

POLITECHNIKA WROCŁAWSKA  
Wydział Podstawowych Problemów Techniki, Instytut Matematyki i  
Informatyki

# **Elementy izometrii dla architektów**

Dorota Jacak, Monika Jacak

Wrocław 2013

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Wprowadzenie</b>	<b>1</b>
1.1	Struktury algebraiczne . . . . .	1
1.2	Grupy . . . . .	2
1.3	Odwzorowania . . . . .	5
1.4	Izometrie płaszczyzny $F : R^2 \rightarrow R^2$ . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Izometrie płaszczyzny</b>	<b>13</b>
2.1	Rodzaje izometrii płaszczyzny. Definicje i oznaczenia. . . . .	13
2.2	Izometrie płaszczyzny zgodne i przeciwne (parzyste i nieparzyste) . . . . .	17
2.3	Składanie izometrii – podstawowe konstrukcje. . . . .	18
<b>3</b>	<b>Grupa symetrii figury ograniczonej (skończonej) na płaszczyźnie</b>	<b>46</b>
<b>4</b>	<b>Deseń w nieskończonym pasie</b>	<b>57</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>72</b>

# Rozdział 1

## Wprowadzenie

### 1.1 Struktury algebraiczne

Zbiór elementów  $X$  z wprowadzonym działaniem  $\otimes$  – czyli para  $(X, \otimes)$  – jest strukturą algebraiczną, jeśli

$$\forall_{x,y \in X} x \otimes y \in X$$

#### Przykłady

**P.1**  $(N, +)$  jest strukturą algebraiczną a  $(N, -)$  nie jest strukturą algebraiczną ( $2 - 5 \notin N$ ).

**P.2** Można rozważać bardziej abstrakcyjne działania jak na przykład składanie funkcji:  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ . Jeśli  $F$  jest zbiorem funkcji to  $(F, \circ)$  jest strukturą algebraiczną (złożenie funkcji jest zawsze funkcją).

**P.3** Niech  $P$  będzie zbiorem wszystkich permutacji (ustawień) czterech elementów  $\{1, 2, 3, 4\}$ . Takich permutacji jest  $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ . Na pierwszym miejscu możemy postawić liczbę wybraną na cztery sposoby. Na drugim miejscu tylko na trzy sposoby (jedna liczba jest już ustalona). Na trzecim miejscu tylko na dwa sposoby i na czwartym pozostał jeden sposób. Wszystkich możliwości jest więc  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ .

**Twierdzenie 1.**

Ilość permutacji zbioru  $n$  elementowego wynosi  $n!$

Każdą permutację  $g = (p_1 p_2 p_3 p_4)$ ,  $\forall_{i \in \{1,2,3,4\}} p_i \in \{1,2,3,4\}, p_i \neq p_j$  dla  $i \neq j$ , możemy przedstawić w postaci  $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{pmatrix}$ . Ten zapis oznacza, że w permutacji  $g$  jako pierwszą liczbę umieściliśmy  $p_1$  (jedyńce przyporządkowaliśmy  $p_1$ ), jako drugą  $p_2$  (dwójce przyporządkowaliśmy  $p_2$ ) itd. Niech  $\otimes$  oznacza składanie permutacji. Wtedy  $g \otimes f$  jest permutacją wynikłą z kolejnego wykonania najpierw permutacji  $f$  a potem  $g$  analogicznie do składania funkcji. Na przykład

$$\begin{aligned} (2431) \otimes (1423) &= \begin{pmatrix} 1234 \\ 2431 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1234 \\ 1423 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1234 \\ 2143 \end{pmatrix} = (2143) \\ (1423) \otimes (2431) &= \begin{pmatrix} 1234 \\ 1423 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1234 \\ 2431 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1234 \\ 4321 \end{pmatrix} = (4321) \end{aligned}$$

Jak widać składanie permutacji nie jest działaniem przemienne. Podobnie składanie funkcji nie jest działaniem przemienne – wystarczy rozważyć przykład:  $f(x) = x^2, g(x) = x + 2$ . Wtedy  $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g^2(x) = (x + 2)^2, (g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) + 2 = x^2 + 2$ .

Zbiór  $(P, \otimes)$  tworzy strukturę algebraiczną.

## 1.2 Grupy

Grupa jest strukturą algebraiczną  $(X, \otimes)$  dla której spełnione są dodatkowo trzy warunki:

- zachodzi łączność działania:  $\forall_{a,b,c \in X} a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$
- istnieje element neutralny działania:  $\exists_{e \in X} \forall_{a \in X} a \otimes e = e \otimes a = a$
- istnieje element odwrotny działania:  $\forall_{a \in X} \exists_{a^{-1} \in X} a \otimes a^{-1} = a^{-1} \otimes a = e$

Jeśli działanie  $\otimes$  jest przemienne tzn.  $\forall_{a,b \in X} a \otimes b = b \otimes a$  to grupę nazywamy abelową lub przemienną.

## Przykłady

**P.4** Zbiór  $(C, +)$  jest oczywiście grupą abelową, ponieważ dodawanie jest nie tylko działaniem łącznym ale i przemienne. Elementem neutralnym dodawania jest 0, elementem odwrotnym do  $x$  jest liczba  $-x$ .

**P.5**  $(N, +)$  nie jest grupą.

**P.6**  $(R \setminus \{0\}, \cdot)$  jest grupą abelową.

**P.7** Zbiór permutacji z działaniem składania  $(P, \otimes)$  jest tzw. grupą permutacji.

Składanie permutacji – podobnie jak składanie funkcji jest łączne. Elementem neutralnym składania jest permutacja identycznościowa (1234). Dla każdej permutacji istnieje element odwrotny. Na przykład elementem odwrotnym do (2431) jest permutacja  $(p_1p_2p_3p_4)$ , taka że  $(2431) \otimes (p_1p_2p_3p_4) = (p_1p_2p_3p_4) \otimes (2431) = e$ . Stąd

$$\begin{pmatrix} 1234 \\ p_1p_2p_3p_4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1234 \\ 2431 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1234 \\ p_2p_4p_3p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1234 \\ 1234 \end{pmatrix},$$

i  $(p_1p_2p_3p_4) = (4132)$  czyli  $(2431)^{-1} = (4132)$ . Grupa permutacji nie jest grupą abelową, co pokazuje przykład **P.2**.

**P.8** Czy zbiór liczb rzeczywistych  $R$  z działaniem  $\oplus$  określonym następująco:

$$x \oplus y = x + y + 3 \text{ jest grupą?}$$

Oczywiście  $(R, \oplus)$  jest strukturą algebraiczną. Zachodzi łączność działania, ponieważ

$$\begin{aligned} \forall_{x,y,z \in R} \quad x \oplus (y \oplus z) &= x + (y + z) + 3 = x + y + z + 3 + 3 \\ &= (x + y + 3) + z + 3 = (x \oplus y) + z + 3 = (x \oplus y) \oplus z \end{aligned}$$

Ponadto:  $x + e + 3 = e + x + 3 = x \Leftrightarrow e = -3$  a stąd istnieje element neutralny działania

$$\exists_{e \in R, e = -3} \quad \forall_{x \in R} \quad x \oplus e = e \oplus x = x$$

Do każdego elementu istnieje element odwrotny:  $\forall_{x \in R} \exists_{x^{-1} \in R} \quad x \otimes x^{-1} = x^{-1} \otimes x = e$ . Wystarczy przyjąć  $x^{-1} = -x - 6$ . Zbiór  $(R, \oplus)$  jest grupą abelową ponieważ

$$\forall_{x,y \in R} \quad x \oplus y = x + y + 3 = y + x + 3 = y \oplus x.$$

**Twierdzenie 2.**

W każdej grupie może być tylko jeden element neutralny

Dowód.

Dowód przeprowadzimy metodą nie wprost. Załóżmy, że w grupie  $(X, \otimes)$  istnieją dwa różne elementy neutralne:  $e_1 \neq e_2$ . Jednak zgodnie z definicją elementu neutralnego mamy wtedy  $e_1 = e_1 \otimes e_2 = e_2$ . Otrzymaliśmy sprzeczność, która kończy dowód.

**Twierdzenie 3.**

Dla każdego elementu z grupy istnieje tylko jeden element odwrotny

Dowód.

Dowód przeprowadzimy metodą nie wprost. Załóżmy, że dla  $x \in X$  istnieją dwa różne elementy odwrotne:  $x_1 \neq x_2$ . Wtedy

$$x_1 = x_1 \otimes e = x_1 \otimes (x \otimes x_2) = (x_1 \otimes x) \otimes x_2 = e \otimes x_2 = x_2.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, która kończy dowód.

**Twierdzenie 4.**

Jeśli  $(X, \otimes)$  jest grupą, to  $\forall_{x,y \in X} (x \otimes y)^{-1} = y^{-1} \otimes x^{-1}$

Dowód.

Ponieważ  $e = (x \otimes y)^{-1} \otimes (x \otimes y) = ((x \otimes y)^{-1} \otimes x) \otimes y$  więc

$$((x \otimes y)^{-1} \otimes x) \otimes y \otimes y^{-1} = ((x \otimes y)^{-1} \otimes x) \otimes e = (x \otimes y)^{-1} \otimes x = y^{-1}$$

A zatem

$$(x \otimes y)^{-1} \otimes x \otimes x^{-1} = (x \otimes y)^{-1} \otimes e = (x \otimes y)^{-1} = y^{-1} \otimes x^{-1}$$

co kończy dowód.

### 1.3 Odwzorowania

Rozważamy odwzorowania

$$F : A \rightarrow B$$

**Definicja.** Odwzorowanie  $F : A \rightarrow B$  jest jednoznaczne wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego elementu  $a \in A$  istnieje tylko jeden element  $b \in B$  taki, że  $F(a) = b$ .

#### Przykłady:

**P.9** Niech  $A$  zbiór studentów,  $B$  zbiór ocen. Odwzorowanie  $F : A \rightarrow B$  przyporządkowujące każdemu studentowi ze zbioru  $A$  jego ocenę ze zbioru  $B$  jest oczywiście jednoznaczne. Natomiast odwzorowanie  $F : B \rightarrow A$  przyporządkowujące każdej ocenie ze zbioru  $B$  – studenta ze zbioru  $A$ , który ją otrzymał – nie musi być jednoznaczne (na przykład ocenę 5.0 może otrzymać wielu studentów). Na pewno odwzorowanie  $F : B \rightarrow A$  nie będzie jednoznaczne, jeśli tylko studentów jest więcej niż ocen w zbiorze ocen.

**P.10** Dowolna funkcja jest odwzorowaniem jednoznacznym.

**Definicja.** Odwzorowanie  $F : A \rightarrow B$  jest różnowartościowe wtedy i tylko wtedy, gdy różnym elementom ze zbioru  $A$  przyporządkowuje odpowiednio różne elementy ze zbioru  $B$ .

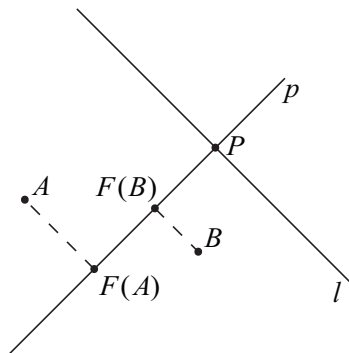
#### Twierdzenie 5.

Odwzorowanie  $F : A \rightarrow B$  jest różnowartościowe wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek:

$$\forall_{x,y \in A} (F(x) = F(y) \Rightarrow x = y)$$

### Przykład

**P.11** Niech  $F : R^2 \rightarrow R^2$  będzie rzutowaniem prostokątnym punktów  $R^2$  na daną prostą  $p$ . Wtedy  $F$  nie jest przekształceniem różnowartościowym. Przyporządkowuje wszystkim punktom prostej  $l$  prostopadłej do prostej  $p$  i przecinającej ją w punkcie  $P$  – ten właśnie punkt  $P$ . Ale jest jednoznaczne.



**Rys. 1.1.** Rzut prostokątny wszystkich punktów prostej  $l$  na prostą  $p$  jest tylko punktem  $P$ . Rzutowanie nie jest odwzorowaniem różnowartościowym

Odwzorowanie jednoznaczne i różnowartościowe nazywamy injekcją lub monomorfizmem.

**Definicja.** Odwzorowanie  $F : A \rightarrow B$  jest „na” jeśli dla każdego elementu  $b \in B$  istnieje element  $a \in A$  taki, że  $F(a) = b$ .

### Przykład

**P.12** Rozważane w przykładzie **P.9** odwzorowanie przyporządkowujące każdemu studentowi ocenę ze zbioru ocen jest jednoznaczne ale nie musi być oczywiście odwzorowaniem „na”. Może zdarzyć się, że nikt nie otrzyma oceny 2. Odwzorowanie to na pewno nie jest różnowartościowe jeśli tylko studentów jest więcej niż ocen w zbiorze ocen.

Odwzorowanie jednoznaczne i „na” nazywamy surjekcją lub epimorfizmem.



Jeśli odwzorowanie jest injekcją i surjekcją to nazywamy je bijekcją (przekształceniem wzajemnie jednoznacznym).

**Twierdzenie 6.**

Dla każdego przekształcenia  $F : A \rightarrow B$  będącego bijekcją istnieje przekształcenie odwrotne – także bijekcja:  $F^{-1} : B \rightarrow A$ .

Dowód.

Jeśli  $F(a) = b$  to określenie  $F^{-1}(b) = a$  kończy dowód.

Rozważmy teraz zbiór bijekcji  $F : A \rightarrow A$ . W zbiorze tym wprowadzimy składanie przekształceń

$$(F_1 \circ F_2)(a) = F_1(F_2(a))$$

**Twierdzenie 7.**

Zbiór wszystkich bijekcji  $F : A \rightarrow A$  ze składaniem jako działaniem tworzy grupę.

Dowód.

- zachodzi łączność składania;
- istnieje element neutralny – przekształcenie tożsamościowe (identycznościowe)  $I$ ;
- dla każdego elementu istnieje element odwrotny (przekształcenie odwrotne określone z Twierdzenia 6).

**Definicja.** Punktem stałym przekształcenia  $F : A \rightarrow A$  nazywamy taki element  $a \in A$ , że  $F(a) = a$ .

Oczywiście dla przekształcenia identycznościowego wszystkie elementy zbioru  $A$  są punktami stałymi.

## 1.4 Izometrie płaszczyzny $F : R^2 \rightarrow R^2$

**Definicja.** Przekształcenie  $F : R^2 \rightarrow R^2$  odwzorowujące płaszczyznę na płaszczyznę i zachowujące odległość:

$$\forall_{A,B \in R^2} |F(A)F(B)| = |AB|$$

nazywamy izometrią.

### Twierdzenie 8.

Obrazem odcinka w izometrii jest odcinek.

Dowód.

