

Matematyka 2 (Wydział Architektury)

Lista 1 — geometria analityczna w trzech wymiarach

1. Rozważmy trójkąt o wierzchołkach $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 3, 3)$, $C = (1, 4, -3)$. Jakie są długości jego boków? Czy jest on prostokątny?
2. Mamy w przestrzeni punkty $A = (1, -4, 0)$, $B = (5, 4, -4)$. Jakie są współrzędne punktu C , jeśli wiadomo, że leży on na odcinku AB , a ponadto
 - a) dzieli on odcinek AB na pół,
 - b) odcinek AC jest trzy razy dłuższy niż BC .
3. Wyznaczyć wektory będące środkowymi trójkąta ABC , wiedząc że $\vec{AB} = [2, 0, 2]$, $\vec{AC} = [0, 2, 4]$.
4. Ile muszą wynosić liczby a i b , aby punkty $(0, 2, 1)$, $(1, 2, 3)$ i $(a, b, 7)$ leżały na jednej prostej?
5. Poszukać w literaturze lub innych źródłach informacji o tym, jak się oblicza wyznaczniki macierzy kwadratowych 2×2 oraz 3×3 . Następnie obliczyć następujące wyznaczniki:

a) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

6. Wyznaczyć kąty wewnętrzne trójkąta o wierzchołkach $(2, -1, 3)$, $(1, 1, 1)$ i $(0, 0, 5)$.
7. Ile wynosi kąt między przekątnymi sąsiednich ścian sześcianu? Warto rozwiązać zadanie na dwa sposoby: raz korzystając z rachunku wektorowego, a raz nie.
8. Dla jakich wartości t trójkąt o wierzchołkach $A = (0, 0, 0)$, $B = (3, 4, 0)$, $C = (3t, 4t, 1 + t)$ będzie prostokątny?
9. Znaleźć wektor, który ma długość 1 i z wektorami $\vec{u} = [1, 0, 0]$ oraz $\vec{v} = [1, \sqrt{3}, 0]$ tworzy kąt 60° .
10. Znaleźć wektor, który ma długość 1 i jest prostopadły zarówno do wektora $\vec{u} = [1, -2, 0]$, jak i $\vec{v} = [0, 3, -2]$. Ile jest takich wektorów?
11. Obliczyć pole trójkąta o wierzchołkach $(0, 0, 0)$, $(1, 2, 2)$ i $(-4, 0, 2)$.
12. Obliczyć objętość równoległościanu $ABCD A' B' C' D'$, gdzie $A = (1, 0, 3)$, $B = (1, 2, 0)$, $D = (3, 0, 4)$, $A' = (0, -1, 3)$.
13. Jak dobrać parametr p , aby punkty $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 2)$, $(2, 1, 1)$ i (p, p, p) leżały na jednej płaszczyźnie? A dla jakiej wartości p będą one wierzchołkami czworościanu o objętości 1?
14. Wyznaczyć równanie płaszczyzny, która:
 - a) zawiera punkt $(-2, 1, 2)$ i jest równoległa do płaszczyzny o równaniu $y = x$;
 - b) zawiera punkty $(1, 1, 1)$, $(3, 5, 0)$, $(-2, 0, 2)$;
 - c) zawiera proste o równaniach $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-1}$ oraz $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{-1}$;
 - d) zawiera proste o równaniach $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{-1}$ oraz $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{-1}$.
15. Wyznaczyć (w postaci kierunkowej i parametrycznej) równanie prostej, która:

- a) zawiera punkt $(-2, 0, 2)$ i jest prostopadła do płaszczyzny o równaniu $x + y + 2z = 1$;
- b) zawiera punkt $(-2, 0, 2)$ i jest równoległa do płaszczyzny o równaniu $x + y + 2z = 1$ (jest wiele takich prostych, wystarczy znaleźć jedną z nich);
- c) jest częścią wspólną płaszczyzn o równaniach $6x + 2y - z = 9$ oraz $3x + 2y + 2z = 12$.

16. Ustalić, czy dane dwie figury mają punkty wspólne. Jeśli tak, to wyznaczyć te punkty.

- a) Proste o równaniach $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-4}{2}$ oraz $\frac{x+1}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+4}{-8}$.
- b) Prosta o równaniu $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-5}{3}$ i płaszczyzna o równaniu $x + y - z + 3 = 0$.
- c) Prosta o równaniu $\frac{x+3}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$ i płaszczyzna o równaniu $x + y + 3z = 0$.
- d) Płaszczyzny o równaniach $x = y$ i $y = z$.

17. Pod jakim kątem prosta o równaniu $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+2}{-3}$ przecina płaszczyznę o równaniu $x - z = 0$?

18. Pod jakim kątem przecinają się płaszczyzny o równaniach $x - 2y + 3z = 5$ i $2x + y - z = -3$?

19. Znaleźć rzut prostokątny

- a) punktu $(1, 1, 0)$ na płaszczyznę $x - y + 3z - 1 = 0$;
- b) punktu $(2, 1, 1)$ na prostą $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{1}$;
- c) prostej $\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$ na płaszczyznę $2x - z + 3 = 0$.

20. Obliczyć (nie korzystając z gotowych wzorów) odległość

- a) punktu $(1, 4, 2)$ od płaszczyzny $2x - y + z - 2 = 0$;
- b) punktu $(2, 1, 2)$ od prostej $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{-1}$;
- c) płaszczyzn równoległych $x - 2y + 2z - 3 = 0$ i $-x + 2y - 2z + 6 = 0$;
- d) prostych równoległych $\frac{x+2}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$ i $\frac{x-1}{-4} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-2}$;
- e) prostych skośnych $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{-2}$ i $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{1}$;
- f) prostej $\frac{x-3}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$ od płaszczyzny $-2x + y + 3 = 0$.

21. Znaleźć punkt symetryczny do punktu $(1, 2, 0)$ względem

- a) punktu $(2, 2, 1)$;
- b) prostej $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1}$;
- c) płaszczyzny $x + y - 2z + 1 = 0$.