego tak ustalony koszt wykonania będzie najmniejszy.

3. Dany jest punkt $A = (a, b)$ leżący na paraboli $y = f(x) = x^2$, dla którego $1 \leq a \leq 2$. Punkt B jest punktem przecięcia stycznej do wykresu funkcji f w punkcie A z osią OX, $C = (2,0)$, zaś D jest punktem przecięcia prostej $x = 2$ ze styczną. Dla jakiego punktu A pole trójkąta BCD jest największe, a dla jakiego punktu A pole to jest najmniejsze?

4. Wykaż, że wśród trójkątów równoramiennych opisanych na okręgu o danym promieniu r najmniejsze pole ma trójkąt równoboczny.

5. Dane są parabola $y = x^2 + 6x + 11$ i prosta $y = x + 1$. Rozważamy wszystkie odcinki AB takie, że punkt A leży na danej paraboli, a punkt B na danej prostej. Oblicz długość najkrótszego z odcinków AB i dla tego odcinka wyznacz współrzędne jego końca leżącego na paraboli.

6. Dane są punkty $A = (0,2)$ i $B = (9,4)$. Na osi OX wyznacz:
   a) taki punkt P, aby suma jego odległości od danych punktów była najmniejsza
   b) taki punkt Q, aby suma kwadratów jego odległości od danych punktów była najmniejsza.

7. Dłuższa podstawa trapezu wpisanego w okrąg o promieniu R jest średnicą tego okręgu. Dla jakiej długości krótszej podstawy trapezu jego pole będzie największe?

8. Rozważmy wszystkie graniastosłupy prawidłowe trójkątne o objętości $V = 2$. Wyznacz długości krawędzi tego z rozważanych graniastosłupów, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze. Oblicz to najmniejsze pole.

9. Rozpatrujemy wszystkie trapezy równoramienne, w które można wpisać okrąg, spełniające warunek: suma długości dłuższej podstawy a i wysokości trapezu jest równa 2.
   a) Wyznacz wszystkie wartości a, dla których istnieje trapez o podanych własnościach.
   b) Wykaż, że obwód L takiego trapezu, jako funkcja długości a dłuższej podstawy trapezu, wyraża się wzorem $L(a) = \frac{4a^2-8a+8}{a}$.
   c) Oblicz tangens kąta ostrego tego spośród rozpatrywanych trapezów, którego obwód jest najmniejszy.

10. Prosta o równaniu $y = a^2x + 3a$ przecina hiperbolę o równaniu $y = \frac{4}{x}$ w dwóch punktach A i B. Wyraź długość odcinka AB w zależności od parametru $a < 0$. Wyznacz równanie prostej, która przecina opisaną w zadaniu hiperbolę tak, aby długość odcinka AB była najmniejsza.

11. Przedstaw liczbę 20 w postaci sumy dwóch składników dodatnich, takich że suma kwadratu pierwszego z nich i sześcianu drugiego była najmniejsza.

12. Punkt $P = (x, x^2 + 2)$ leży wewnątrz kąta wypukłego ABC, gdzie $A = (0,6)$, $B = (2,0)$, $C = (4,12)$. Niech f oznacza sumę kwadratów odległości punktu P od każdego z trzech punktów A, B, C.
    a) Wykaż, że f – jako funkcja zmiennej x, czyli pierwszej współrzędnej punktu P – jest określona wzorem $f(x) = 3x^4 - 21x^2 - 12x + 140$.
    b) Wyznacz dziedzinę funkcji f.
    c) Wyznacz współrzędne takiego punktu P, dla którego funkcja f osiąga wartość najmniejszą.

13. Spośród trapezów równoramiennych, w których długości ramion i krótszej podstawy są równe 4, wybieramy ten, który ma największe pole. Oblicz jaką długość ma dłuższa podstawa tego trapezu.

14. W półkole o promieniu r wpisano prostokąt o największym polu. Oblicz cosinus kąta rozwartego między przekątnymi tego prostokąta.

15. Przez punkt $P = (1,9)$ poprowadzono prostą o współczynniku kierunkowym ujemnym tak, że suma długości odcinków, które ta prosta odcięła na osiach układu współrzędnych, jest najmniejsza. Wyznacz równanie tej prostej.

16. Oblicz obwód trójkąta prostokątnego, w którym jedna z przyprostokątnych ma długość 2 i dla którego stosunek pola koła opisanego na tym trójkącie do pola tego trójkąta jest najmniejszy.