Niech  $A, B \in R^2$ ,  $AB$  odcinek oraz  $C \in AB$ . Wtedy  $|AB| = |AC| + |CB|$ . Ale  $F$  jest izometrią to  $|F(A)F(B)| = |F(A)F(C)| + |F(C)F(B)|$ . Ta równość zachodzi jednak tylko wtedy, gdy  $F(C) \in F(A)F(B)$ . Ponadto zachowany jest stosunek podziału:  $\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|F(A)F(C)|}{|F(C)F(B)|}$ .

### Twierdzenie 9.

Izometria przeprowadza:

- (a) prostą na prostą
- (b) proste prostopadłe na proste prostopadłe.

Dowód.

(a) Dowód wynika z twierdzenia 8 – bo dwa punkty wyznaczają prostą.

(b) Niech  $l_1, l_2$  proste,  $l_1 \perp l_2, l_1 \cap l_2 = \{A\}$ , niech  $B \in l_1, C \in l_2$ .

Trójkąt  $\triangle ABC$  jest trójkątem prostokątnym więc  $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$ . Niech  $F$  izometria – wtedy  $|F(B)F(C)|^2 = |F(A)F(B)|^2 + |F(A)F(C)|^2$ . Stąd

trójkąt  $\Delta F(A)F(B)F(C)$  jest trójkątem prostokątnym i  $F(l_1) \perp F(l_2)$ , co kończy dowód.

**Twierdzenie 10.**

Izometrie są bijekcjami.

Dowód.

(a) Dowolna izometria jest przekształceniem jednoznaczny.

Założmy, że  $F(A) = B$  i  $F(A) = C$ . Wtedy  $|F(A)F(A)| = |BC|$  ale  $F$  jest izometrią więc  $|F(A)F(A)| = |AA| = 0$ . Stąd  $|BC| = 0$  i  $B = C$ .

(b) Dowolna izometria jest przekształceniem różnowartościowym.

Założmy, że  $F(A) = F(B)$  to  $|F(A)F(B)| = 0$  ale stąd  $|AB| = 0$  czyli  $A = B$

(c) Dowolna izometria jest przekształceniem „na”.

Dowód przeprowadzimy nie wprost. Niech  $F : R^2 \rightarrow R^2$  izometria,  $Z \in R^2$  oraz założmy, że dla każdego  $P \in R^2$  zachodzi  $F(P) \neq Z$ .

Istnieją dwa różne punkty płaszczyzny postaci  $F(A), F(B)$ . Przeprowadzamy przez nie prostą  $l_1$ . Jest ona z twierdzenia 9 obrazem w tej izometrii prostej  $l_2$  przechodzącej przez  $A$  i  $B$ .

Jeśli punkt  $Z \in l_1$  to z twierdzenia 9 musi być obrazem pewnego punktu prostej  $l_2$ . Otrzymaliśmy sprzeczność.

Jeśli  $Z \notin l_1$  to przez  $Z$  przeprowadzamy prostą  $l_3$  prostopadłą do  $l_1$ . Wtedy  $l_3 \cap l_1 = \{F(Q)\}$ ,  $Q \in l_2$ . Z twierdzenia 9 prosta  $l_3$  jest obrazem pewnej prostej  $l_4$  prostopadłej do  $l_2$  i przecinającej ją w punkcie  $Q$ . A więc i punkt  $Z$  musi być obrazem pewnego punktu z prostej  $l_4$ . Także otrzymaliśmy sprzeczność, co kończy dowód.

Z twierdzenia 10 wynika, że izometrie na płaszczyźnie tworzą grupę ze składaniem jako działaniem i z przekształceniem identycznościowym jako elementem neutralnym tego działania.

**Twierdzenie 11.**

Jeśli  $F : R^2 \rightarrow R^2$  jest izometrią i punkty  $A, B, A \neq B$ , są punktami stałymi przekształcenia  $F$  to wszystkie punkty prostej  $AB$  są punktami stałymi.

**Dowód.**

Niech  $C \in AB$ . Wtedy  $|AB| = |AC| + |CB|$ . Przekształcenie  $F$  jest izometrią – więc  $|F(A)F(B)| = |F(A)F(C)| + |F(C)F(B)|$ . Ale punkty  $A, B$  są punktami stałymi przekształcenia  $F$  stąd  $|AB| = |AF(C)| + |F(C)B|$  oraz  $|AF(C)| = |AC|$ ,  $|F(C)B| = |CB|$ . Więc  $F(C) \in AB$  i  $F(C) = C$ . Jeśli  $C \notin AB$  to  $B \in AC$  lub  $A \in CB$  i dowód jest analogiczny.

**Twierdzenie 12.**

Jeśli  $F : R^2 \rightarrow R^2$  jest izometrią i punkty  $A, B, C$  różne i niewspółliniowe są punktami stałymi przekształcenia  $F$  to jest ono identycznością ( $F = I$ ).

**Dowód.**

Punkty  $A, B, C$  są niewspółliniowe – wyznaczają więc trzy wzajemnie przecinające się proste:  $l_1 = pr.AB, l_2 = pr.AC, l_3 = pr.BC$ . Niech  $X \in R^2$ . Każda prosta  $l$  przechodząca przez  $X$  przecina się z pewnymi prostymi  $l_i, l_j, i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j$ . Niech  $l \cap l_i = \{S_i\}, l \cap l_j = \{S_j\}$ . Wtedy  $X \in pr.S_iS_j$ . Ale punkty  $S_i, S_j$  są punktami stałymi przekształcenia  $F$  z twierdzenia 11 – więc także  $X$  jest punktem stałym na podstawie tego samego twierdzenia. Ponieważ  $X$  był dowolnym punktem płaszczyzny to  $F = I$ .

**Twierdzenie 13.**

Jeśli  $F_i : R^2 \rightarrow R^2, i = 1, 2$  są izometriami a punkty  $A, B, C$  różne i niewspółliniowe spełniają równości:  $F_i(A) = A_i, F_i(B) = B_i, F_i(C) = C_i, i \in \{1, 2\}$  to  $F_1 \equiv F_2$ .

Dowód.

Przekształcenie  $F_2^{-1}F_1$  jest oczywiście izometrią. Z założenia mamy

$$\begin{aligned} F_2^{-1}F_1(A) &= F_2^{-1}(A_1) = F_2^{-1}F_2(A) = A \\ F_2^{-1}F_1(B) &= F_2^{-1}(B_1) = F_2^{-1}F_2(B) = B \\ F_2^{-1}F_1(C) &= F_2^{-1}(C_1) = F_2^{-1}F_2(C) = C \end{aligned}$$

Z twierdzenia 12 wynika, że  $F_2^{-1}F_1$  jest identycznością – ale warunek  $F_2^{-1}F_1 = I$  jest równoważny równości  $F_1 = F_2$ .

#### Twierdzenie 14.

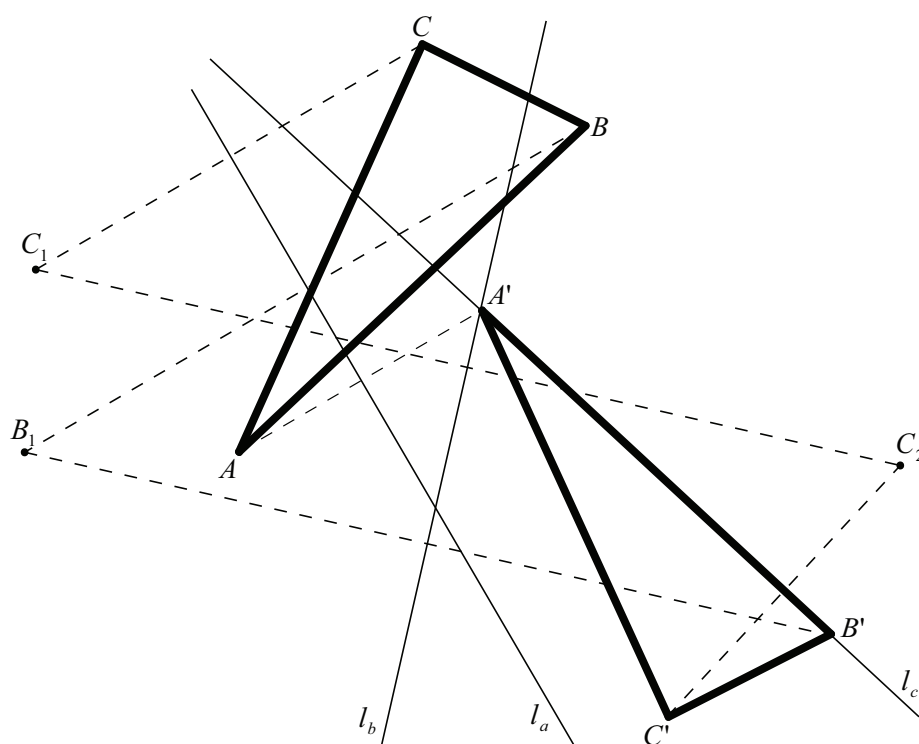
Jeśli  $F : R2 \rightarrow R2$  jest izometrią to można ją przedstawić jako złożenie co najwyżej trzech odbić.

Dowód.

Niech punkty  $A, B, C$  będą różne i niewspółliniowe. Niech  $F(A) = A'$ ,  $F(B) = B'$ ,  $F(C) = C'$ .

- Jeśli  $A \neq A'$  to istnieje  $l_a$  symetralna odcinka  $AA'$ . Wtedy  $R_{l_a}(A) = A'$ ,  $R_{l_a}(B) = B_1$ ,  $R_{l_a}(C) = C_1$ .
- Jeśli  $B_1 \neq B'$  to istnieje  $l_b$  symetralna odcinka  $B_1B'$ . Oczywiście  $A' \in l_b$  bo  $|AB| = |R_{l_a}(A)R_{l_a}(B)| = |A'B_1|$ . Z drugiej strony  $|AB| = |F(A)F(B)| = |A'B'|$  więc  $|A'B_1| = |A'B'|$ . Stąd  $R_{l_b}R_{l_a}(A) = R_{l_b}(A') = A'$ ,  $R_{l_b}R_{l_a}(B) = R_{l_b}(B_1) = B'$ ,  $R_{l_b}R_{l_a}(C) = R_{l_b}(C_1) = C_2$ .
- Jeśli  $C_2 \neq C'$  to istnieje  $l_c$  symetralna odcinka  $C_2C'$ . Oczywiście  $A', B' \in l_c$  bo  $|AC| = |R_{l_b}R_{l_a}(A)R_{l_b}R_{l_a}(C)| = |A'C_2|$ . Z drugiej strony  $|AC| = |F(A)F(C)| = |A'C'|$  więc  $|A'C_2| = |A'C'|$ . Podobnie zachodzą równości  $|BC| = |R_{l_b}R_{l_a}(B)R_{l_b}R_{l_a}(C)| = |B'C_2|$  oraz  $|BC| = |F(B)F(C)| = |B'C'|$  więc  $|B'C_2| = |B'C'|$ . Stąd  $R_{l_c}R_{l_b}R_{l_a}(A) = A'$ ,  $R_{l_c}R_{l_b}R_{l_a}(B) = B'$ ,  $R_{l_c}R_{l_b}R_{l_a}(C) = C'$ . Ale z założenia  $F(A) = A'$ ,  $F(B) = B'$ ,  $F(C) = C'$  więc z twierdzenia 11 mamy  $F \equiv R_{l_c}R_{l_b}R_{l_a}$ .

W przypadku, gdy nie zachodzi co najmniej jedno z założeń  $A \neq A'$ ,  $B_1 \neq B'$ ,  $C_2 \neq C'$  – izometria  $F$  jest złożeniem mniejszej ilości odbić!



**Rys. 1.2.** Przedstawienie dowolnej izometrii płaszczyzny jako złożenia co najwyżej trzech odbić

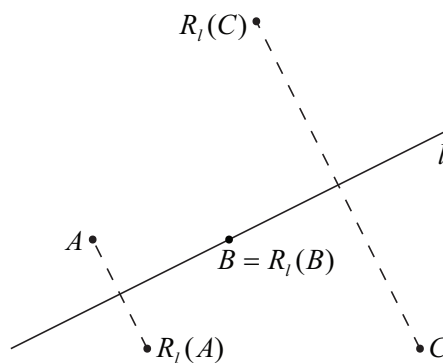
## Rozdział 2

# Izometrie płaszczyzny

### 2.1 Rodzaje izometrii płaszczyzny. Definicje i oznaczenia.

Odbicie  $R_l$  w prostej  $l$  (w lustrze  $l$ ) (inaczej odzwierciedlenie).

Prosta  $l$  jest ustalona i określa przekształcenie. Nie wolno jej przesuwać ani obracać.



Rys. 2.1. Odbicie w prostej  $l$

Przekształceniem odwrotnym do odbicia w prostej jest odbicie w tej samej prostej, stąd

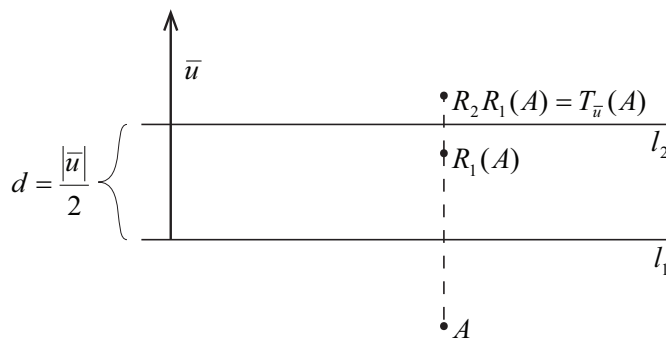
$$R_l R_l = I$$

Ponadto na ogół  $R_k R_l \neq R_l R_k$  (grupa izometrii nie jest przemienna). Natomiast dla  $k \perp l$  zachodzi  $R_k R_l = R_l R_k$  (Rys.2.4). Takie złożenie dwóch odbić w lustrach prostopadłych nazywamy symetrią środkową (symetrią o środku w punkcie  $A$ ) i oznaczamy przez  $H_A$  gdzie  $A$  jest punktem przecięcia luster.

Wszystkie punkty leżące na lustrze  $l$  są punktami stałymi odbicia  $R_l$ .

### Translacja $T_{\bar{u}}$ o wektor $\bar{u}$

Wektor  $\bar{u}$  jest ustalony i określa przekształcenie. Przesunięcie o wektor  $\bar{u}$  punktów płaszczyzny równoważne jest z dwukrotnym odbiciem w dwóch dowolnych lustrach równoległych  $l_1, l_2$ , odległych od siebie o długość  $d = \frac{|\bar{u}|}{2}$  i prostopadłych do wektora  $\bar{u}$ . Wtedy  $T_{\bar{u}} = R_2 R_1$  (dowód tego faktu wynika z przekształceń analitycznych na płaszczyźnie).



