Rachunek prawdopodobieństwa - zadania i odpowiedzi

1. Wiadomo, że $A, B \subset \Omega$ oraz $P(A') = \frac{1}{4}$, $P(A \cup B) = \frac{7}{8}$ i $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$. Oblicz $P(A)$, $P(B)$ oraz $P(A - B)$.

2. $A, B \subset \Omega$ oraz $P(A) = 0{,}75$ i $P(B) = 0{,}5$. Jakie wartości może mieć $P(A \cap B)$?

3. (R11, 3p.) A i B są zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω. Wykaż, że jeśli $P(A) = 0{,}9$ i $P(B) = 0{,}7$, to $P(A \cap B') \leq 0{,}3$.

4. Z urny, w której jest 6 kul białych i 4 czarne, losujemy bez zwracania 3 kule. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wśród wylosowanych kul co najmniej 2 będą białe.

5. 6 osób wsiadło do windy na parterze budynku 12-piętrowego. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że przynajmniej 2 osoby wysiądą na tym samym piętrze. (W innej redakcji: oblicz prawdopodobieństwo, że wśród losowo wybranych 6 osób znajdą się przynajmniej dwie, które obchodzą urodziny w tym samym miesiącu.)

6. Rzucamy cztery razy symetryczną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że iloczyn liczb oczek otrzymanych we wszystkich rzutach będzie równy 60.

7. (R14, 4p.) Z urny zawierającej 10 kul ponumerowanych kolejnymi liczbami od 1 do 10 losujemy jednocześnie trzy kule. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że numer jednej z wylosowanych kul jest równy sumie numerów dwóch pozostałych kul.

8. (R15, 3p.) Rozważmy rzut sześcioma kostkami do gry, z których każda ma inny kolor. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że uzyskany wynik spełnia równocześnie 3 warunki:
   1) dokładnie na dwóch kostkach otrzymano „1”;
   2) dokładnie na trzech kostkach otrzymano „6”;
   3) suma wszystkich otrzymanych liczb jest parzysta.

9. (P16, 4p.) Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych losujemy kolejno dwa razy po jednej liczbie bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma wylosowanych liczb będzie równa 30. Wynik zapisz w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

10. (R16, 5p.) W urnie jest 20 kul: 9 białych, 9 czerwonych i 2 zielone. Z tej urny losujemy bez zwracania 3 kule. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że co najmniej dwie z wylosowanych kul będą tego samego koloru.

11. (R08, 4p.) W urnie znajdują się jedynie kule białe i czarne. Kul białych jest 3 razy więcej niż czarnych. Oblicz, ile jest kul w urnie, jeśli przy jednoczesnym losowaniu dwóch kul prawdopodobieństwo otrzymania kul o różnych kolorach jest większe od $\frac{9}{22}$.

12. (R10, 4p.) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w trzech rzutach symetryczną sześcienną kostką do gry suma kwadratów liczb uzyskanych oczek będzie podzielna przez 3.

13. (P10, 4p.) Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że w pierwszym rzucie uzyskamy parzystą liczbę oczek i iloczyn liczb uzyskanych w obu rzutach będzie podzielny przez 12.

14. Spośród wierzchołków $2n$-kąta foremnego wybieramy losowo trzy. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że będą to wierzchołki trójkąta prostokątnego.

15. (R07, 4p.) $A, B \subset \Omega$ oraz $P(A) = 0{,}85$ i $P(B) = 0{,}75$. Wykaż, że prawdopodobieństwo warunkowe spełnia nierówność $P(A|B) \geq 0{,}8$.

16. (R06, 4p.) Zdarzenia $A, B \subset \Omega$ są niezależne. Wykaż, że jeśli $P(A \cup B) = 1$, to $P(A) = 1$ lub $P(B) = 1$.

17. (CKE, 6p.) Rzucamy dwa razy kostką do gry. Jeśli suma oczek wyrzuconych na obu kostkach jest liczbą podzielną przez 3, to losujemy jedną liczbę ze zbioru $Z_1 = \{1, 2, 3, \dots, 2n+7\}$, w przeciwnym przypadku losujemy jedną liczbę ze zbioru $Z_2 = \{1, 2, 3, \dots, 2n\}$. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczby parzystej.

18. (CKE, 6p.) W jednej urnie jest 6 białych i 6 czarnych kul, w dwóch urnach – po 4 czarne i 8 białych, a w trzech pozostałych po 3 białe i 9 czarnych kul. Wybrano losowo urnę, a z niej jedną kulę. Wylosowana kula okazała się czarna. Oblicz prawdopodobieństwo, że pochodzi ona z urny zawierającej 9 kul czarnych.

Odpowiedzi:

1. $P(A) = \frac{3}{4}, P(B) = \frac{1}{4}, P(A - B) = \frac{5}{8}$.
2. $0{,}25 \leq P(A \cap B) \leq 0{,}5$.
3. $P(A \cap B') \leq P(B') = 0{,}3$.
4. $\frac{2}{3}$.
5. $1 - \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{12^6} = \frac{1343}{1728}$.
6. $\frac{5}{108}$.
7. $\frac{1}{6}$.
8. $\frac{5}{1944}$.
9. $\frac{1}{801}$.
10. $\frac{163}{190}$.
11. 4 lub 8.
12. $\frac{1}{3}$.
13. $\frac{1}{6}$.
14. $\frac{3}{2n-1}$.
15. Wsk. $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 1{,}6 - P(A \cup B) \geq 1{,}6 - 1 = 0{,}6$.
16. Wsk. $1 - a - b + ab = (1-a)(1-b)$.
17. $\frac{3n+10}{6n+21}$.

18. $\frac{27}{41}$.