17. Pudełko ma kształt graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego. Wyznacz długość krawędzi podstawy, przy której pole powierzchni pudełka jest najmniejsze, jeśli jego objętość jest równa 36 cm^3.

18. (0-4) CKE X.22

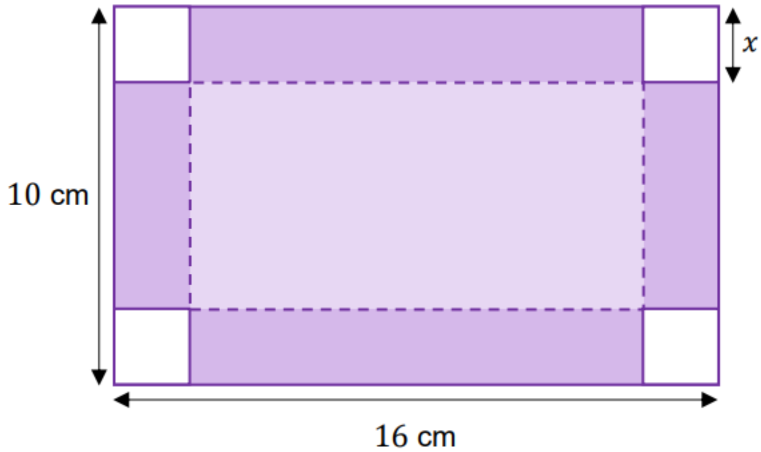
Ciężarówka ma do pokonania trasę długości S km, poruszając się po autostradzie ze stałą prędkością v km/h. Minimalna prędkość dla ciężarówek na autostradzie wynosi 40 km/h, maksymalna – 80 km/h. Wiemy, że litr paliwa kosztuje 8 złotych, a kierowca otrzymuje 42 złote za godzinę swej pracy. Zużycie paliwa w ciągu jednej godziny jazdy autostradą w zależności od prędkości v wyrażone w litrach można opisać funkcją $f(v) = 7 + \frac{v^2}{400}$.

Oblicz, przy jakiej prędkości koszt przejazdu będzie najmniejszy. Zapisz obliczenia.

Wskazówka: przyjmij, że koszt przejazdu jest sumą kosztu paliwa oraz wynagrodzenia kierowcy.

19. (0-6) CKE X.22

Grażyna planuje zrobienie pudełka (bez wieczka) w kształcie prostopadłościanu. W tym celu zamierza wykorzystać prostokątny kawałek tektury o wymiarach 10 cm $\times$ 16 cm, odcinając z każdego rogu kwadrat o boku x cm (zobacz rysunek).



Oblicz wartość x, dla której objętość otrzymanego pudełka będzie największa. Oblicz tę największą objętość pudełka. Zapisz obliczenia.

20. (0-6) CKE X.22

Dany jest okrąg o promieniu R. Rozważamy wszystkie trójkąty spełniające warunki:

- są wpisane w ten okrąg
- mają obwody równe $3R$
- mają jeden z boków dwukrotnie dłuższy od drugiego.

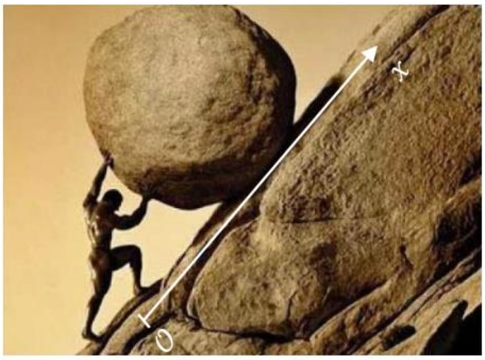
Znajdź trójkąt o możliwie największym polu przy zadanych warunkach. Oblicz jego pole. Zapisz obliczenia.

26. (0-4) Materiały CKE

Syzyf codziennie stoi przed zadaniem wtoczenia ciężkiej kamiennej kuli na szczyt pewnej góry. W chwili $t = 0$ znajduje się on w punkcie O oddalonym od szczytu o 4 km, a położenie x Syzyfa wtaczającego kulę jest opisane równaniem

$x(t) = -t^3 + 16{,}5t^2 + 180t$ dla $t \in [0, 24]$

gdzie x jest wyrażone w metrach, a t – w godzinach.