Rys. 2.2. Translacja o wektor  $\bar{u}$

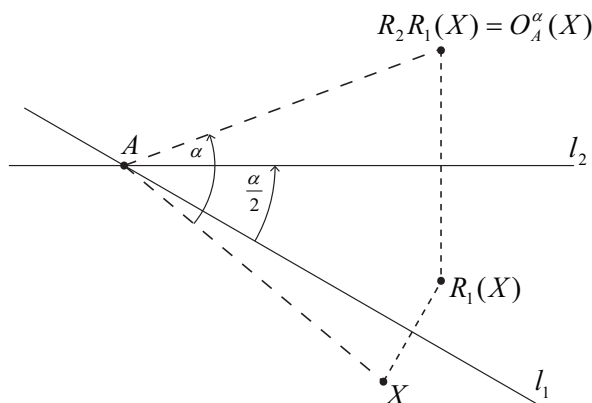
Translacja nie posiada żadnych punktów stałych (chyba, że jest identycznością a więc gdy  $\bar{u} = \bar{0}$ ). Przekształceniem odwrotnym do translacji o wektor  $\bar{u}$  jest translacja o wektor  $-\bar{u}$  a więc  $T_{\bar{u}} T_{-\bar{u}} = T_{-\bar{u}} T_{\bar{u}} = I$ .

### Obrót $O_A^\alpha$ wokół punktu $A$ o kąt skierowany $\alpha$ .

Punkt  $A$  (środek obrotu) i kąt  $\alpha$  (kąt obrotu) są ustalone i określają przekształcenie. Kąt mierzymy przeciwnie do biegu wskazówek zegara. Obrót wokół punktu  $A$  o kąt  $\alpha$  jest równoważny ze złożeniem dwóch odbić w dowolnie położonych na płaszczyźnie lustrach odpowiednio  $l_1, l_2$  – ale przecinających



się w punkcie  $A$  pod kątem skierowanym  $\frac{\alpha}{2}$ . Wtedy  $O_A^\alpha = R_2 R_1$  (dowód tego faktu wynika z dosyć żmudnych przekształceń analitycznych na płaszczyźnie).

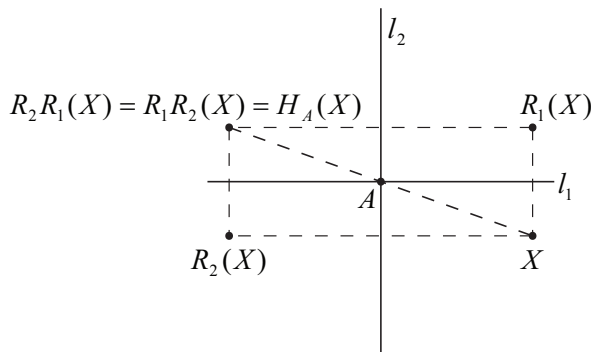


**Rys. 2.3.** Obrót wokół punktu  $A$  o kąt  $\alpha$

W przypadku nietrywialnym – tzn. gdy  $\alpha \neq 0$  istnieje tylko jeden punkt stały tego przekształcenia – jest nim środek obrotu  $A$ .

Przekształceniem odwrotnym do obrotu o środka w punkcie  $A$  i o kąt  $\alpha$  jest także obrót o środka  $A$ , ale o kąt  $-\alpha$  stąd  $O_A^\alpha O_A^{-\alpha} = O_A^{-\alpha} O_A^\alpha = I$ .

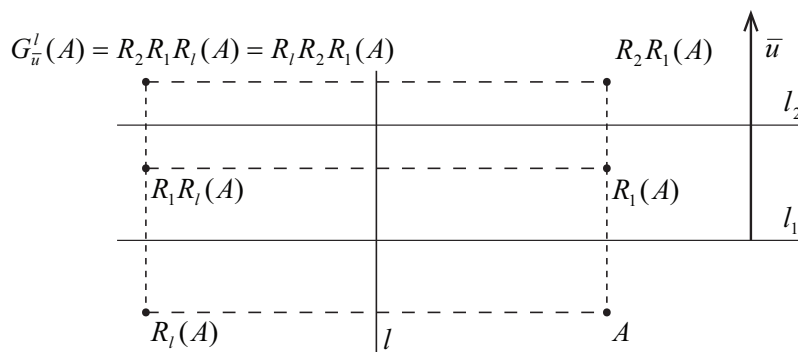
Oczywiście symetria środkowa jest obrotem o kąt  $180^\circ$ :  $H_A = O_A^{180}$ .



**Rys. 2.4.** Odbicia w lustrach prostopadłych

**Odbicie z poślizgiem**  $G_{\vec{u}}^l$  – odbicie w prostej  $l$  (w lustrze  $l$ ) z przesunięciem o wektor  $\vec{u}$ .

Prosta  $l$  oraz koniecznie równoległy do niej wektor  $\bar{u}$  są ustalone i określają przekształcenie. Z definicji odbicie z poślizgiem jest złożeniem w dowolnej kolejności: odbicia w prostej  $l$  i translacji o wektor  $\bar{u}$  równoległy do tej prostej:  $G_{\bar{u}}^l = R_l T_{\bar{u}} = T_{\bar{u}} R_l, \bar{u} \parallel l$ .



Rys. 2.5. Odbicie z poślizgiem o wektor  $\bar{u}$ , w lustrze  $l$

Odbicie z nietrywialnym poślizgiem nie posiada żadnego punktu stałego. (Jeśli  $\bar{u} = 0$  to punktami stałymi są wszystkie punkty lustra  $l$ . Wtedy  $G_{\bar{u}}^l = R_l$ ).

Przekształceniem odwrotnym do odbicia w prostej  $l$  z poślizgiem o wektor  $\bar{u}, \bar{u} \parallel l$ , jest to samo odbicie w prostej  $l$  ale z poślizgiem o wektor  $-\bar{u}$  stąd  $G_{\bar{u}}^l G_{-\bar{u}}^l = G_{-\bar{u}}^l G_{\bar{u}}^l = I$ .

**Uwaga 1.** Zestaw luster translacji można dowolnie przesuwać na płaszczyźnie równoległe do wektora translacji. Podobnie zestawem luster obrotu można dowolnie kręcić wokół środka obrotu.

**Uwaga 2.** Z twierdzenia 14 każda izometria płaszczyzny jest złożeniem co najwyżej trzech odbić. A więc może być tylko jednym z powyżej rozważanych przekształceń: identycznością, odbiciem, translacją, obrotem lub odbiciem z poślizgiem.

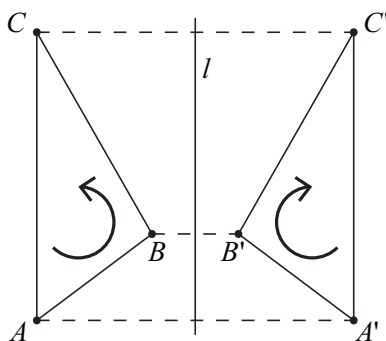
## Przykłady

**P.13** Znaleźć wszystkie izometrie następujących liter **A, B, C, F, G, P, N, S, Z, H, O**

## 2.2 Izometrie płaszczyzny zgodne i przeciwne (parzyste i nieparzyste)

Niech  $\triangle ABC$  i  $\triangle A'B'C'$  będą trójkątami przystającymi. Izometria  $F(A) = A'$ ,  $F(B) = B'$ ,  $F(C) = C'$  jest wyznaczona jednoznacznie, bowiem zgodnie z twierdzeniem 13 istnieje tylko jedna izometria o powyższej własności. Jeśli zachowuje ona orientację płaszczyzny to nazywamy ją izometrią zgodną (parzystą). Jeśli nie zachowuje – to jest izometrią przeciwną (nieparzystą).

Izometrie zgodne to: identyczność, obroty (istnieje punkt stały) i translacje (brak punktów stałych).



Rys. 2.6. Odbicie zmienia orientację płaszczyzny

Izometrie przeciwne to: odbicia (istnieje punkt stały) i odbicia z poślizgiem (brak punktów stałych).

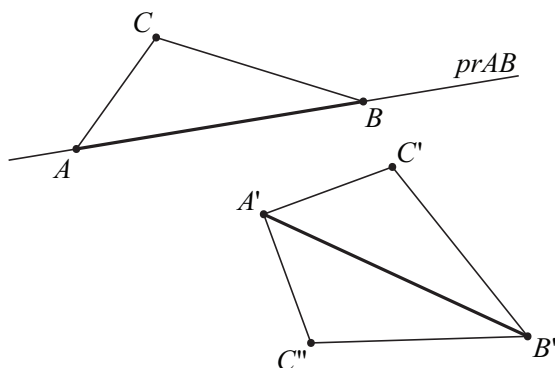
Izometrie zgodne i przeciwne w złożeniu (czyli iloczynie przekształceń) zachowują się jak liczby dodatnie i ujemne w zwykłym iloczynie: iloczyn dwóch izometrii zgodnych jest izometrią zgodną, dwóch przeciwnych zgodną, przeciwnej i zgodnej – przeciwną itd.

### Przykład

**P.14** Pokazać, że każde dwa przystające odcinki w  $\mathbb{R}^2$  można przekształcić na siebie za pomocą i izometrii zgodnej i izometrii przeciwnej.

Dowód.

Niech  $AB, A'B'$  odcinki przystające i niech  $C$  nie należy do prostej  $AB$ . Szukamy takiego punktu  $C'$  aby trójkąt  $\Delta ABC$  był przystający do trójkąta  $\Delta A'B'C'$ . Zawsze na płaszczyźnie są dwa takie punkty – wyznaczają one odpowiednio izometrię zgodną i przeciwną.

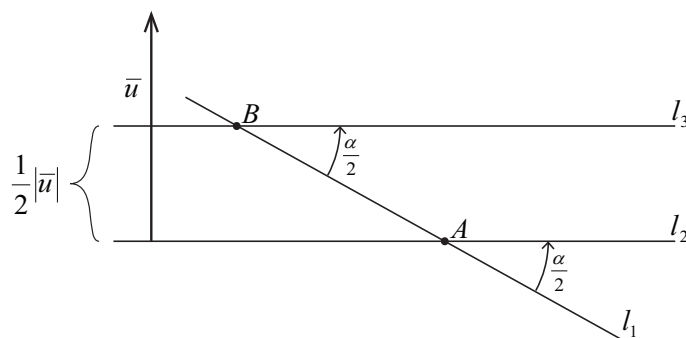


**Rys. 2.7.** Izometria zgodna  $F_1(\Delta ABC) = \Delta A'B'C'$ , izometria przeciwna  $F_2(\Delta ABC) = \Delta A'B'C''$

### 2.3 Składanie izometrii – podstawowe konstrukcje.

Konstrukcje geometryczne przeprowadzane przy składaniu izometrii polegają przeważnie na takiej zmianie zestawu luster translacji lub obrotu (zmiana ta jest możliwa na podstawie Uwagi 1) aby w złożeniu wystąpiły kolejno dwa odbicia w tym samym lustrze – czyli identyczność, którą możemy pominąć.

**Złożenie obrotu  $O_A^\alpha$  z translacją  $T_{\bar{u}}$ . Izometria  $F = T_{\bar{u}}O_A^\alpha$ . Dane: wektor  $\bar{u}$ , punkt  $A$ , kąt  $\alpha$ .**

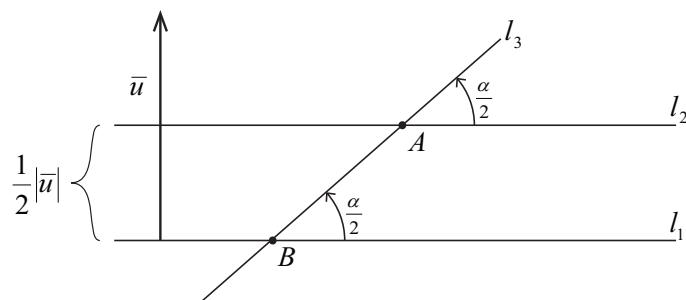


**Rys. 2.8.** Złożenie obrotu o środku  $A$  z translacją o wektor  $\bar{u}$

Korzystając z Uwagi 1 możemy przyjąć drugie lustro obrotu jako pierwsze lustro translacji:  $O_A^\alpha = R_2 R_1$ ,  $T_{\bar{u}} = R_3 R_2$ . Stąd  $F = T_{\bar{u}} O_A^\alpha = R_3 R_2 R_2 R_1 = R_3 I R_1 = R_3 R_1 = O_B^\alpha$ .

**Złożenie translacji  $T_{\bar{u}}$  z obrotem  $O_A^\alpha$ . Izometria  $F = O_A^\alpha T_{\bar{u}}$ . Dane: wektor  $\bar{u}$ , punkt  $A$ , kąt  $\alpha$ .**

Podobnie, korzystając z Uwagi 1, przyjmujemy drugie lustro translacji jako pierwsze lustro obrotu. Stąd  $F = O_A^\alpha T_{\bar{u}} = R_3 R_2 R_2 R_1 = R_3 I R_1 = R_3 R_1 = O_B^\alpha$ .

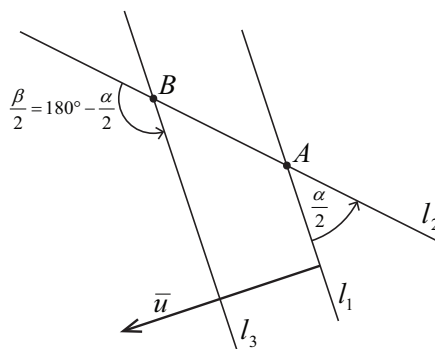


**Rys. 2.9.** Złożenie translacji o wektor  $\bar{u}$  z obrotem o środku  $A$

**Złożenie dwóch obrotów. Izometria  $F = O_B^\beta O_A^\alpha$ . Dane: punkty  $A, B$ , kąty  $\alpha, \beta$ .**

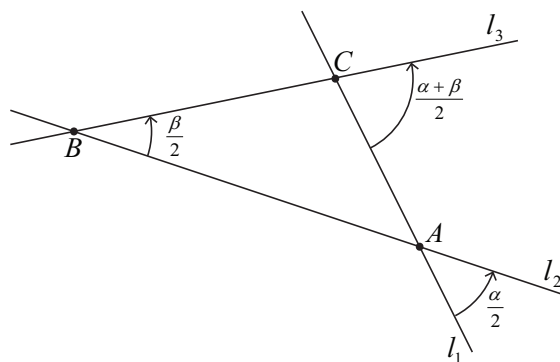
1. Jeśli  $A = B$  to oczywiście  $O_B^\beta O_A^\alpha = O_A^{\alpha+\beta}$ .

2. Jeśli  $A \neq B$  i  $\alpha + \beta = k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$  to przyjmując prostą  $AB = l_2$  jako drugie lustro obrotu o środku  $A$  i jako pierwsze lustro obrotu o środku  $B$  otrzymujemy  $O_A^\alpha = R_2R_1, O_B^\beta = R_3R_2$  oraz  $F = O_B^\beta O_A^\alpha = R_3R_2R_2R_1 = R_3IR_1 = R_3R_1 = T_{\vec{u}}$ .



