Matematyka 2 (Wydział Architektury)

Lista 2 — funkcje dwóch zmiennych i ich pochodne

1. Wyznaczyć i narysować dziedziny funkcji:

   a) $z = \dfrac{3x}{2x - 5y}$

   b) $z = \dfrac{\arcsin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

   c) $z = \ln\left(\dfrac{x^2 + y^2 - 4}{9 - x^2 - y^2}\right)$

   d) $z = \dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{arctg}(xy) - \frac{\pi}{4}}}$

   e) $z = \dfrac{1}{\sqrt{1 - |x| - |y|}}$

   f) $z = \ln(y - \sqrt{4x - x^2})$

2. Opisać we współrzędnych biegunowych zbiory punktów (x, y) spełniających poniższe warunki, a następnie naszkicować te obszary. Dla przypomnienia, związki między współrzędnymi kartezjańskimi (x, y) a współrzędnymi biegunowymi (r, α) są następujące:

$$x = r\cos\alpha,$$
$$y = r\sin\alpha,$$
$$x^2 + y^2 = r^2,$$

   a interpretacja jest taka r jest odległością punktu od początku układu współrzędnych (w linii prostej), natomiast α to kąt między wektorem wodzącym punktu a dodatnią półosią OX.

   a) $x^2 + y^2 \leq 4$

   b) $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$

   c) $x^2 + y^2 \leq 4$, $x \geq 0$

   d) $x^2 + y^2 \leq 4$, $y \leq x\sqrt{3}$

   e) $x^2 + y^2 - 2y \leq 0$

   f) $y \leq x^2 + y^2 \leq x$, $y \geq 0$

   g) $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$

   h) $(x^2 + y^2)^2 \leq x^2 - y^2$

3. Naszkicować powierzchnie o zadanych równaniach (czasem warto zapisać te równania z wykorzystaniem współrzędnych biegunowych)

   a) $z = x^2 + y^2$

   b) $z = x^2 - y^2$

   c) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

   d) $z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$

   e) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

   f) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

   g) $x^2 + y^2 = 4$

   h) $x^2 + y^2 = 2y$

4. Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe (pierwszego i drugiego rzędu) poniższych funkcji. Pochodne mieszane obliczyć w obu kolejnościach i sprawdzić, że faktycznie są równe:

   a) $f(x, y) = x^4y^4$

   b) $f(x, y) = x + \dfrac{x}{y}$;

   c) $f(x, y) = \dfrac{x}{x + y}$

   d) $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$;

   e) $f(x, y) = xe^{xy}$;

   f) $f(x, y) = y\ln(xy)$.

5. Wyznaczyć wszystkie ekstrema lokalne następujących funkcji (ustalając przy tym, które z nich to maksima, a które to minima):

   a) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y$;

   b) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$;

   c) $f(x, y) = x^4 - 2x^2 + 4xy + y^4 - 2y^2$;

   d) $f(x, y) = \dfrac{8}{x} + \dfrac{x}{y} + y, \quad (x, y > 0)$;

   e) $f(x, y) = xy^2(12 - x - y), \quad (x, y > 0)$;

   f) $f(x, y) = (2x + y^2)e^x$;

   g) $f(x, y) = (\cos x + \cos y)^2 + (\sin x + \sin y)^2$;

   h) $f(x, y) = (5x + 7y - 25)e^{-(x^2+xy+y^2)}$.

6. Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji f na zbiorze D, jeśli:

   a) $f(x,y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy, \quad D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \le y \le 4\big\};$

   b) $f(x,y) = x^2 + y^2, \quad D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \le 2\big\};$

   c) $f(x,y) = xy^2 + 4xy - 4x, \quad D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -3 \le x \le 3, -3 \le y \le 0\big\};$

   d) $f(x,y) = x^4 + y^4, \quad D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 9\big\}.$

7. Jakie równanie ma płaszczyzna styczna do wykresu $z = x^2\sqrt{y+1}$ w punkcie $(1,3,2)$?

8. Korzystając z metod rachunku różniczkowego, znaleźć na płaszczyźnie $x + 2y - 3z = 6$ punkt położony najbliżej początku układu współrzędnych. A jak można by zrobić to zadanie bez rachunku różniczkowego?

9. Wśród wszystkich prostopadłościanów wpisanych w kulę o promieniu R znaleźć ten, który ma największą objętość.

10. Jakie powinny być wymiary prostopadłościennej otwartej wanny o pojemności V, aby ilość blachy zużytej do jej zrobienia była najmniejsza?

11. Prostopadłościenny magazyn ma mieć kubaturę 216 m^3. Do budowy ścian jego ścian użyte zostaną płyty w cenie 30 zł/m^2, podłogi będą kosztować 40 zł/m^2, a sufit — 20 zł/m^2. Jakie wymiary powinien mieć magazyn, aby koszt jego budowy był najmniejszy?