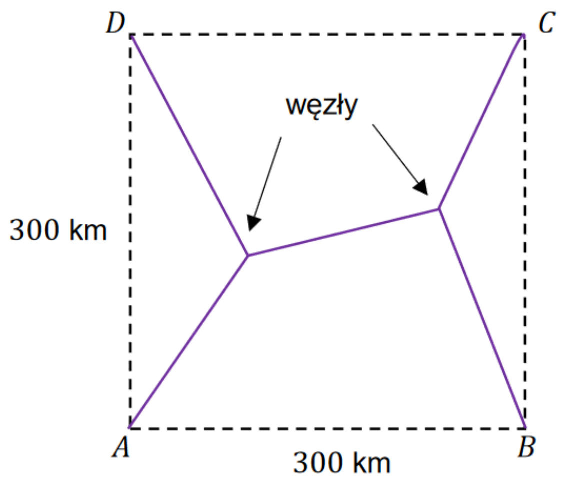


Oś Ox jest skierowana do wierzchołka góry i jest styczna w każdym punkcie do zbocza góry.

Oblicz najmniejszą odległość, na jaką Syzyf zbliży się do wierzchołka góry, oraz maksymalną prędkość, z jaką wtacza kamień pod górę.

21. (0-6) Materiały CKE

Cztery miasta A, B, C i D znajdują się w wierzchołkach kwadratu o boku 300 km. Pewna firma dostała zlecenie na zaprojektowanie sieci dróg, która będzie łączyć każde dwa z tych miast. Sieć ma posiadać dwa węzły, a łączna długość dróg w sieci ma być możliwie najmniejsza. (Przykład sieci dróg z dwoma węzłami, łączącej każde dwa z miast, przedstawiono na poniższym rysunku).



Oblicz, jaka musi być długość najkrótszej takiej sieci dróg i gdzie muszą być zlokalizowane węzły tej sieci.

13. Stereometria

1. Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest kwadrat $ABCD$. Krawędź boczna DS jest wysokością ostrosłupa, a jej długość jest dwa razy większa od długości krawędzi podstawy. Oblicz sinus kąta między ścianami bocznymi ABS i CBS tego ostrosłupa.

2. Podstawą ostrosłupa $ABCS$ jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $AC = BC = 39$, $AB = 30$ i spodek wysokości ostrosłupa należy do jego podstawy. Każda wysokość ściany bocznej poprowadzona z wierzchołka S ma długość 26. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

3. Przekrój ostrosłupa prawidłowego trójkątnego $ABCS$ płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołek S i wysokości dwóch ścian bocznych jest trójkątem równobocznym. Krawędź boczna tego ostrosłupa ma długość $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

4. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wszystkie krawędzie mają tę sama długość. Odległość środka podstawy od ściany bocznej jest równa 1. Oblicz objętość ostrosłupa.

5. Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny. Kąt α jest kątem między sąsiednimi krawędziami bocznymi, a kąt β – kątem między sąsiednimi ścianami bocznymi tego ostrosłupa. Wykaż, że $\cos\beta = \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha+1}$.

6. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość a. Ściany boczne są trójkątami ostrokątnymi. Miara kąta między ścianami bocznymi jest równa 2α. Wyznacz objętość tego ostrosłupa.

7. Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCDS$ o podstawie $ABCD$. W trójkącie równoramiennym ASC stosunek długości podstawy do długości ramienia jest równy $6:5$. Oblicz sinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.

8. Dany jest sześcian $ABCDA'B'C'D'$ o krawędzi długości 2. Oblicz pole przekroju tego sześcianu płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołki A, D' i środek krawędzi BC.

9. Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest prostokąt o bokach długości $|AB| = 32$ i $|BC| = 18$. Ściany boczne ABS i CDS są trójkątami przystającymi i każda z nich jest nachylona do płaszczyzny podstawy ostrosłupa pod kątem α. Ściany boczne BCS i ADS są trójkątami przystającymi i każda z nich jest nachylona do płaszczyzny podstawy ostrosłupa pod kątem β. Miary kątów α i β spełniają warunek $\alpha + \beta = 90°$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

10. W ostrosłupie $ABCS$ podstawa ABC jest trójkątem równoramiennym o ramionach AB i AC długości 4 i kącie między nimi 30°. Punkt E – środek krawędzi AB – jest spodkiem wysokości tego ostrosłupa, a krawędź boczna CS tworzy z podstawą kąt 60°. Ostrosłup przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź AB i mającą z przeciwległą krawędzią boczną CS wspólny punkt D. Oblicz pole otrzymanego przekroju wiedząc, że z podstawą tworzy on kąt 75°. Podaj dokładny wynik obliczeń.