**Rys. 2.10.** Złożenie dwóch obrotów o różnych środkach w przypadku gdy suma kątów obrotu jest wielokrotnością  $360^\circ$

3. Jeśli  $A \neq B$  i  $(\alpha + \beta) \pmod{360^\circ} < 360^\circ$  to podobnie jak poprzednio, przyjmując prostą  $AB = l_2$  jako drugie lustro obrotu o środku  $A$  i jako pierwsze lustro obrotu o środku  $B$ , otrzymujemy  $O_A^\alpha = R_2R_1, O_B^\beta = R_3R_2$ . Stąd  $F = O_B^\beta O_A^\alpha = R_3R_2R_2R_1 = R_3IR_1 = R_3R_1 = O_C^{\alpha+\beta}$ .

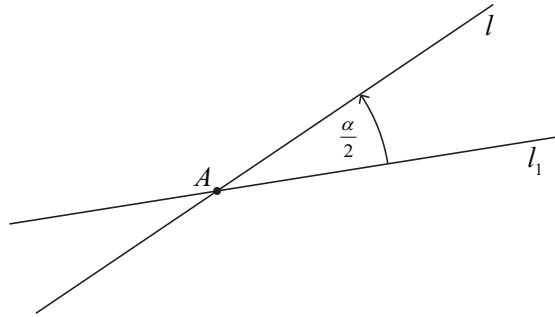


**Rys. 2.11.** Złożenie dwóch obrotów o różnych środkach w przypadku gdy suma kątów obrotu  $\pmod{360^\circ}$  jest mniejsza od  $360^\circ$

**Złożenie obrotu  $O_A^\alpha$  z odbiciem  $R_l$ . Izometria  $F = R_l O_A^\alpha$ . Dane: punkt  $A$ , kąt  $\alpha$ , prosta  $l$ .**

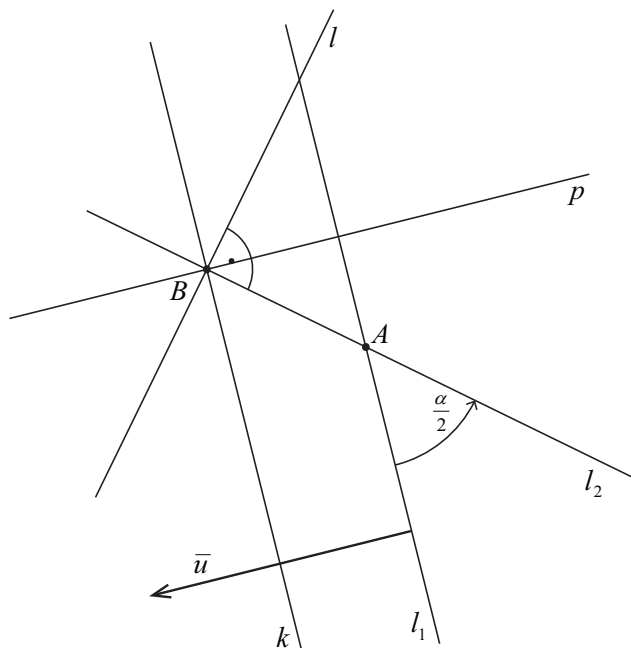
1. Jeśli  $A \in l$  to jako drugie lustro obrotu przyjmiemy prostą  $l$ . Wtedy  $O_A^\alpha = R_l R_1$  oraz

$$F = R_l O_A^\alpha = R_l R_l R_1 = I R_1 = R_1.$$



**Rys. 2.12.** Złożenie obrotu z odbiciem w przypadku, gdy środek obrotu leży na lustrze odbicia

2. Jeśli  $A \notin l$  to drugie lustro obrotu przyjmujemy prostopadłe do prostej  $l$ . Wtedy  $O_A^\alpha = R_2 R_1, l_2 \perp l$  oraz  $F = R_l O_A^\alpha = R_l R_2 R_1 = H_B R_1$ .

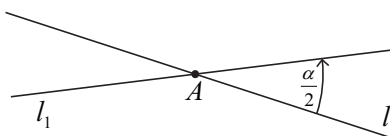


**Rys. 2.13.** Złożenie obrotu z odbiciem w przypadku, gdy środek obrotu nie leży na lustrze odbicia

Zestaw prostopadłych luster  $\{l_2, l\}$  symetrii środkowej  $H_B$  obracamy tak, żeby prosta  $l_2$  przeszła w prostą  $k, k \parallel l_1$ . Prosta  $l$  przejdzie wtedy w prostą  $p, p \perp l_1, p \perp k$ . Otrzymujemy  $F = R_l O_A^\alpha = R_p R_k R_1 = R_p T_{\bar{u}} = G_{\bar{u}}^p$ , ponieważ  $\bar{u} \parallel p$ .

**Złożenie odbicia  $R_l$  z obrotem  $O_A^\alpha$ . Izometria  $F = O_A^\alpha R_l$ . Dane: punkt  $A$ , kąt  $\alpha$ , prosta  $l$ .**

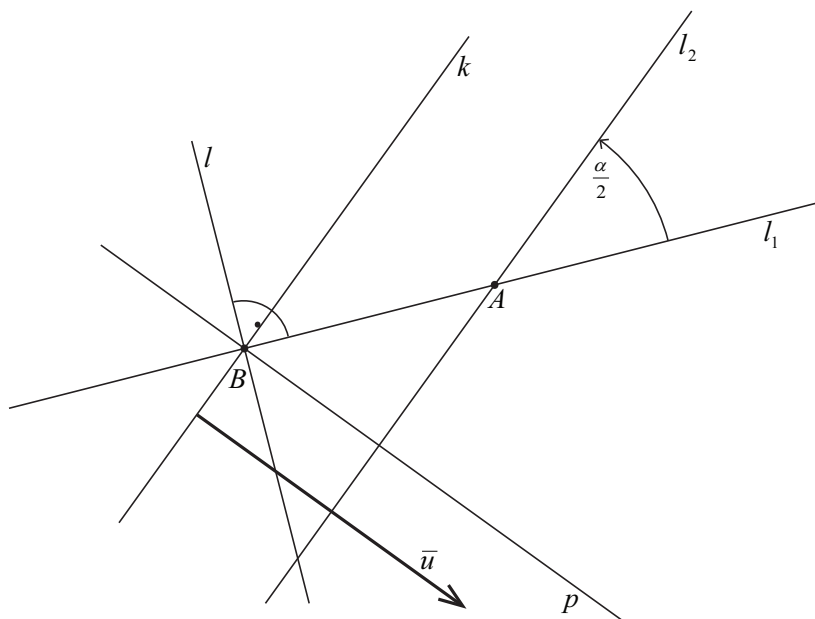
1. Jeśli  $A \in l$  to jako pierwsze lustro obrotu  $O_A^\alpha$  przyjmujemy prostą  $l$ . Wtedy  $O_A^\alpha = R_l R_l$  oraz  $F = O_A^\alpha R_l = R_l R_l R_l = R_l I = R_l$ .



**Rys. 2.14.** Złożenie odbicia z obrotem w przypadku, gdy środek obrotu  $A$  leży na lustrze  $l$  odbicia



2. Jeśli  $A \notin l$  to pierwsze lustro obrotu  $O_A^\alpha$  przyjmujemy prostopadłe do prostej  $l$ . Wtedy  $O_A^\alpha = R_2R_1$ ,  $l_1 \perp l$  oraz  $O_A^\alpha R_l = R_2R_1R_l = R_2H_B$ . Zestaw prostopadłych luster  $\{l_1, l\}$  symetrii środkowej  $H_B$  możemy obrócić tak, żeby prosta  $l_1$  przeszła w prostą  $k$ ,  $k \parallel l_2$ . Prosta  $l$  przejdzie wtedy w prostą  $p$ ,  $p \perp l_2$ ,  $p \perp k$ . Otrzymujemy  $O_A^\alpha R_l = R_2R_kR_p = T_{\bar{u}}R_p = G_{\bar{u}}^p$ , ponieważ  $\bar{u} \parallel p$ .



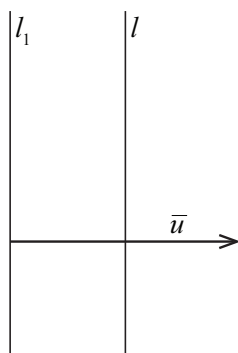
**Rys. 2.15.** Złożenie odbicia z obrotem w przypadku, gdy środek obrotu nie leży na lustrze  $l$  odbicia

Zestaw prostopadłych luster w symetrii środkowej  $H_B$  możemy obrócić tak, żeby prosta  $l_1$  przeszła w prostą  $k$ ,  $k \parallel l_2$ . Prosta  $l$  przejdzie wtedy w prostą  $p$ ,  $p \perp l_2$ ,  $p \perp k$ . Otrzymujemy  $O_A^\alpha R_l = R_2R_kR_p = T_{\bar{u}}R_p = G_{\bar{u}}^p$ , ponieważ  $\bar{u} \parallel p$ .

**Złożenie translacji  $T_{\bar{u}}$  z odbiciem  $R_l$ . Izometria  $F = R_lT_{\bar{u}}$ . Dane: wektor  $\bar{u}$ , prosta  $l$ .**

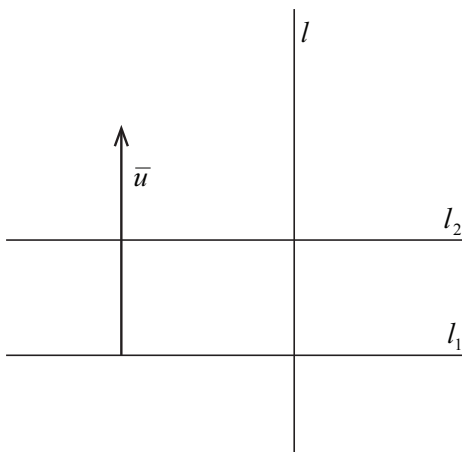
1. Jeśli  $\bar{u} \perp l$  to przyjmujemy prostą  $l$  jako drugie lustro translacji. Wtedy

$$F = R_lT_{\bar{u}} = R_lR_lR_1 = IR_1 = R_1.$$



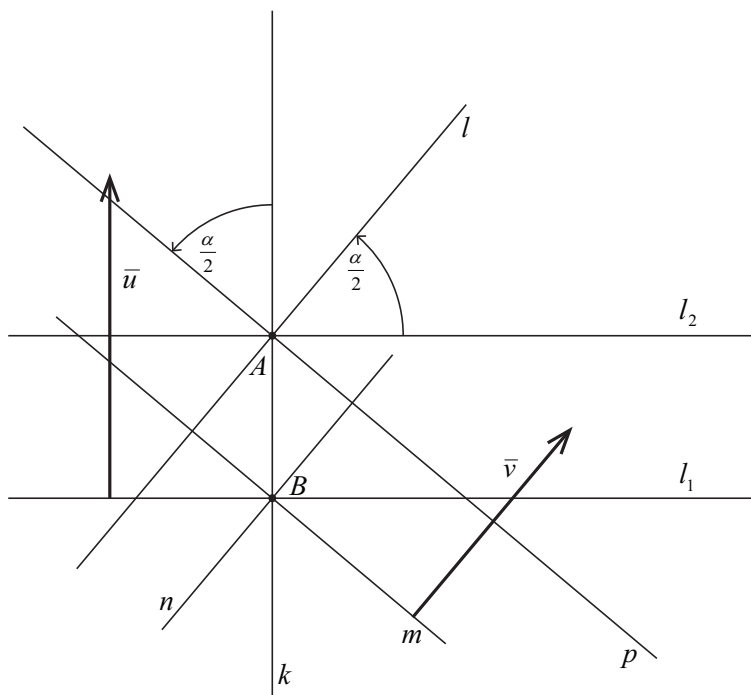
**Rys. 2.16.** Złożenie translacji z odbiciem w przypadku, gdy wektor przesunięcia jest prostopadły do lustra odbicia

2. Jeśli  $\bar{u} \parallel l$  to  $F = R_l T_{\bar{u}} = G_{\bar{u}}^l$ .



**Rys. 2.17.** Złożenie translacji z odbiciem w przypadku, gdy wektor przesunięcia jest równoległy do lustra odbicia

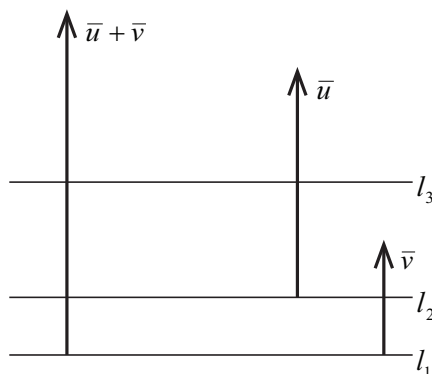
3. W pozostałych przypadkach  $F = R_l T_{\bar{u}} = R_l R_2 R_1 = O_A^\alpha R_1$ . Zestaw luster obrotu o środku  $A$  kręcimy tak, żeby  $O_A^\alpha = R_l R_2 = R_p R_k$ ,  $k \perp l_2$ ,  $k \perp l_1$ . Wtedy  $R_l T_{\bar{u}} = O_A^\alpha R_1 = R_p H_B$ . Podobnie kręcimy zestaw luster obrotu o środku  $B$  w ten sposób, aby  $H_B = R_k R_1 = R_m R_n$ ,  $m \parallel p$ ,  $n \perp p$ . Stąd  $F = R_l T_{\bar{u}} = O_A^\alpha R_1 = R_p H_B = R_p R_m R_n = T_{\bar{v}} R_n = G_{\bar{v}}^n$ .



