Planimetria

1. Która z podanych równości **nie** może zajść w trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD opisanym na okręgu o promieniu 5?

   A. $AB = 20$ B. $BC = 8$ C. $CD = 0{,}01$ D. $AD = 21$

2. Pole trójkąta o bokach 4 cm, 5 cm i 7 cm jest równe:

   A. $4\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$ B. $4\sqrt{6}\ \mathrm{cm}^2$ C. $6\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$ D. $6\sqrt{6}\ \mathrm{cm}^2$

3. Przekątne równoległoboku mają długości 15 cm i 30 cm, a cosinus kąta zawartego między nimi jest równy 0,25. Oblicz obwód tego równoległoboku. Zakoduj cyfrę dziesiątek, cyfrę jedności oraz pierwszą cyfrę po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

4. W trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości 3 i 4 poprowadzono dwusieczną kąta prostego. Oblicz długość odcinka wyciętego z tej dwusiecznej przez brzeg trójkąta. W poniższe kratki wpisz pierwsze trzy cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanej liczby.

5. (P13, 5p) Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC = 17$ i $BC = 10$. Na boku AB leży taki punkt D, że $AD : DB = 3 : 4$ oraz $CD = 10$. Oblicz pole trójkąta ABC.

6. (R13, 4p) Trapez równoramienny $ABCD$ o podstawach AB i CD jest opisany na okręgu o promieniu r. Wykaż, że $AB \cdot CD = 4r^2$.

7. (R14, 3p) Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o środku S. Kąty wewnętrzne CAB, ABC i BCA tego trójkąta są równe odpowiednio α, 2α i 4α. Wykaż, że trójkąt ABC jest rozwartokątny, a miary wypukłych kątów środkowych ASB, ASC i BSC tworzą w podanej kolejności ciąg arytmetyczny.

8. (R15, 4p) Długości boków czworokąta $ABCD$ są równe: $AB = 2$, $BC = 3$, $CD = 4$ i $DA = 5$. Na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg. Oblicz długość przekątnej AC tego czworokąta.

9. (R16, 3p) Dany jest prostokąt $ABCD$. Okrąg wpisany w trójkąt BCD jest styczny do przekątnej BD w punkcie N. Okrąg wpisany w trójkąt ABD jest styczny do boku AD w punkcie M, a środek S tego okręgu leży na odcinku MN. Wykaż że $MN = AD$.

10. (6p) Punkty M i L leżą odpowiednio na bokach AB i AC trójkąta ABC, przy czym $MB = 2AM$ oraz $LC = 3AL$. Punkt S jest punktem przecięcia odcinków BL i CM. Pole trójkąta ABC jest równe 660. Oblicz pola trójkątów AMS, BMS, ALS i CLS.

11. W trójkącie ABC wysokość i środkowa poprowadzone z wierzchołka C podzieliły kąt ACB na trzy równe części. Wyznacz miary kątów tego trójkąta.

12. Na bokach AB i BC równoległoboku $ABCD$ zbudowano na zewnątrz kwadraty $ABPQ$ i $BCRS$. Wykaż, że odcinki DQ i DR są prostopadłe i mają jednakową długość.

13. Trapez prostokątny jest opisany na okręgu. Odległości środka okręgu od końców pochyłego ramienia są równe 2 i 4. Wyznacz długości wszystkich boków trapezu.