11. Ostrosłup prawidłowy sześciokątny o krawędzi podstawy a przecięto płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołek tego ostrosłupa i krótszą przekątną jego podstawy. Cosinus kąta α zawartego między płaszczyzną przekroju a płaszczyzną podstawy jest równy $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

12. W ostrosłupie $ABCDS$ podstawą jest kwadrat $ABCD$. Krawędź boczna DS jest wysokością tego ostrosłupa, a jej długość jest równa długości krawędzi podstawy. Punkty E i F są odpowiednio środkami krawędzi AD i CD. Płaszczyzna przechodząca przez punkty E i F oraz prostopadła do krawędzi bocznej BS przecina tę krawędź w punkcie G. Oblicz miarę kąta EGF.

13. W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym krawędź podstawy ma długość 4 cm. Przez dłuższą przekątną podstawy przechodzi płaszczyzna, która przecina ścianę boczną równoległą do tej przekątnej. Pole przekroju graniastosłupa tą płaszczyzną wynosi 24 cm^2. Wyznacz miarę kąta nachylenia płaszczyzny przekroju do płaszczyzny podstawy.

14. Wykaż, że w dowolnym czworościanie cztery środkowe przecinają się w jednym punkcie, który dzieli je w stosunku 3: 1. (Środkową w czworościanie nazywamy odcinek łączący jego wierzchołek ze środkiem przeciwległej ściany)

15. W czworościanie $ABCD$ kąty płaskie przy wierzchołku D są proste. Niech S_{XYZ} oznacza pole trójkąta XYZ. Wykaż, że $S_{ABC}^2 = S_{ABD}^2 + S_{ACD}^2 + S_{BCD}^2$.

16. Objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa $12\sqrt{3}$, a pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa jest równe 36. Oblicz sinus kąta, jaki tworzy przekątna ściany bocznej z sąsiednią ścianą boczną.

17. W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość 4, a wysokość jest równa 6. Oblicz sinus kąta między przekątnymi ścian bocznych wychodzącymi z jednego wierzchołka.

18. Trójkąt ABC jest podstawą prawidłowego ostrosłupa $ABCS$, którego krawędź boczna ma długość 10. Punkt D jest środkiem wysokości SO ostrosłupa oraz $AD = 2\sqrt{13}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

19. Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest trójkąt równoramienny o podstawie $AB = b$ i kącie α między ramionami. Krawędź CD jest wysokością ostrosłupa, a kąt nachylenia ściany ABD do podstawy ostrosłupa jest równy β. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

20. Podstawą ostrosłupa jest kwadrat $ABCD$ o boku długości 25. Ściany boczne ABS i BCS mają takie same pola, każde równe 250. Ściany boczne ADS i CDS mają takie same pola, każde równe 187,5. Krawędzie AS i CS mają równe długości. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

21. Podstawą ostrosłupa $ABCS$ jest trójkąt równoramienny ABC. Krawędź AS jest wysokością ostrosłupa oraz $AS = 8\sqrt{210}$, $BS = 118$, $CS = 131$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

22. (0-6) CKE arkusz pokazowy III.2022

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCDS$ o podstawie $ABCD$ i polu powierzchni bocznej równym P. Kąt między wysokościami sąsiednich ścian bocznych poprowadzonych z wierzchołka S ma miarę 2α.

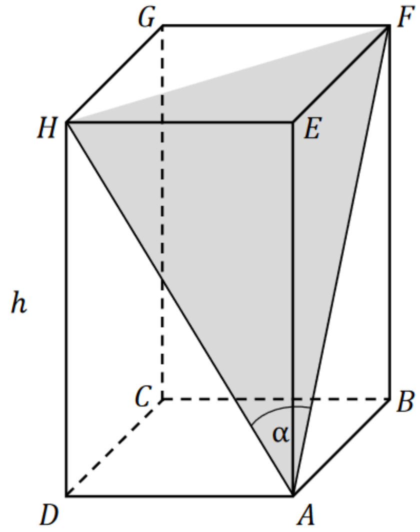
Objętość tego ostrosłupa jest równa $\sqrt{k \cdot P^3 \cdot \sin\alpha \cdot \cos(2\alpha)}$, gdzie k jest stałym współczynnikiem liczbowym.