**Rys. 2.18.** Złożenie translacji z odbiciem w przypadku, gdy wektor przesunięcia nie jest ani prostopadły, ani równoległy do lustra odbicia

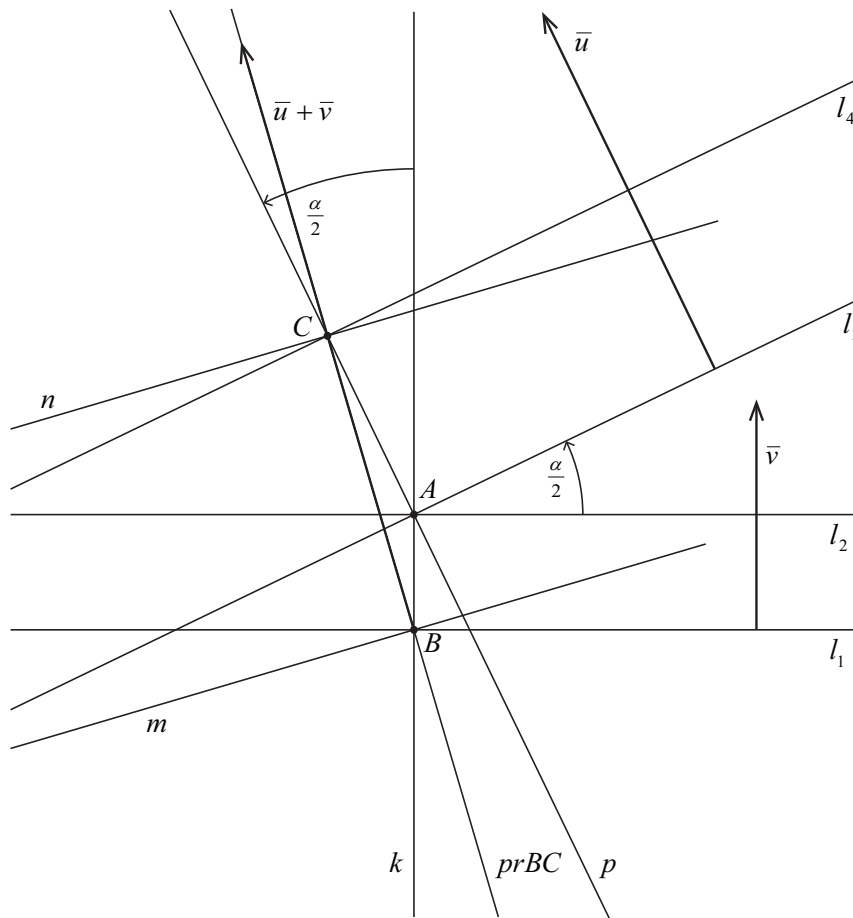
**Złożenie dwóch translacji. Izometria  $F = T_{\bar{u}}T_{\bar{v}}$ . Dane: wektory  $\bar{v}, \bar{u}$ .**

1. Jeśli  $\bar{u} \parallel \bar{v}$  to drugie lustro translacji  $T_{\bar{v}}$  przyjmujemy jako pierwsze lustro translacji  $T_{\bar{u}}$ . Wtedy  $F = T_{\bar{u}}T_{\bar{v}} = R_3R_2R_2R_1 = R_3R_1 = T_{\bar{u}+\bar{v}}$ .



**Rys. 2.19.** Złożenie dwóch translacji o równoległych wektorach przesunięcia

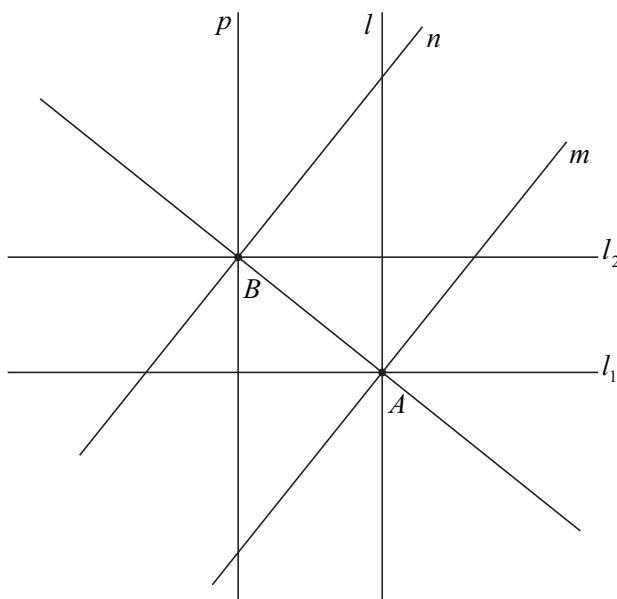
2. Jeśli wektory  $\bar{u}, \bar{v}$  nie są równoległe to  $F = T_{\bar{u}}T_{\bar{v}} = R_4R_3R_2R_1 = R_4O_A^\alpha R_1$ . Zmieniamy zestaw luster  $\{l_2, l_3\}$  obrotu o środku  $A$  na zestaw  $\{k, p\}$ :  $O_A^\alpha = R_3R_2 = R_pR_k, k \perp l_2, p \perp l_3$  czyli  $k \perp l_1, p \perp l_4$ . Wtedy  $F = T_{\bar{u}}T_{\bar{v}} = R_4O_A^\alpha R_1 = R_4R_pR_kR_1 = H_C H_B$ . Przyjmujemy prostą  $BC$  jako wspólne lustro obu symetrii środkowych. Stąd  $H_C = R_m R_{BC}, H_B = R_{BC} R_n$  i  $F = T_{\bar{u}}T_{\bar{v}} = H_C H_B = R_m R_{BC} R_{BC} R_n = R_m I R_n = R_m R_n = T_{\bar{u}+\bar{v}}$ .



**Rys. 2.20.** Złożenie dwóch translacji o nierównoległych wektorach przesunięcia

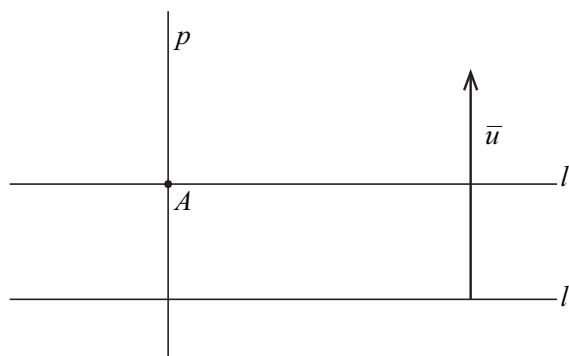
**Złożenie odbicia  $R_l$  z odbiciem z poślizgiem  $G_u^p$ . Izometria  $F = G_u^p R_l$ . Dane: proste  $l, p$ , wektor  $\bar{u} \parallel l$ .**

1. Jeśli  $l \parallel p$  to  $F = G_u^p R_l = R_2 R_1 R_p R_l = R_2 R_p R_1 R_l = H_B H_A = R_n R_{AB} R_{AB} R_m = R_n R_m = T_{\bar{v}}$ .



**Rys. 2.21.** Złożenie odbicia z odbiciem z poślizgiem w przypadku, gdy lustra odbić  $l, p$  są równoległe

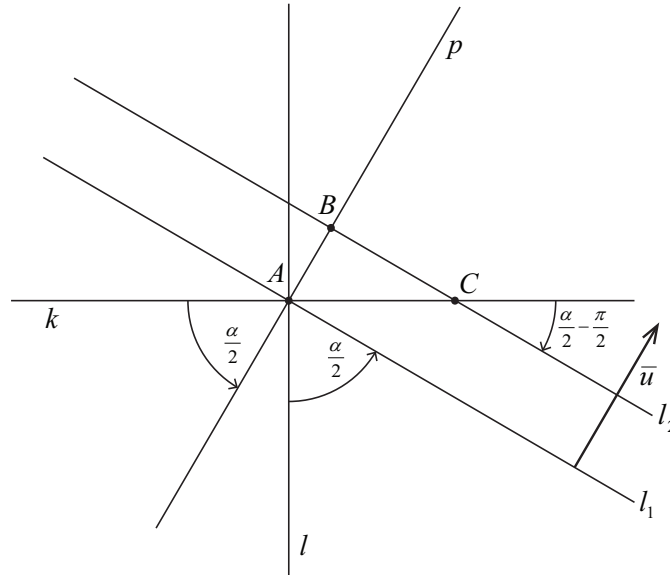
2. Poglądowo rozpatrzmy sytuację, gdy  $l \perp p$ . Wtedy prostą  $l$  przyjmujemy jako pierwsze lustro translacji  $T_{\bar{u}}$ . Otrzymujemy  $F = G_{\bar{u}}^p R_l = R_p T_{\bar{u}} R_l = R_p R_1 R_l R_l = R_p R_1 I = R_p R_1 = H_A$ .



**Rys. 2.22.** Złożenie odbicia z odbiciem z poślizgiem w przypadku, gdy lustra  $l, p$  odbić są prostopadłe

3. Ogólnie, gdy  $l \cap p = A$  to zestaw luster translacji  $T_{\bar{u}} = R_2 R_1$  przesuwamy równoległe do wektora  $\bar{u}$ , tak żeby pierwsze lustro  $l_1$  translacji zawierało punkt  $A$ . Wtedy  $F = G_{\bar{u}}^p R_l = R_p R_2 R_1 R_l = H_B O_A^\alpha$ . Ponownie

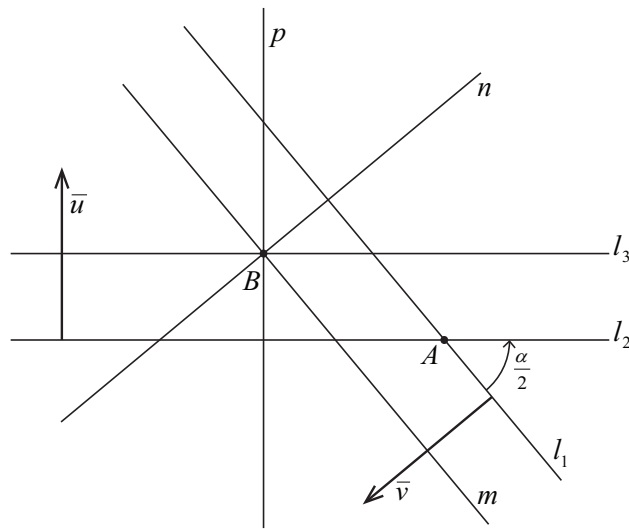
można dokonać zmiany zestawu luster poszczególnych obrotów – tak, żeby wspólnym lustrem dla tych przekształceń była prosta  $AB$ . Niech  $prAB = p$ . Wtedy  $F = G_u^p R_l = H_B O_A^\alpha = R_2 R_p R_p R_k = R_2 I R_k = R_2 R_k = O_C^{\alpha-\pi}$ .



**Rys. 2.23.** Złożenie odbicia z odbiciem z poślizgiem w przypadku, gdy lustra  $l, p$  odbić nie są ani równoległe ani prostopadłe

**Złożenie obrotu  $O_A^\alpha$  z odbiciem z poślizgiem  $G_u^p$ . Izometria  $F = G_u^p O_A^\alpha$ . Dane: punkt  $A$ , kąt  $\alpha$ , prosta  $p$ , wektor  $\bar{u} \parallel p$ .**

Przyjmujemy drugie lustro obrotu jako pierwsze lustro translacji. Wtedy  $F = G_u^p O_A^\alpha = R_p T_{\bar{u}} O_A^\alpha = R_p R_3 R_2 R_2 R_1 = R_p R_3 R_1 = H_B R_1$ . Zestaw luster w symetrii środkowej możemy obrócić tak, żeby jedno z luster było równoległe a drugie prostopadłe do lustra  $l_1$ . Stąd  $F = G_v^p O_A^\alpha = R_n R_m R_1 = G_v^n$ .

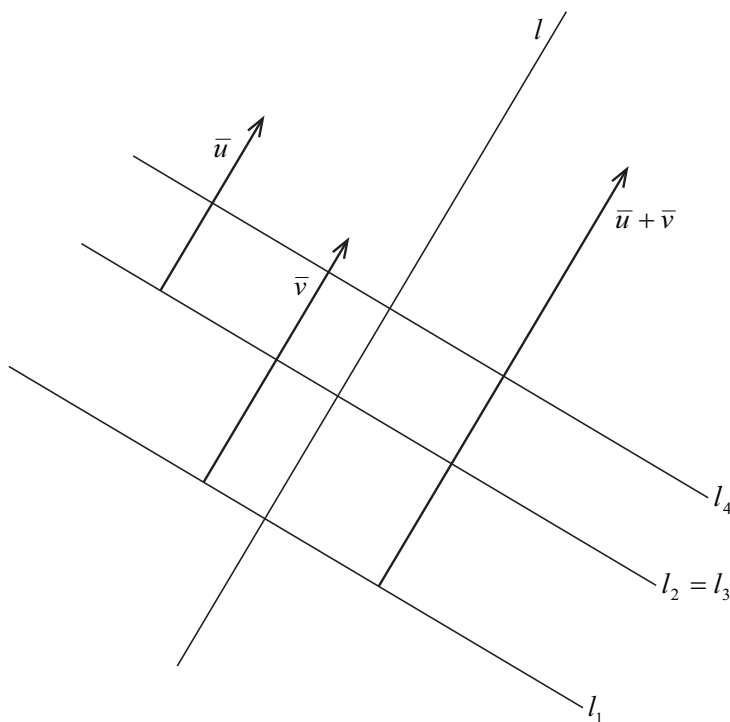


**Rys. 2.24.** Złożenie obrotu z odbiciem z poślizgiem

**Złożenie translacji  $T_{\bar{u}}$  z odbiciem z poślizgiem  $G_{\bar{v}}^l$ . Izometria  $F = G_{\bar{v}}^l T_{\bar{u}}$ . Dane: prosta  $l$ , wektory  $\bar{u}, \bar{v}$ .**

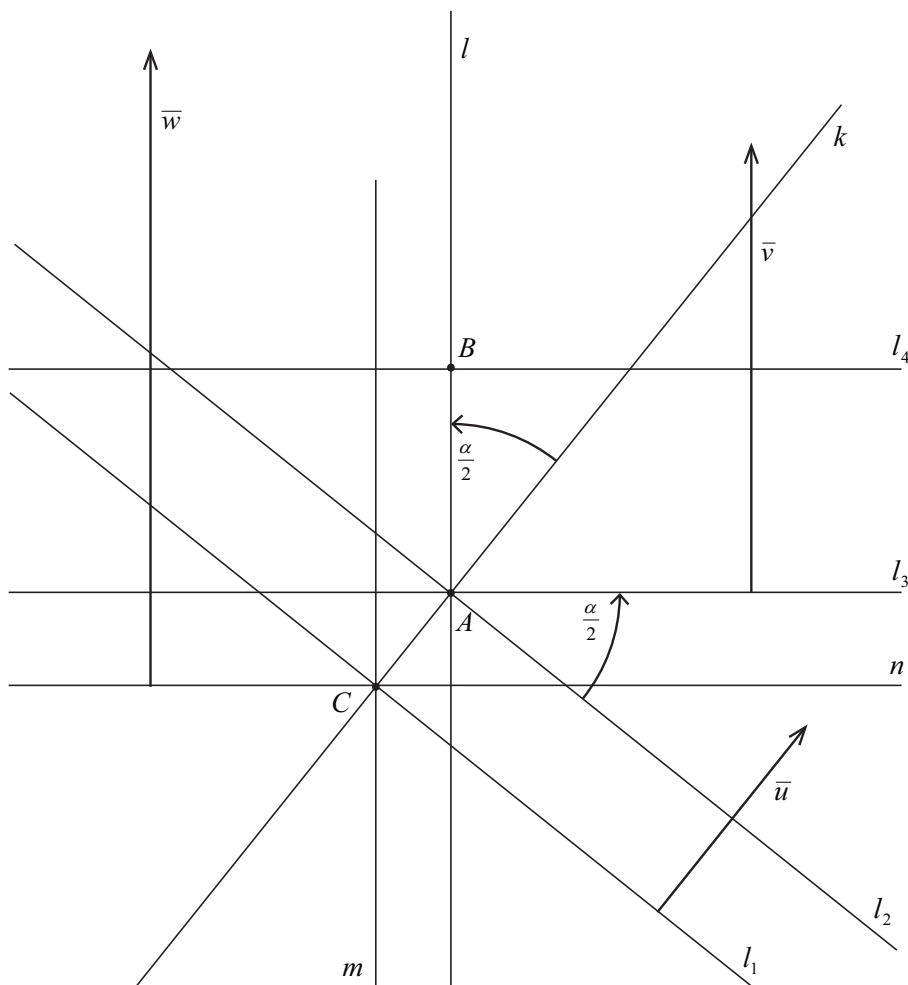
1. Jeśli  $\bar{u} \parallel \bar{v}$  to  $G_{\bar{v}}^l T_{\bar{u}} = R_l R_3 R_2 R_2 R_1 = R_l R_3 R_1 = G_{\bar{v}+\bar{u}}^l$ .





