Równania trygonometryczne

1. Rozwiąż równanie (obok rok/nr zadania):
   a) $\sin 6x + \cos 3x = 2\sin 3x + 1,\ x \in \langle 0, \pi\rangle$; R2018/11
   b) $\cos 2x + 3\cos x = -2,\ x \in \langle 0, 2\pi\rangle$; R2017/10
   c) $2\cos^2 x + 3\sin x = 0,\ x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\rangle$; R2018/7 stara matura
   d) $-2\cos^2 x + 3\sin x + 3 = 0,\ x \in \langle 0, 2\pi\rangle$;
   e) $\sin^2 2x - 4\sin^2 x + 1 = 0,\ x \in \langle 0, 2\pi\rangle$; R2015/5 stara matura
   f) $\sqrt{3}\cos x = 1 + \sin x,\ x \in \langle 0, 2\pi\rangle$; R2014/3
   g) $\cos 2x + \cos x + 1 = 0,\ x \in \langle 0, 2\pi\rangle$; R2013/4
   h) $\cos 2x + 2 = 3\cos x$; R2012/3
   i) $2\sin^2 x - 2\sin^2 x\cos x = 1 - \cos x,\ x \in \langle 0, 2\pi\rangle$; R2011/4
   j) $4\cos^2 x = 4\sin x + 1,\ x \in \langle 0, 2\pi\rangle$; R2008/4
   k) $2\cos^2 x - 5\sin x - 4 = 0,\ x \in \langle 0, 2\pi\rangle$; R2010/2
   l) $(\cos x)\left[\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right] = \frac{1}{2}\sin x$; R2019/14
   m) $2\sin 4x + 2\sqrt{3}\cos 2x = \sqrt{3} + 4\sin x\cos x,\ x \in \langle 0, 2\pi\rangle$; ostatnia matura próbna

2. Rozwiąż równanie:
   a) $\sin 5x - \cos 2x + \sin x = 0$;
   b) $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \frac{1}{4}\sin 4x$;
   c) $\cos 2x = \sin 3x$;
   d) $\cos x - \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$;
   e) $\operatorname{ctg} x = 3\operatorname{tg} x$;
   f) $\frac{1}{\sin x} + \operatorname{ctg} x + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0$.

„Ściąga” z „prostych” równań trygonometrycznych:

1. $\sin x = \sin\alpha \leftrightarrow (x = \alpha + 2k\pi \text{ lub } x = \pi - \alpha + 2k\pi)$;
2. $\cos x = \cos\alpha \leftrightarrow (x = \alpha + 2k\pi \text{ lub } x = -\alpha + 2k\pi)$;
3. $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\alpha \leftrightarrow x = \alpha + k\pi$;
4. $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}\alpha \leftrightarrow x = \alpha + k\pi;\quad k \in \mathbb{Z}$.

Ogólne uwagi:

1. Staramy się zmniejszyć liczbę różnych argumentów (1a, b, e, g, h, m)
2. Przy 4 składnikach sprawdzamy, czy można zrobić rozkład na czynniki grupując wyrazy po 2 (1a, i, m):
$$ac + ad = bc + bd \leftrightarrow$$
$$a(c+d) = b(c+d) \leftrightarrow$$
$$[\textbf{nie dzielimy} \text{ przez } c+d, \text{bo gubimy rozwiązanie } c+d=0,]$$
$$[\text{ta uwaga dotyczy } \textbf{wszystkich} \text{ równań, nie tylko trygonometrycznych}]$$
$$(a-b)(c+d) = 0 \leftrightarrow$$
$$a - b = 0 \text{ lub } c + d = 0$$
3. Pamiętamy o „jedynce” trygonometrycznej zwłaszcza tam, gdzie są kwadraty (1c, d, j, k)
4. Wzory na $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ (1a, b, e, g, h, m), i ogólnie na sinus/cosinus sumy albo sumę dwóch sinusów/cosinusów (1f, l)
5. W końcu dojdziemy do jednego-dwóch „prostych” równań, które traktujemy „ściągą” (patrz wyżej) pamiętając o $2k\pi$
6. Wyznaczamy rozwiązania we wskazanym przedziale.