Oblicz współczynnik k.

23. (0-5) CKE V.22

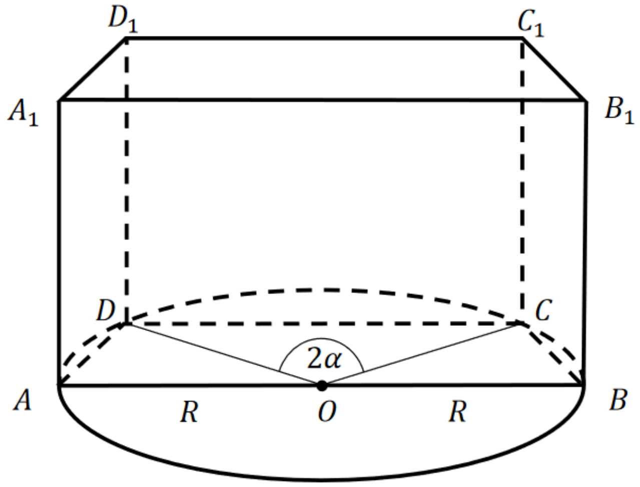
Dany jest graniastosłup prosty $ABCDEFGH$ o podstawie prostokątnej $ABCD$. Przekątne AH i AF ścian bocznych tworzą kąt ostry o mierze α takiej, że $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ (zobacz rysunek). Pole trójkąta AFH jest równe $26{,}4$.

Oblicz wysokość h tego graniastosłupa.



24. (0-5) CKE VI.22

Podstawą graniastosłupa prostego $ABCDA_1B_1C_1D_1$ jest trapez równoramienny $ABCD$ wpisany w okrąg o środku O i promieniu R. Dłuższa podstawa AB trapezu jest średnicą tego okręgu, a krótsza – cięciwą odpowiadającą kątowi środkowemu o mierze 2α (zobacz rysunek). Przekątna ściany bocznej zawierającej ramię trapezu jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem o mierze α. Wyznacz objętość tego graniastosłupa jako funkcję promienia R i miary kąta α.



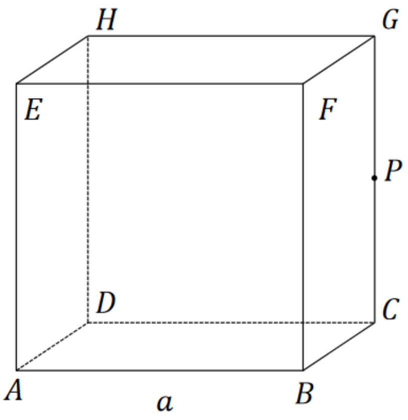
25. (0-5) Informator CKE

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDE$ punkt O jest środkiem symetrii podstawy ostrosłupa. Stosunek obwodu podstawy $ABCD$ do sumy długości wszystkich krawędzi ostrosłupa jest równy $1:5$. Przez przekątną AC podstawy i środek S krawędzi bocznej BE poprowadzono płaszczyznę.

Oblicz stosunek pola otrzymanego przekroju do pola podstawy ostrosłupa oraz miarę kąta BSO (w zaokrągleniu do $1°$).

26. (0-3) Informator CKE

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi długości a. Punkt P jest środkiem krawędzi CG tego sześcianu (zobacz rysunek poniżej).

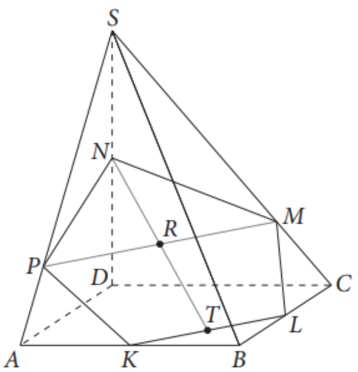


$$|PG| = |PC|$$

Oblicz odległość wierzchołka C od płaszczyzny zawierającej punkty B, D oraz P.

27. (0-6) Nowa Era 2021

Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest kwadrat $ABCD$ o boku długości $2\sqrt{2}$. Krawędź boczna DS jest wysokością tego ostrosłupa, a jej długość jest równa 8. Ostrosłup przecięto płaszczyzną przechodzącą przez punkty: K, L i N, które są odpowiednio środkami krawędzi: AB, BC i DS. Otrzymany w ten sposób przekrój to pięciokąt $KLMNP$ (jak na rysunku). Przekątna PM tego pięciokąta oraz odcinek TN, łączący wierzchołek N ze środkiem przeciwległego boku KL, przecinają się w punkcie R.