**Rys. 2.25.** Złożenie translacji z odbiciem z poślizgiem w przypadku, gdy wektory przesunięcia są równoległe

2. Jeśli wektory  $\bar{u}, \bar{v}$  nie są równoległe i  $G_{\bar{v}}^l = R_l T_{\bar{v}} = R_l R_4 R_3$ ,  $l \cap l_3 = A$ , to lustra translacji  $T_{\bar{u}} = R_2 R_1$  przesuwamy tak, żeby  $A \in l_2$ . Wtedy  $G_{\bar{v}}^l T_{\bar{u}} = R_l T_{\bar{v}} T_{\bar{u}} = R_l R_4 R_3 R_2 R_1 = H_B O_A^\alpha R_1$ . Wybieramy wspólne lustro  $prAB = l$  dla obrotów o środkach  $A, B$  – co oznacza, że  $G_{\bar{v}}^l T_{\bar{u}} = H_B O_A^\alpha R_1 = R_4 R_l R_l R_k R_1 = R_4 I R_k R_1 = R_4 R_k R_1, k \perp l_2 \Rightarrow k \perp l_1$ . Stąd  $G_{\bar{v}}^l T_{\bar{u}} = R_4 H_C$ . Zestaw luster symetrii środkowej  $H_C$  obracamy teraz tak, żeby jedno z luster było równoległe do  $l_4$  a jedno prostopadłe:  $H_C = R_n R_m, m \perp l_4, n \parallel l_4$ . Wtedy  $G_{\bar{v}}^l T_{\bar{u}} = R_4 R_n R_m = T_{\bar{w}} R_m = G_{\bar{w}}^m$ .



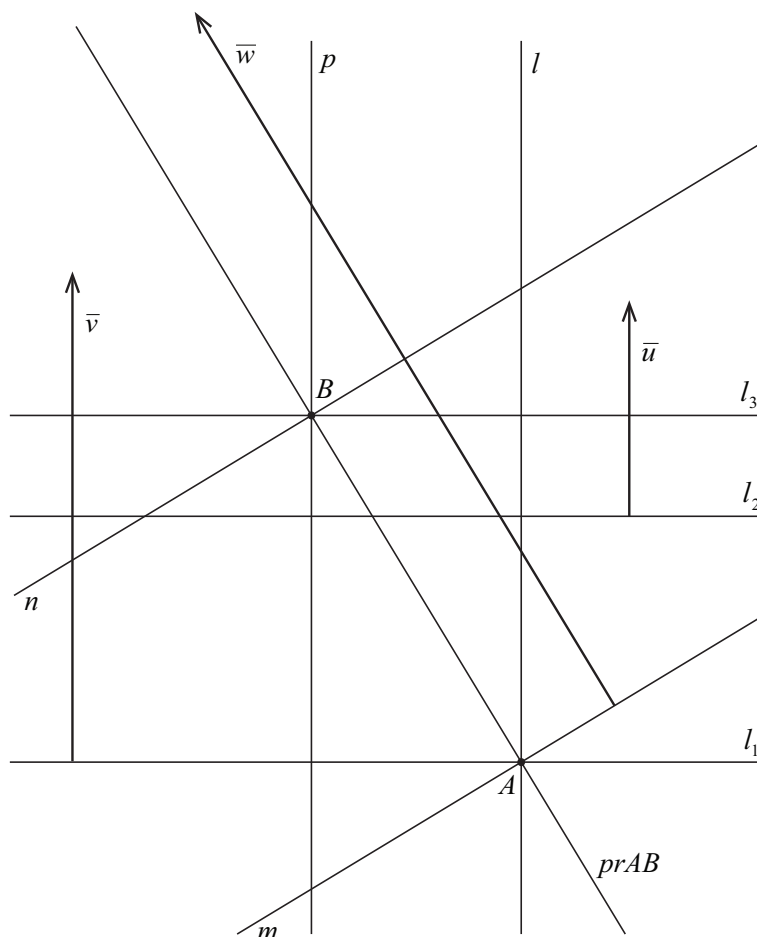
**Rys. 2.26.** Złożenie translacji z odbiciem z poślizgiem w przypadku, gdy wektory przesunięcia nie są równoległe

**Złożenie odbicia z poślizgiem  $G_{\bar{v}}^l$  z odbiciem z poślizgiem  $G_{\bar{u}}^p$ .**  
**Izometria  $F = G_{\bar{u}}^p G_{\bar{v}}^l$ . Dane: proste  $l, p$ , wektory  $\bar{u}, \bar{v}$ .**

1. Jeśli  $l \parallel p$  to  $\bar{u} \parallel \bar{v}$  i przyjmujemy drugie lustro translacji  $T_{\bar{v}}$  jako pierwsze lustro translacji  $T_{\bar{u}}$ . Wtedy  $G_{\bar{u}}^p G_{\bar{v}}^l = R_p T_{\bar{u}} T_{\bar{v}} R_l = R_p R_3 R_2 R_2 R_1 R_l = R_p R_3 R_1 R_l = H_B H_A$ . Symetrie środkowe opisujemy korzystając ze wspólnego lustra  $prAB$ . Stąd

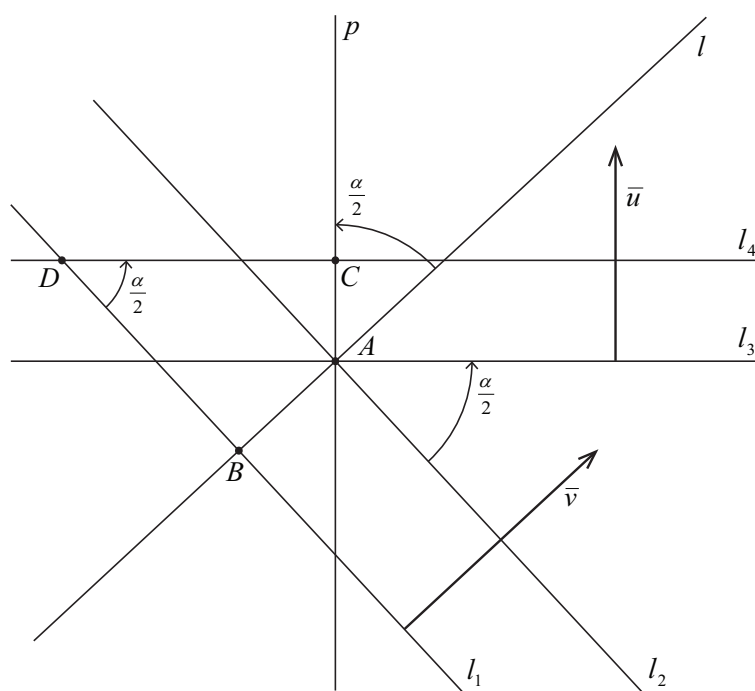
$$G_{\bar{u}}^p G_{\bar{v}}^l = H_B H_A = R_n R_{AB} R_{AB} R_m = R_n R_m = T_{\bar{w}}$$

ponieważ  $m \parallel n$ .



**Rys. 2.27.** Złożenie dwóch odbić z poślizgiem w przypadku, gdy lustra (a więc i wektory przesunięcia) są równoległe

2. Jeśli proste nie są równoległe to  $l \cap p = A$ . Lustra translacji  $T_{\bar{v}} = R_2 R_1$  i  $T_{\bar{u}} = R_4 R_3$  umieszczamy tak, aby  $l_2 \cap l_3 = A$ . Wtedy  $G_{\bar{u}}^p G_{\bar{v}}^l = R_p T_{\bar{u}} T_{\bar{v}} R_l = R_p R_4 R_3 R_2 R_1 R_l = H_C O_A^\alpha H_B$ . Zestaw luster obrotu o środku  $A$  możemy przekręcić tak, żeby lustro  $l_2$  przeszło w lustro  $l$ , lustro  $l_3$  w lustro  $p$ . Stąd  $G_{\bar{u}}^p G_{\bar{v}}^l = H_C O_A^\alpha H_B = R_4 R_p R_p R_l R_l R_1 = R_4 I I R_1 = R_4 R_1 = O_D^\alpha$ .



**Rys. 2.28.** Złożenie dwóch odbić z poślizgiem w przypadku, gdy lustra (a więc i wektory przesunięcia) nie są równoległe

Tabela 2.1. Tabela złożeń

złożenie izometrii ( $\rightarrow \circ \downarrow$ )	odbicie $R_2$ w lustrze $l_2$	obrót $O_A^\alpha$	translacja $T_u$	odbicie z poślizgiem $G_u^l$
odbicie $R_1$ w lustrze $l_1$	identyczność gdy $l_1 = l_2$ , translacja gdy $l_1 \parallel l_2$ , obrót w pozostałych przypadkach	odbicie gdy $A \in l_1$ , odbicie z poślizgiem gdy $A \notin l_1$	odbicie gdy $A \in l_1$ , odbicie z poślizgiem gdy $A \notin l_1$	translacja $T_u$ gdy $l_1 = l$ , translacja gdy $l_1 \parallel l, l_1 \neq l$ , obrót w pozostałych przypadkach
obrót $O_B^\beta$	odbicie gdy $B \in l_2$ , odbicie z poślizgiem gdy $B \notin l_2$	identyczność gdy $A = B$ i $\alpha + \beta = k \cdot 360^\circ$ lub $A \neq B$ i $\alpha = \beta = k \cdot 360^\circ$ , translacja gdy $A \neq B$ i $\alpha + \beta = k \cdot 360^\circ$ , obrót gdy $\alpha + \beta \neq k \cdot 360^\circ$	obrót o kąt $\beta$	odbicie gdy $B \in l, \beta = 180^\circ$ , odbicie z poślizgiem w pozostałych przypadkach
translacja $T_v$	odbicie gdy $\bar{v} \perp l_2$ , odbicie z poślizgiem w pozostałych przypadkach	obrót o kąt $\alpha$	translacja $T_{u+v}$	odbicie $R_l$ gdy $\bar{u} + \bar{v} = \bar{0}$ , odbicie z poślizgiem w pozostałych przypadkach
odbicie z poślizgiem $G_v^p$	translacja $T_v$ gdy $l_2 = p$ , translacja $T_w$ gdy $l_2 \parallel p, l_2 \neq p$ , obrót w pozostałych przypadkach	odbicie gdy $A \in p, O_A^\alpha = H_A$ , odbicie z poślizgiem w pozostałych przypadkach	odbicie $R_p$ gdy $\bar{u} + \bar{v} = \bar{0}$ , odbicie z poślizgiem w pozostałych przypadkach	translacja gdy $l \parallel p$ , obrót w pozostałych przypadkach

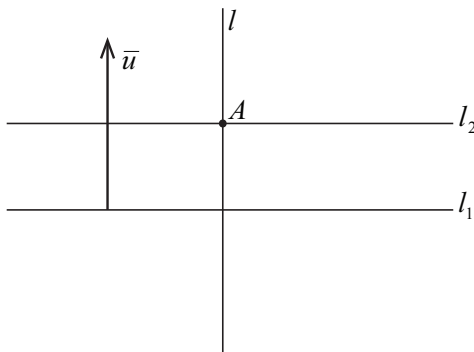
### Przykłady

**P.15** Wyznaczyć  $G_{\bar{u}}^l H_A G_{\bar{u}}^l, A \in l$

Dane: wektor  $\bar{u}$ , prosta  $l, l \parallel \bar{u}$ , oraz punkt  $A \in l$ . Wtedy  $G_{\bar{u}}^l H_A G_{\bar{u}}^l =$

$$G_{\bar{u}}^l H_A R_l T_{\bar{u}}.$$

Drugie lustro translacji  $T_{\bar{u}} = R_2 R_1$  przeprowadzamy przez punkt  $A$ . Stąd  $G_{\bar{u}}^l H_A G_{\bar{u}}^l = G_{\bar{u}}^l R_2 R_l R_l R_2 R_1 = G_{\bar{u}}^l R_2 I R_2 R_1 = G_{\bar{u}}^l R_2 R_2 R_1 = G_{\bar{u}}^l I R_1 = G_{\bar{u}}^l R_1 = R_l T_{\bar{u}} R_1 = R_l R_2 R_1 R_1 = R_l R_2$  a więc  $G_{\bar{u}}^l H_A G_{\bar{u}}^l = H_A$ .

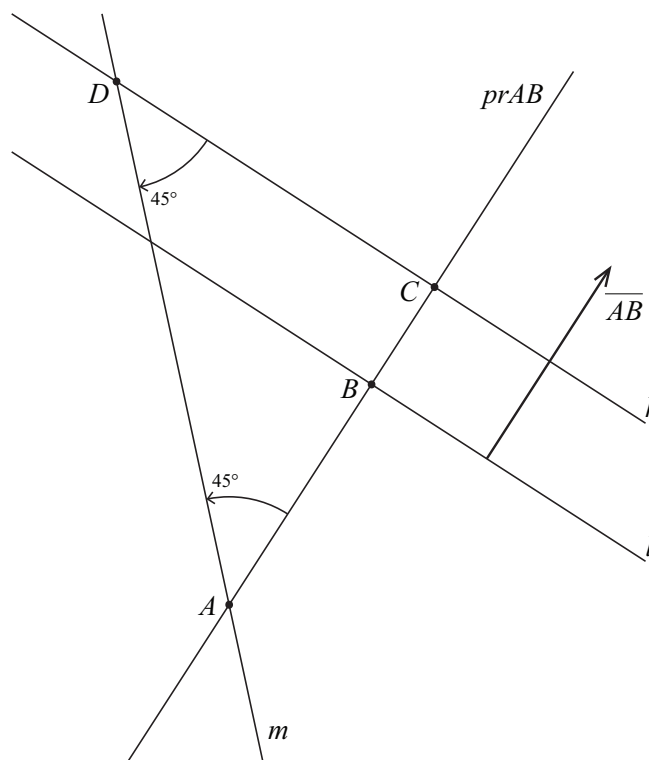


Rys. 2.29. Konstrukcja złożenia  $G_{\bar{u}}^l H_A G_{\bar{u}}^l$ ,  $A \in l$

**P.16** Wyznaczyć  $O_A^{90^\circ} T_{\overline{AB}} H_B$ .

Dane: punkty  $A, B$ . Jeśli  $A = B$  to  $T_{\overline{AB}} = I$  i  $O_A^{90^\circ} T_{\overline{AB}} H_B = O_A^{90^\circ} H_A = O_A^{270^\circ}$ .

