Matematyka 2 (Wydział Architektury)

Lista 4 — izometrie płaszczyzny i grupy symetrii

---

1. Dany jest kwadrat $ABCD$. Wykorzystując siatkę kwadratów, wyznaczyć izometrię będącą złożeniem:

   a) $O_C^{90^\circ} O_A^{90^\circ}$,

   b) $O_D^{90^\circ} O_C^{90^\circ} O_B^{90^\circ} O_A^{90^\circ}$,

   c) $R_{CD} O_C^{90^\circ} O_A^{90^\circ}$,

   d) $O_B^{90^\circ} R_{AB} O_A^{90^\circ}$,

   e) $H_B R_{AC} H_A$,

   f) $H_C R_{BD} H_A$.

2. Dany jest trójkąt równoboczny ABC o bokach $a = BC, b = AC, c = AB$. Wykorzystując siatkę trójkątów, wyznaczyć izometrię będącą złożeniem:

   a) $R_a R_b R_a$,

   b) $R_c R_b R_a$,

   c) $R_b O_B^{60^\circ} R_a$,

   d) $O_B^{60^\circ} R_c O_A^{60^\circ}$.

3. Dany jest trapez prostokątny $ABCD$ o kącie prostym przy wierzchołkach A i D, kątach 45° i 135° przy wierzchołkach B i C oraz taki, że $AD = DC$. Wykorzystując siatkę kwadratów, wyznaczyć izometrię będącą złożeniem:

   a) $O_B^{90^\circ} R_{AB} T_{AD}$,

   b) $R_{AB} O_D^{90^\circ} O_A^{90^\circ}$,

4. Dany jest romb $ABCD$ o kącie 120° przy wierzchołku A. Wykorzystując siatkę trójkątów, wyznaczyć izometrię będącą złożeniem:

   a) $R_{BC} O_D^{60^\circ} O_A^{120^\circ}$,

   b) $O_C^{-120^\circ} R_{BD} G_{AC}^{l_{AC}}$.

5. Wyrażając izometrie za pomocą odbić, wyznaczyć poniższe złożenia dwóch izometrii. Zastanowić się też, jak zmiana kolejności wpłynie na wynik złożenia. Zastanowić się też, czy wynik zależy od wzajemnego położenia istotnych obiektów (np. czy któryś z zadanych punktów leży na którejś z zadanej prostych, albo czy występują jakieś równoległości/prostopadłości).

   a) Dwa obroty..

   b) Obrót i przesunięcie

   c) Odbicie i półobrót (symetria środkowa).

   d) Odbicie i obrót o kąt inny niż 180°.

   e) Odbicie i przesunięcie.

   f) Odbicie i odbicie z poślizgiem.

   g) Obrót i odbicie z poślizgiem.

   h) Przesunięcie i odbicie z poślizgiem.

   i) Dwa odbicia z poślizgiem.

6. Wyznaczyć izometrię będącą złożeniem trzech odbić względem trzech różnych prostych, z których żadne dwie nie są równoległe ani prostopadłe.

7. Rozwiązać jeszcze raz następujące zadania z tej listy, tym razem korzystając (od początku do końca albo pomocniczo na dalszych etapach) z rozkładu izometrii na odbicia:

   a) zadanie 1b,
   b) zadanie 3a,
   c) zadanie 4a.