Oblicz odległość punktu R od przekątnej BD podstawy ostrosłupa.

14. Wartość bezwzględna

1. Dla jakich wartości parametru m rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x + my = 1 \\ 2x - y = m \end{cases}$ jest para liczb (x, y) spełniająca nierówność $|x - y| \leq 1$?

2. Dana jest funkcja $f(x) = |x + 4| - |x - 2|$, gdzie $x \in \mathbb{R}$. Naszkicuj jej wykres i na tej podstawie określ liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od parametru m.

3. Naszkicuj wykres funkcji $y = f(x)$. Na tej podstawie określ liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od parametru m, jeśli:
   a) $f(x) = |2^x - 4|$ dla $x \in \mathbb{R}$; b) $f(x) = \sin x + 2|\sin x|$ dla $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

4. Wyznacz liczbę rozwiązań równania $(x - 2) \cdot \sqrt{2 + 2x + \frac{1}{2}x^2} = m$ w zależności od wartości parametru m.

5. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór wszystkich punktów, których współrzędne x, y spełniają nierówność $\log_{\frac{1}{2}}(|y| - 1) \geq x$.

6. Rozwiąż nierówność $|2x + 4| + |x - 1| \leq 6$.

7. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{|x+2|}{x+2} - x + 3|x - 1|$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq -2$. Wyznacz zbiór wartości tej funkcji.

8. Dla jakich wartości parametru a równanie $\big||x| - 2 + a\big| = 3$ ma dokładnie trzy pierwiastki?

9. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \left|\frac{3-x}{x+1}\right|$. Wyznacz wartości parametru m, dla których równanie $f(x) = m$ ma jedno rozwiązanie.

10. Wyznacz wszystkie wartości parametru a, dla których równanie
$$|x - a^3| + |x - 4| = |4 - a^3|$$
ma co najmniej 13 rozwiązań całkowitych.

11. Rozwiąż nierówność $|2x - 5| - |x + 4| \leq 2 - 2x$.

12. Wyznacz najmniejszą liczbę całkowitą spełniającą nierówność
$$\sqrt{x^2 - 8x + 16} - 3x < |2x - 4|.$$

13. (0-4) Materiały CKE

Narysuj wykres funkcji $f(x) = \frac{|x^2-9|}{3-x}$.
Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $f(x) = m$ nie ma rozwiązania. Zapisz obliczenia.

14. (0-3) Materiały CKE

Rozwiąż nierówność $2x^2 + x|2x - 1| \leq 3$.

15. (0-3) CKE V.2022

Rozwiąż równanie:

$$|x - 3| = 2x + 11$$

16. (0-6) Informator CKE

Dany jest układ równań

$$\begin{cases} mx + y = m^2 \\ 4x + my = 8 \end{cases} \quad (1)$$

z niewiadomymi x i y oraz parametrem m.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których układ jest oznaczony, a para liczb (x, y) będąca rozwiązaniem układu spełnia warunek $|x + y| < 2$.

15. Potęgi i logarytmy

1. (0-3) CKE arkusz pokazowy III.2022

Dane są liczby $a = \log_2 3$ oraz $b = \log_3 7$.

Wyraź $\log_4 49$ za pomocą liczb a oraz b.

2. (0-3) Informator CKE

Dane są liczby $a = (\log_{\sqrt{5}} 2) \cdot \log_2 25$ i $b = \frac{\log_5 6}{\log_5 8}$.

Oblicz a^{b+1}.

3. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór par (x, y) spełniających równanie

$$\log_2|y| = 2 - \log_2 x.$$

4. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór wszystkich punktów, których współrzędne x, y spełniają nierówność $\log_{\frac{1}{2}}(|y| - 1) \geq x$.

5. Rozwiąż nierówność:

a) $4^{x+1} - 2^{2x} \leq 96$ b) $\log_3(x^2 + 2) - \log_3(x - 2) \geq 2$.

6. Niech $m = \log_{21} 7$. Wykaż, że $\log_7 27 = \frac{3(1-m)}{m}$.

7. Rozwiąż nierówność $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 1) + \log_{\frac{1}{3}}(5 - x) > \log_{\frac{1}{3}}(3x + 3)$.