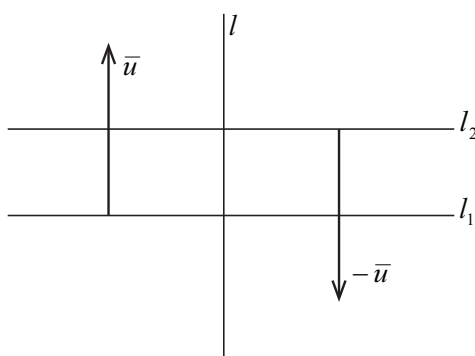
Jeśli  $A \neq B$  to jako drugie lustro symetrii  $H_B$  i pierwsze lustro translacji  $T_{\overline{AB}}$  przyjmujemy prostą  $l$  przechodzącą przez punkt  $B$ , prostopadłą do prostej  $AB$ . Wtedy  $O_A^{90^\circ} T_{\overline{AB}} H_B = O_A^{90^\circ} R_k R_l R_l R_{AB} = O_A^{90^\circ} R_k R_{AB} = O_A^{90^\circ} H_C$ . Te dwa obroty zapiszemy korzystając ze wspólnego lustra: prostej  $AC$ , która oczywiście jest też prostą  $AB$ . Wtedy  $O_A^{90^\circ} T_{\overline{AB}} H_B = O_A^{90^\circ} H_C = R_m R_{AC} R_{AC} R_k = R_m R_k = O_D^{-90^\circ}$ .



**Rys. 2.30.** Konstrukcja złożenia  $O_A^{90^\circ} T_{\overline{AB}} H_B$

**P.17** Wyznaczyć  $T_{\bar{u}} R_l T_{-\bar{u}}$ .

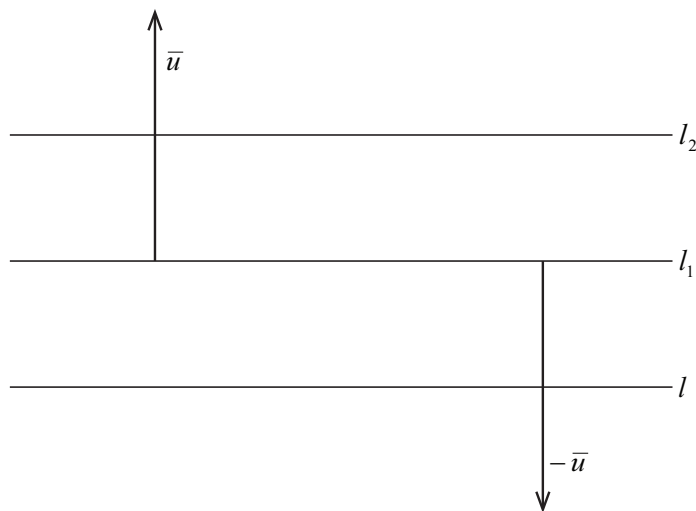
Dane: wektor  $\bar{u}$ , prosta  $l$ . Jeśli  $\bar{u} \parallel l$  to  $T_{\bar{u}} R_l T_{-\bar{u}} = T_{\bar{u}} G_{-\bar{u}}^l = T_{\bar{u}} T_{-\bar{u}} R_l = R_l$ .



**Rys. 2.31.** Konstrukcja złożenia  $T_{\bar{u}} R_l T_{-\bar{u}}$  gdy  $\bar{u} \parallel l$

Jeśli  $\bar{u} \perp l$  to przyjmujemy prostą  $l$  jako drugie lustro translacji  $T_{-\bar{u}}$ . Pierwszym lustrem translacji będzie prosta  $l_1$ . Wtedy  $T_{\bar{u}} R_l T_{-\bar{u}} = T_{\bar{u}} R_l R_l R_l =$

$T_{\bar{u}}R_l = R_2R_1R_l = R_2$ , gdzie  $l_2 \parallel l_1 \parallel l$ .



**Rys. 2.32.** Złożenie  $T_{\bar{u}}R_lT_{-\bar{u}}$  gdy  $\bar{u} \perp l$

W pozostałych przypadkach  $T_{\bar{u}}R_lT_{-\bar{u}} = T_{\bar{u}}R_lR_2R_1 = T_{\bar{u}}O_A^\alpha R_1$ . Zestaw luster obrotu  $O_A^\alpha$  przekreślimy tak, żeby prosta  $l_2$  przeszła na prostą  $m$ ,  $m \perp l_1$ ,  $m \perp l_2$ . Wtedy lustro  $l$  obrotu przejdzie na prostą  $k$ ,  $k \perp l$  oraz

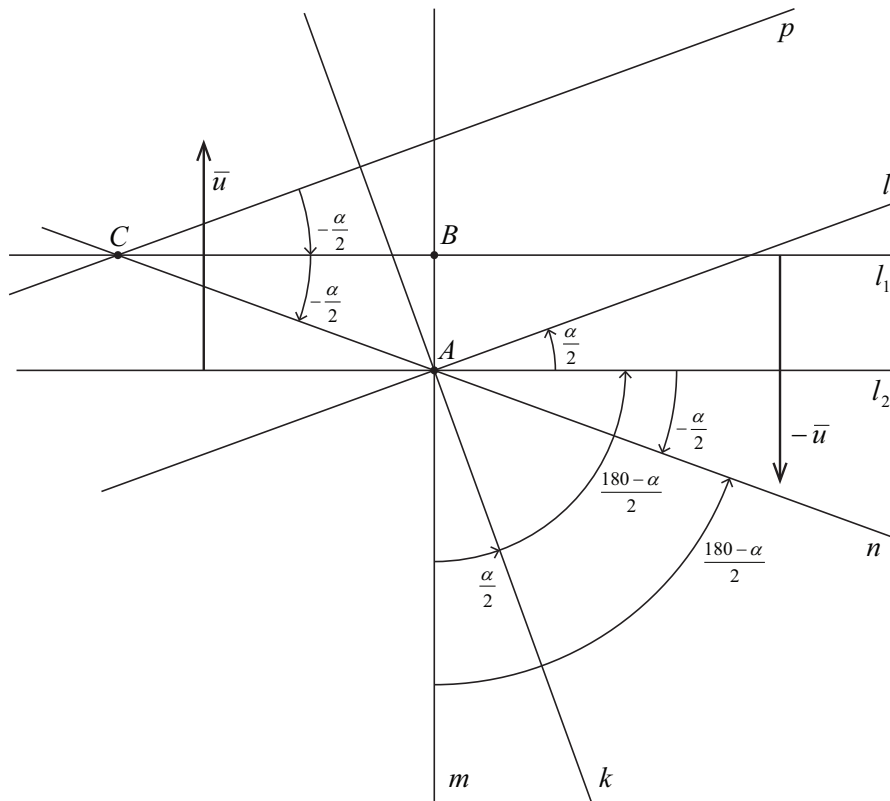
$$T_{\bar{u}}R_lT_{-\bar{u}} = T_{\bar{u}}O_A^\alpha R_1 = T_{\bar{u}}R_kR_mR_1 = T_{\bar{u}}R_kH_B = R_1R_2R_kH_B = R_1O_A^{180^\circ - \alpha}H_B.$$

Dwa obroty:  $H_B$  i  $O_A^{180^\circ - \alpha}$  opisujemy na wspólnym lustrze  $m$ . Zatem

$$T_{\bar{u}}R_lT_{-\bar{u}} = R_1O_A^{180^\circ - \alpha}H_B = R_1R_nR_mR_mR_1 = R_1R_nR_1$$

gdzie prosta  $n = R_2(l) = R_m(l)$ . Czyli  $T_{\bar{u}}R_lT_{-\bar{u}} = R_1R_nR_1 = R_1O_C^{-\alpha}$ . Zestaw luster obrotu  $O_C^{-\alpha}$  przekreślimy tak, żeby  $l_1$  było drugim lustrem obrotu. Wtedy pierwszym lustrem obrotu będzie prosta  $p = R_1(n) = R_1R_m(l) = H_B(l)$  stąd  $p \parallel l$  i  $T_{\bar{u}}R_lT_{-\bar{u}} = R_1O_C^{-\alpha} = R_1R_1R_p = R_p$ .



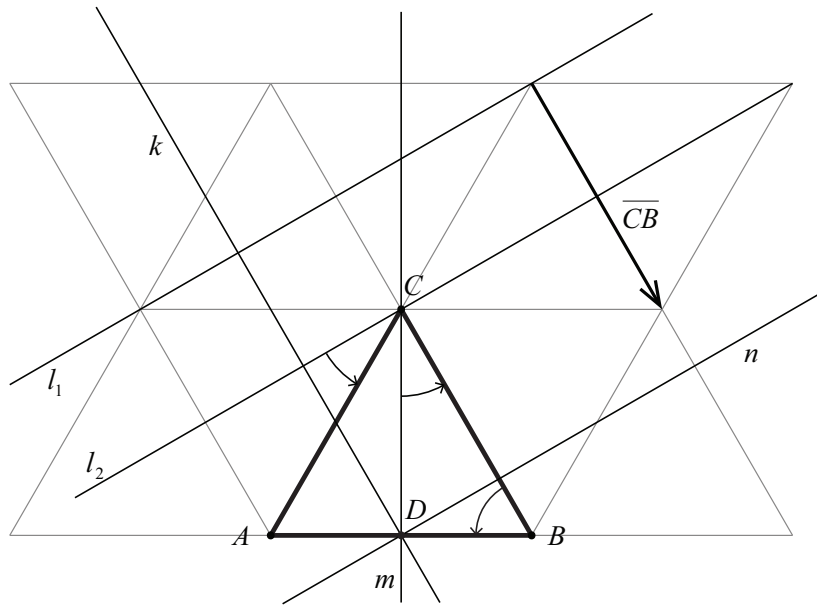


**Rys. 2.33.** Złożenie  $T_{\bar{u}}R_lT_{-\bar{u}}$  w przypadku, gdy wektor  $\bar{u}$  nie jest ani równoległy, ani prostopadły do prostej  $l$

Pokazaliśmy, że izometria  $T_{\bar{u}}R_lT_{-\bar{u}}$  jest w każdym przypadku odbiciem w lustrze równoległym do prostej  $l$ .

**P.18** Dany jest trójkąt równoboczny o wierzchołkach  $A, B, C$ . Wykorzystując siatkę trójkątów równobocznych wyznaczyć  $O_B^{120^\circ} R_{AC} T_{CB}$ .

Lustra translacji wybieramy tak, aby drugie lustro przechodziło przez wierzchołek  $C$ . Wtedy  $O_B^{120^\circ} R_{AC} T_{CB} = O_B^{120^\circ} R_{AC} R_2 R_1 = O_B^{120^\circ} O_C^{60^\circ} R_1$ . Do opisu obrotów zastosujemy wspólne lustro: prostą  $BC$ . Zatem  $O_B^{120^\circ} R_{AC} T_{CB} = O_B^{120^\circ} O_C^{60^\circ} R_1 = R_{AB} R_{BC} R_{BC} R_m R_1 = R_{AB} R_m R_1 = H_D R_1$ . Zestaw luster symetrii środkowej możemy przekreślić tak, żeby jedno z luster było równoległe do prostej  $l_1$ . Stąd  $O_B^{120^\circ} R_{AC} T_{CB} = H_D R_1 = R_k R_n R_1 = G_{2,5CB}^k$ .



Rys. 2.34. Konstrukcja złożenia  $O_B^{120^\circ} R_{AC} T_{CB}$

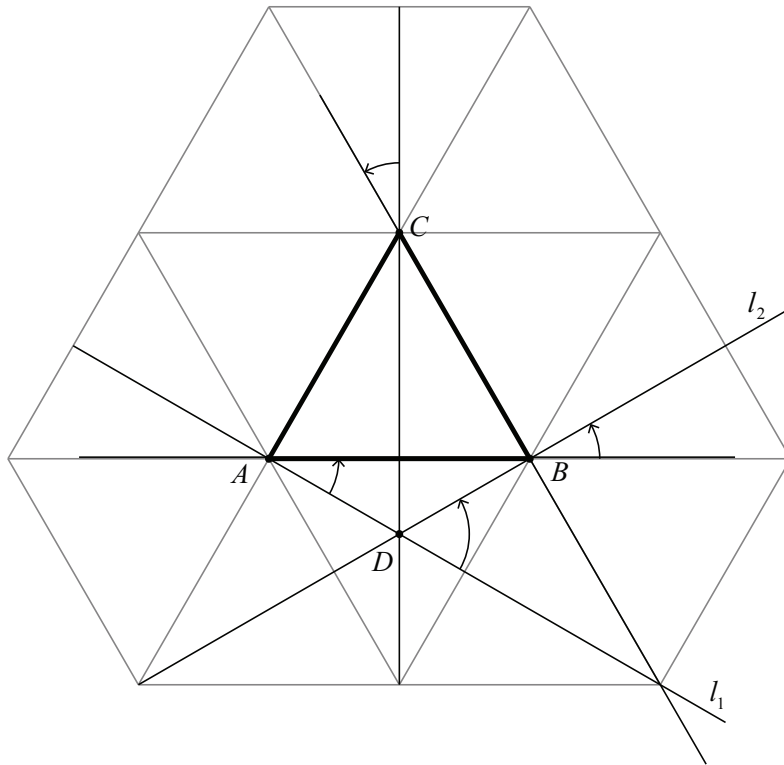
**P.19** Dany jest trójkąt równoboczny o wierzchołkach  $A, B, C$ . Wyznaczyć na siatce trójkątów równobocznych  $O_C^{60^\circ} O_B^{60^\circ} O_A^{60^\circ}$ .

