

Matematyka 2 (Wydział Architektury)

Lista 3 — całki podwójne

1. Obliczyć całki $\int f(x, y)dx$ i $\int f(x, y)dy$ dla następujących funkcji:

a) $f(x, y) = x^3y^5$;

b) $f(x, y) = x^y$;

c) $f(x, y) = x \cos y + y \cos x$;

d) $f(x, y) = xye^{x^2y}$;

2. Narysować obszary całkowania i obliczyć następujące całki iterowane:

a) $\int_1^4 dx \int_x^{x^2} \frac{y}{x^2} dy$.

b) $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} xy dx$;

c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int_0^x \sin(x+y) dy$;

d) $\int_1^4 dx \int_x^{2x} x^2 \sqrt{y-x} dy$;

3. Zapisać całkę $\iint_D f(x, y) dx dy$ jako całkę iterowaną, jeśli obszar D jest ograniczony następującymi krzywymi:

a) $x^2 + y = 2, \quad y^3 = x^2$;

b) $x^2 - y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 3 \quad (x \geq 0)$.

4. Zamienić kolejność całkowania w następujących całkach iterowanych:

a) $\int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy$;

b) $\int_0^3 dx \int_{\frac{2}{9}x^2}^{\frac{2}{3}x} f(x, y) dy$;

c) $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy$;

d) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} dy \int_{-1}^{\operatorname{tg} y} f(x, y) dx$.

5. Obliczyć następujące całki podwójne (jeśli obszar jest podany jako zestaw krzywych, chodzi o obszar ograniczony tymi krzywymi):

a)

$$\iint_D xy^2 dx dy, \quad D : y = x, y = 2 - x^2;$$

b)

$$\iint_D x^2 y dx dy, \quad D : y = -2, y = \frac{1}{x}, y = -\sqrt{-x};$$

c)

$$\iint_D (xy + 4x^2) dx dy, \quad D : y = x + 3, y = x^2 + 3x + 3;$$

d)

$$\iint_D e^{\frac{x}{y}} dx dy, \quad D : y = \sqrt{x}, x = 0, y = 1;$$

e)

$$\iint_D e^{x^2} dx dy, \quad D : y = 0, y = 2x, x = \sqrt{\ln 3};$$

f)

$$\iint_D y^2 e^{xy} dx dy, \quad D : y = x, x = 1, y = 0;$$

6. Obliczyć następujące całki iterowane, zamieniając kolejność całkowania.

a)

$$\int_{-2}^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} x e^{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx;$$

b)

$$\int_0^1 dx \int_x^1 \sqrt{1 + \frac{x}{y}} dy;$$

c)

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} dy \int_y^{\sqrt{\pi}} \sin x^2 dx;$$

d)

$$\int_0^4 dx \int_0^{x^2} \frac{y^3}{4 - \sqrt{y}} dy;$$

7. Korzystając ze współrzędnych biegunowych, obliczyć następujące całki podwójne:

a)

$$\iint_D xy^2 dx dy, \quad D = \{x^2 + y^2 \leq 4\};$$

b)

$$\iint_D y^2 e^{(x^2+y^2)} dx dy, \quad D = \{x^2 + y^2 \leq 1, y \geq x\};$$

c)

$$\iint_D \frac{8xy}{x^2 + y^2} e^{x^2+y^2} dx dy, \quad D = \{x^2 + y^2 \leq x; y \geq 0\};$$

d)

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \quad D = \{0 \leq y \leq x^2 + y^2 \leq x\};$$

e)

$$\iint_D \arctg \frac{y}{x} dx dy, \quad D = \{x^2 + y^2 + 4y < 0, x \leq 0, y \leq x\sqrt{3}\};$$

8. Naskicować figury ograniczone zadanymi krzywymi oraz obliczyć ich pola, korzystając z faktu, że pole powierzchni obszaru D jest równe całce $\iint_D 1 dx dy$.

a) $x^2 + y^2 = 2, y = 0, y = x\sqrt{x}$;

b) $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$;

c) $(x^2 + y^2)^2 = 2x^3$;

d) $(x^2 + y^2) = 2x, x^2 + y^2 = 4x, y = x, y = 0$.

9. Naskicować bryły ograniczone następującymi powierzchniami i obliczyć ich objętości:

a) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, z = -3 + \sqrt{x^2 + y^2}$; b) $z = 4 - x^2 - y^2, z = -4 + x^2 + y^2$;

c) $z = 0, x^2 - 2x + y^2 = 0, z = \sqrt{x^2 + y^2}$; d) $x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 - 2x = 0$.

10. Obliczyć pola powierzchni wyciętych:

a) walcem $x^2 + y^2 = 2$ z paraboloidy hiperbolicznej $z = xy$;

b) walcem $x^2 + y^2 = 1$ z walca $x^2 + z^2 = 1$;

c) walcem $x^2 + y^2 = 2x$ ze sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 4$;

d) walcem $x^2 + y^2 = 1$ ze stożka $y^2 + z^2 = x^2$.

11. Obliczyć masę koła o promieniu R , w którym gęstość jest wprost proporcjonalna (ze współczynnikiem proporcji γ) do:
- kwadratu odległości od ustalonej średnicy;
 - kwadratu odległości od ustalonego punktu leżącego na brzegu.
12. Obliczyć masę kwadratu o boku a , w którym gęstość jest wprost proporcjonalna (ze współczynnikiem proporcji γ) do:
- kwadratu odległości od środka;
 - odległości od ustalonego boku;
 - odległości od ustalonej przekątnej.
13. Wyznaczyć środki masy następujących figur jednorodnych:
- Trójkąt równoboczny o boku a .
 - Wycinek koła o promieniu R i kącie α .
14. Wyznaczyć środek masy półkola o promieniu R , jeśli jego gęstość jest wprost proporcjonalna (ze współczynnikiem γ) do odległości od:
- środka;
 - podstawy.