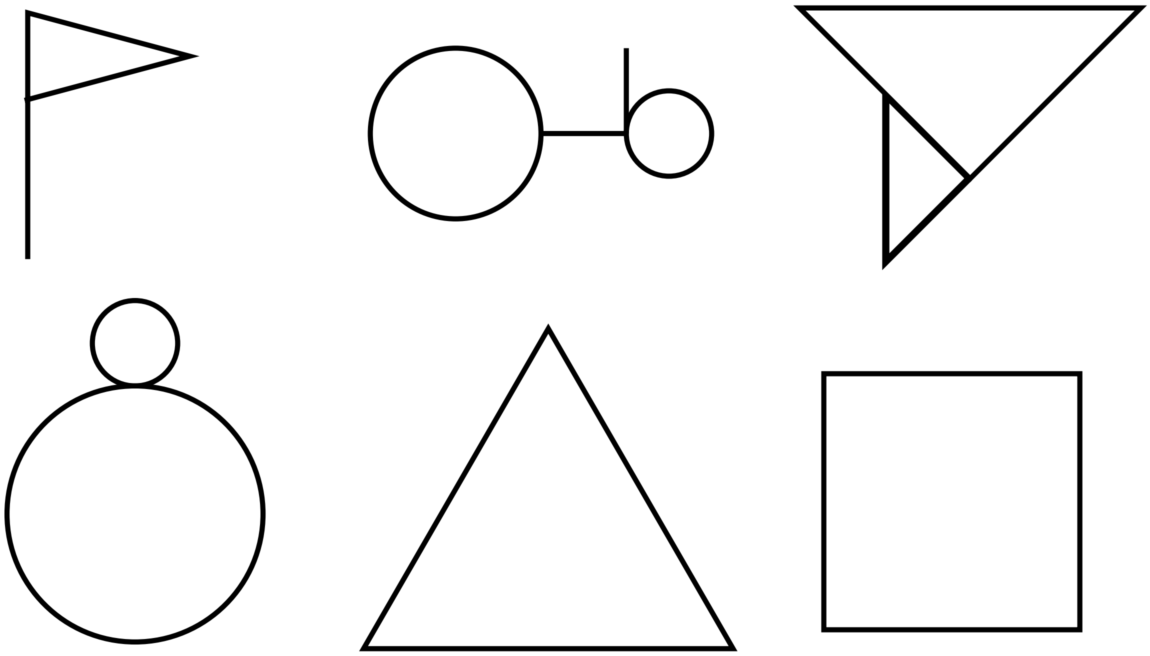
8. Izometrię nazywamy *parzystą* (lub *zachowującą orientację*), jeśli można ją wyrazić jako złożenie parzystej liczby odbić, a *nieparzystą* (lub *zmieniającą orientację*), jeśli nie można.

   a) Dlaczego jest to „sensowna" definicja, czyli dlaczego żadna izometria nie jest jednocześnie parzysta i nieparzysta?
   b) Które z czterech podstawowych typów izometrii są parzyste, a które nieparzyste?
   c) Dlaczego złożenie dwóch izometrii parzystych też jest izometrią parzystą? A jak będzie ze złożeniem dwóch izometrii nieparzystych? A parzystej z nieparzystą?

9. Wyznaczyć następujące złożenia izometrii. Jeśli wynik zależy od danych punktów, prostych, kątów i wektorów (np. od tego, czy punkt leży na prostej, albo czy dwie proste są równoległe/prostopadłe) itp., rozważyć co najmniej przypadek najbardziej ogólny (żadnych punktów wspólnych, równoległości ani prostopadłości), a najlepiej wszystkie. Przed przystąpieniem do składania warto zastanowić się, jakiego typu izometrię najprawdopodobniej otrzymamy (na podstawie tego, co ustaliliśmy w zadaniach 5 i 8).

   a) $H_A T_u H_A$,
   b) $T_u H_A T_u$,
   c) $O_A^\alpha T_u O_A^\alpha$,
   d) $O_A^\alpha T_u O_A^{-\alpha}$,
   e) $T_u R_l T_{-u}$,
   f) $R_l O_A^\alpha R_l$,
   g) $O_A^\alpha R_l O_A^\alpha$,
   h) $O_A^\alpha R_l O_A^{-\alpha}$.

10. Uzupełnić daną figurę na 8 sposobów, aby otrzymać figury o następujących grupach symetrii: $C_1, C_2, C_3, C_4, D_1, D_2, D_3, D_4$.



11. Wykorzystując daną figurę jako motyw, narysować 7 pasów o wszystkich możliwych grupach symetrii. Zaznaczyć obszary fundamentalne oraz ewentualne lustra i środki obrotów.