Kombinatoryka – zadania i odpowiedzi

1. Rozważmy funkcje $f: \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4,5,6\}$, (ciągi czterowyrazowe). Ile jest takich ciągów:
   a) dowolnych
   b) różnowartościowych
   c) rosnących
   d) niemalejących
   e) spełniających warunek $f(1) > f(3)$?

2. Rzucamy jednocześnie czterema kostkami do gry. Ile różnych układów liczb możemy otrzymać? (Uwaga: w zadaniu poprzednim ciągi $(2,5,5,5)$ i $(5,5,2,5)$ są różne, tutaj mamy ten sam układ liczb: jedna „dwójka" i trzy „piątki".)

3. Ile dzielników ma liczba:
   a) 32
   b) 144
   c) 6000
   d) $n = {p_1}^{\alpha_1} \cdot {p_2}^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot {p_k}^{\alpha_k}$, gdzie p_i to różne liczby pierwsze, a $\alpha_i \in \mathbb{N}$?

4. Bolek i Lolek zajmują miejsca w tym samym rzędzie sali kinowej. Rząd składa się z 20 foteli. Na ile sposobów mogą to zrobić, jeśli usiądą:
   a) w dowolnych miejscach
   b) obok siebie
   c) tak, aby między nimi było dokładnie jedno wolne miejsce?

5. Ile jest kostek domina w jednym komplecie? (Na kostkach mamy wszystkie możliwe układy: od 0,0 do 6,6; każdy z nich występuje raz.)

6. W turnieju szachowym gracze rozegrali każdy z każdym jedną partię. Łącznie rozegrano 120 partii. Ilu graczy uczestniczyło w turnieju?

7. Na ile sposobów można umieścić na szachownicy (8x8) osiem wież, aby żadne dwie nie atakowały się (wieże atakują się, gdy stoją w tej samej linii poziomej lub pionowej)? A dwie wieże?

8. Ile jest liczb dwucyfrowych, dla których iloczyn ich cyfr jest liczbą parzystą?

9. Ile jest liczb trzycyfrowych:
   a) podzielnych przez 3
   b) podzielnych przez 5
   c) podzielnych przez 3 lub przez 5?

10. Udowodnij, że $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n} = n \cdot 2^{n-1}$.
    Wsk. Rozwiąż dwoma sposobami zadanie: Na ile sposobów można spośród n osób wybrać delegację i jej przewodniczącego (dopuszczamy delegację jednoosobową).

11. Na ile sposobów można rozmieścić 10 identycznych przedmiotów z trzech szufladach? A 10 różnych przedmiotów?

12. Ile jest liczb 8-cyfrowych, w których:
    a) wszystkie cyfry są różne
    b) pierwsza cyfra jest nieparzysta, a w zapisie występują dokładnie trzy zera
    c) kolejne cyfry tworzą ciąg malejący
    d) jest sześć „dwójek" i dwie „szóstki"?

13. Ile różnych „słów" (napisów) możemy otrzymać wykorzystując wszystkie litery słowa:
    a) TRAPEZ
    b) ABBA
    c) MATEMATYKA
    d) ABRAKADABRA?

14. (2016/R) Rozpatrujemy wszystkie liczby naturalne dziesięciocyfrowe, w zapisie których mogą występować wyłącznie cyfry 1,2,3, przy czym cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy. Uzasadnij, że takich liczb jest 15 360.

15. (2013/R) Oblicz, ile jest liczb naturalnych sześciocyfrowych, w zapisie których występuje dokładnie trzy razy cyfra 0 i dokładnie raz cyfra 5.

16. (2012/R) Oblicz, ile jest liczb naturalnych ośmiocyfrowych takich, że iloczyn cyfr w ich zapisie dziesiętnym jest równy 12.

17. (2012cze/P) Oblicz, ile jest liczb naturalnych pięciocyfrowych, w zapisie których nie występuje zero, jest dokładnie jedna cyfra 7 i dokładnie jedna cyfra parzysta.

18. (2012cze/R) Oblicz, ile jest liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 6 lub podzielnych przez 15.

19. (2010/P) Oblicz, ile jest liczb czterocyfrowych, w których zapisie pierwsza cyfra jest parzysta, a pozostałe nieparzyste.

20. (2011/R) Oblicz, ile jest liczb ośmiocyfrowych, w zapisie których nie występuje zero, występują natomiast dwie dwójki i trzy trójki.

Odpowiedzi:

1. a) $6^4 = 1296$; b) $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$; c) $\binom{6}{4} = 15$; d) $\binom{4+6-1}{4} = 126$; e) $\binom{6}{2} \cdot 6^2 = 540$.
2. 126 (zadanie 1d: 4 kule wkładamy do 6 szufladek).
3. a) 6; b) 15; c) 40; d) $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1)$.
4. a) 380; b) 38; c) 36.
5. 28.
6. 16.

7. Jeśli wieże nie są rozróżnialne, to $8! = 40320$ dla ośmiu wież i $\frac{8^2 \cdot 7^2}{2} = 1568$ dla dwóch. Jeśli wieże są rozróżnialne to odpowiednio $8! \cdot 8! = 1625702400$ i $\frac{8^2 \cdot 7^2}{2} \cdot 2! = 3136$.
8. $4 \cdot 10 + 5 \cdot 5 = 65$ (albo $9 \cdot 10 - 5 \cdot 5$).
9. a) 300; b) 180; c) 420.
10. 1. sposób (dający wyrażenie po lewej stronie): najpierw wybieramy delegację k-osobową na $\binom{n}{k}$ sposobów, a potem spośród tych osób przewodniczącego; 2. sposób (prowadzący do wyrażenia po prawej stronie): najpierw wybieramy przewodniczącego, a potem spośród pozostałych $n-1$ osób resztę delegacji.
11. Identyczne przedmioty na $\binom{10+3-1}{3-1} = \binom{12}{2} = 66$, różne na $3^{10} = 59049$ sposobów.
12. a) $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1632960$;
    b) $5 \cdot \binom{7}{3} \cdot 9^4 = 1148175$;
    c) $\binom{10}{8} = 45$;
    d) $\binom{8}{6} = \binom{8}{2} = 28$.
13. a) $6! = 720$; b) $\frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$; c) $\frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = 151200$; d) $\frac{11!}{5! \cdot 2! \cdot 2!} = 166320$.
14. $\binom{10}{3} \cdot 2^7 = 15360$.
15. $\binom{5}{3} \cdot 3 \cdot 8^2 = 1920$.
16. $8 \cdot 7 + 8 \cdot 7 + \binom{8}{2} \cdot 6 = 280$.
17. $\binom{5}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot 4 \cdot 4^3 = 5120$.
18. $150 + 60 - 30 = 180$.
19. $4 \cdot 5^3 = 500$.
20. $\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{3} \cdot 7^3 = 192080$.