Liczby rzeczywiste. Zadania na dowodzenie

1. Liczba rzeczywista x spełnia równanie $x+\frac{1}{x}=5$. Oblicz $x^2+\frac{1}{x^2}$ oraz $x^3+\frac{1}{x^3}$.
2. Wykaż, że dla dowolnej liczby nieparzystej n liczba n^3-n jest podzielna przez 12.
3. (R05, 7p.) Wykaż bez użycia kalkulatora i tablic, że liczba $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ jest całkowita.
4. (R11, 4p.) Uzasadnij, że dla każdej liczby całkowitej k liczba $k^6-2k^4+k^2$ jest podzielna przez 36.
5. (P11, 2p.) Uzasadnij, że jeśli $a+b=1$ i $a^2+b^2=7$, to $a^4+b^4=31$.
6. (P15, 2p.) Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y prawdziwa jest nierówność $4x^2-8xy+5y^2\geq 0$.
7. (R15, 3p.) Wykaż, że $x^4-x^2-2x+3>0$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x.
8. (R16, 3p.) Wykaż, że dowolne liczby rzeczywiste nieujemne x i y, takie że $x^2+y^2=2$, spełniają nierówność $x+y\leq 2$.
9. (P17, 2p.) Wykaż, że liczba $4^{2017}+4^{2018}+4^{2019}+4^{2020}$ jest podzielna przez 17.
10. (R17, 3p.) Wykaż, że dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x i y prawdziwa jest nierówność $x^2y^2+2x^2+2y^2-8xy+4>0$.
11. (P18, 2p.) Wykaż, że dowolne liczby rzeczywiste dodatnie a i b spełniają nierówność $\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}\geq\frac{2}{a+b}$.
12. (R18, 3p.) Udowodnij, że dla dowolnych liczb całkowitych k i m liczba k^3m-km^3 jest podzielna przez 6.