Lustra obrotów przyjmujemy w taki sposób, żeby drugie lustro obrotu  $O_A^{60^\circ}$  było pierwszym lustrem obrotu  $O_B^{60^\circ}$ . Wtedy

$$O_C^{60^\circ} O_B^{60^\circ} O_A^{60^\circ} = O_C^{60^\circ} R_2 R_{AB} R_{AB} R_1 = O_C^{60^\circ} R_2 I R_1 = O_C^{60^\circ} R_2 R_1 = O_C^{60^\circ} O_D^{120^\circ}$$

Do opisu obrotów  $O_C^{60^\circ}, O_D^{120^\circ}$  wykorzystamy jako wspólne lustro prostą  $CD$ . Stąd

$$O_C^{60^\circ} O_B^{60^\circ} O_A^{60^\circ} = O_C^{60^\circ} O_D^{120^\circ} = R_{BC} R_{CD} R_{CD} R_2 = R_{BC} I R_2 = R_{BC} R_2 = H_B$$

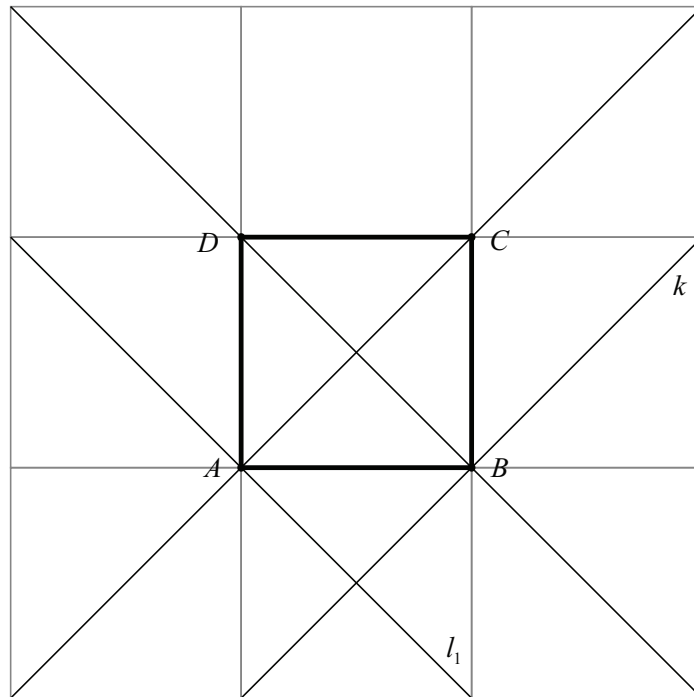


Rys. 2.35. Konstrukcja złożenia  $O_C^{60^\circ} O_B^{60^\circ} O_A^{60^\circ}$

**P.20** Dany jest kwadrat o wierzchołkach  $A, B, C, D$ . Wyznaczyć na siatce kwadratów  $H_B R_{AC} H_A$ .

Wykorzystamy prostą  $AC$  jako jedno z luster symetrii środkowej  $H_A$ . Wtedy  $H_B R_{AC} H_A = H_B R_{AC} R_{AC} R_1 = H_B I R_1 = H_B R_1$ . Zestaw luster symetrii środkowej  $H_B$  można przyjąć tak, żeby jedno z luster było równoległe do prostej  $l_1$ . Stąd

$$H_B R_{AC} H_A = H_B R_1 = R_k R_{BD} R_1 = R_k T_{\overline{AC}} = G_{\overline{AC}}^k.$$



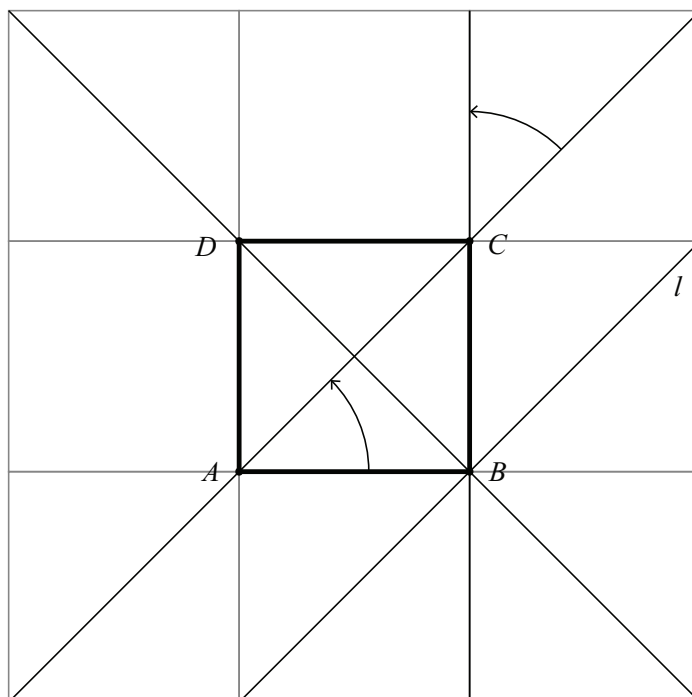
Rys. 2.36. Konstrukcja złożenia  $H_B R_{AC} H_A$

**P.21** Dany jest kwadrat o wierzchołkach  $A, B, C, D$ . Wyznaczyć  $R_{AC} O_C^{90^\circ} O_A^{90^\circ}$  wykorzystując siatkę kwadratów.

Obroty  $O_C^{90^\circ}, O_A^{90^\circ}$  opiszemy wykorzystując jako wspólne lustro prostą  $AC$ . Wtedy

$$\begin{aligned} R_{AC} O_C^{90^\circ} O_A^{90^\circ} &= R_{AC} R_{BC} R_{AC} R_{AC} R_{AB} \\ &= R_{AC} R_{BC} I R_{AB} = R_{AC} R_{BC} R_{AB} = R_{AC} H_B \end{aligned}$$

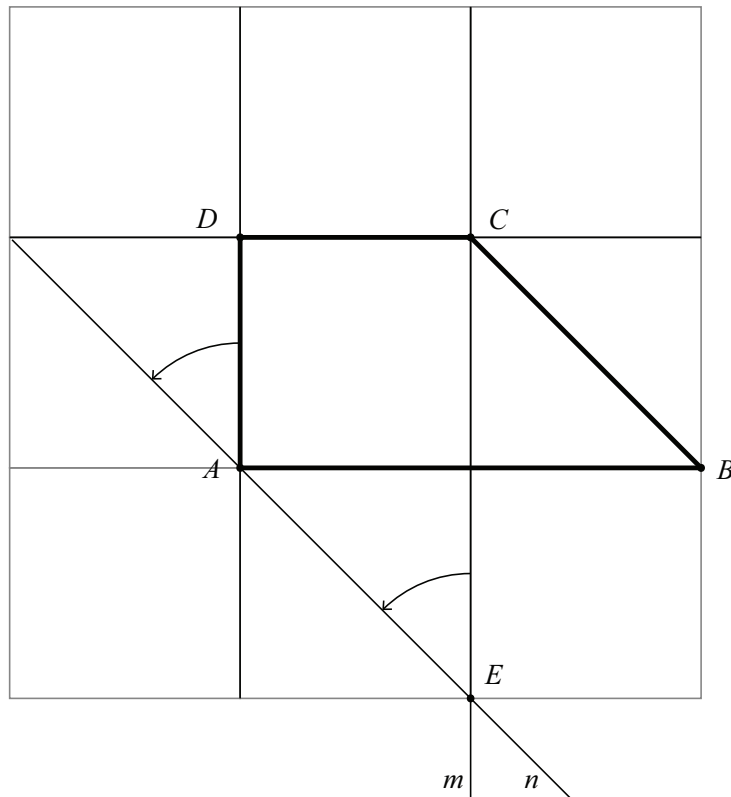
Zestaw luster symetrii środkowej  $H_B$  można przyjąć tak, żeby jedno z luster było równoległe do prostej  $AC$ . Stąd  $R_{AC} O_C^{90^\circ} O_A^{90^\circ} = R_{AC} H_B = R_{AC} R_l R_{BD} = G_{BD}^{BD}$



**Rys. 2.37.** Konstrukcja złożenia  $R_{AC}O_C^{90^\circ}O_A^{90^\circ}$

**P.22** Dany jest trapez prostokątny o wierzchołkach  $A, B, C, D$  i o kątach przy nich odpowiednio:  $\angle A = 90^\circ$ ,  $\angle B = 45^\circ$ ,  $\angle C = 135^\circ$ ,  $\angle D = 90^\circ$ . Wykorzystując siatkę kwadratów wyznaczyć  $O_A^{90^\circ}H_DH_C$ .

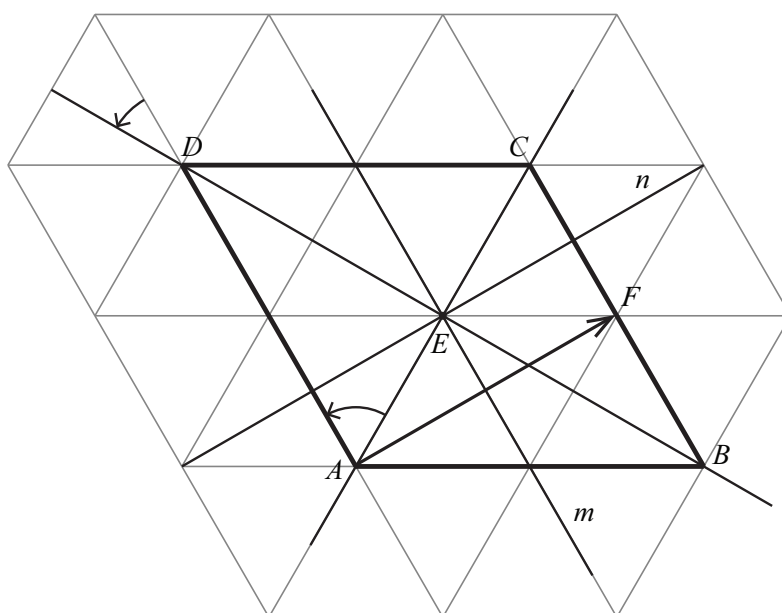
Symetrie środkowe  $H_D, H_C$  opiszemy korzystając ze wspólnego lustra jakim jest prosta  $CD$ . Wtedy  $O_A^{90^\circ}H_DH_C = O_A^{90^\circ}R_{AD}R_{CD}R_{CD}R_m = O_A^{90^\circ}R_{AD}R_m$ . Jako pierwsze lustro obrotu  $O_A^{90^\circ}$  przyjmijmy prostą  $AD$ . Zatem  $O_A^{90^\circ}H_DH_C = O_A^{90^\circ}R_{AD}R_m = R_nR_{AD}R_{AD}R_m = R_nR_m = O_E^{90^\circ}$ .



**Rys. 2.38.** Konstrukcja złożenia  $O_A^{90^\circ} H_D H_C$

**P.23** Dany jest romb o wierzchołkach  $A, B, C, D$  i o kącie  $\angle A = 120^\circ$  przy wierzchołku  $A$ . Wykorzystując siatkę trójkątów równobocznych wyznaczyc  $R_{BC} O_D^{60^\circ} O_A^{120^\circ}$ .

Do opisu obrotów  $O_D^{60^\circ}$ ,  $O_A^{120^\circ}$  użyjemy wspólnego lustra, jakim jest prosta  $AD$ . Wtedy  $R_{BC} O_D^{60^\circ} O_A^{120^\circ} = R_{BC} R_{BD} R_{AD} R_{AD} R_{AC} = R_{BC} R_{BD} R_{AC} = R_{BC} H_E$ . Lustra symetrii środkowej  $H_E$  wybieramy tak, aby jedno z nich było równoległe do  $BC$ . Stąd  $R_{BC} O_D^{60^\circ} O_A^{120^\circ} = R_{BC} H_E = R_{BC} R_m R_n = G_{AF}^n$  gdzie  $\overline{AF} = \overline{AB} + \frac{1}{2} \overline{BC}$ .



Rys. 2.39. Konstrukcja złożenia  $R_{BC}O_D^{60^\circ} O_A^{120^\circ}$

## Rozdział 3

# Grupa symetrii figury ograniczonej (skończonej) na płaszczyźnie

**Definicja.** Zbiór  $H \subset G$  jest podgrupą grupy  $(G, \circ)$  jeśli jest zamknięty na działania grupowe – czyli jeśli  $(H, \circ)$  jest grupą.

### Przykład

**P.24** Izometrie płaszczyzny tworzą grupę ze składaniem. Grupa ta ma wiele podgrup. Na przykład zbiór samych translacji tworzy podgrupę, zbiór samych obrotów z ustalonym środkiem  $P$  tworzy podgrupę.

**Definicja.** Niech  $A \subset G$ ,  $(G, \circ)$  grupa. Najmniejszą podgrupę grupy  $G$ , zawierającą zbiór  $A$  – nazywamy grupą generowaną przez  $A$  i oznaczamy przez  $\langle A \rangle$ .

Przykłady grup generowanych przez zbiór:  $\langle \emptyset \rangle = \{e\}$ ,  $\langle a \rangle = \{\dots, a^{-2}, a^{-1}, a^0 = e, a, a^2, a^3, \dots\}$  – grupa cykliczna generowana przez zbiór  $\{a\}$  (zamiast oznaczenia  $\langle \{a\} \rangle$  stosujemy oznaczenie  $\langle a \rangle$ ).



**Definicja.** Niech  $A \subset G$ ,  $(G, \circ)$  grupa. Zbiór  $A$  jest zbiorem generatorów grupy  $G$  jeśli  $\langle A \rangle = G$ .

**Twierdzenie 15.**

Jeśli  $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_k\}$  to  $\langle A \rangle = \{a_1^{x_1} \circ a_2^{x_2} \circ \dots \circ a_k^{x_k}, x_i \in Z\}$

Niech  $K$  będzie ograniczoną (skończoną) figurą na płaszczyźnie. Interesują nas tylko te izometrie płaszczyzny, które nie zmieniają figury  $K$  – przeprowadzają ją na siebie samą (a więc na przykład nie będą to translacje o wektor niezerowy). Załóżmy, że zbiór tych izometrii oznaczymy przez  $\Omega(K)$ . Oczywiście  $\forall F \in \Omega(K)$  zachodzi  $F(K) = K$ .

**Twierdzenie 16.**

Zbiór  $\Omega(K)$  wszystkich symetrii danej figury  $K$  ze składaniem przekształceń jako działaniem tworzy grupę. (Nazywamy ją grupą symetrii figury  $K$ ).

**Dowód.**

Zbiór  $\Omega(K)$  ze składaniem przekształceń jako działaniem jest strukturą algebraiczną ponieważ zachodzi implikacja  $F_1, F_2 \in \Omega(K) \Rightarrow F_2 F_1 \in \Omega(K)$  ( $F_1(K) = K, F_2(K) = K \Rightarrow F_2 F_1(K) = F_2(K) = K$ ).

Składanie przekształceń jest oczywiście łączne.

Istnieje element neutralny będący przekształceniem tożsamościowym  $I$ .

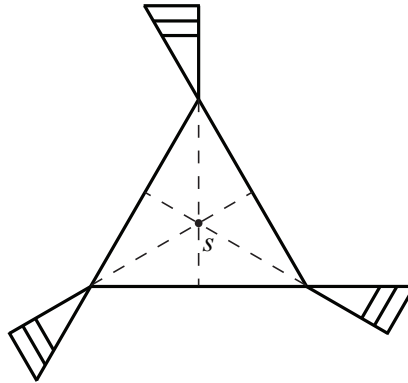
Ponadto dla każdego elementu  $F$  istnieje odwrotny z  $\Omega(K)$  ( $F^{-1}(K) = F^{-1}(F(K)) = I(K) = K$ ), co kończy dowód twierdzenia.

Grupę symetrii posiada każda figura  $K$  (nawet całkowicie nieregularna – wtedy  $\Omega(K) = \{I\}$ ).

Wprowadzając pojęcie rzędu grupy  $rzG$  (rzęd grupy  $rzG$  jest równy ilości elementów zbioru  $G$ ) – otrzymujemy miarę „symetryczności” figury (figurę bardzo symetryczną można nakładać na siebie na wiele sposobów). Jeśli  $G$  jest zbiorem nieskończonym to  $rzG = \infty$ .

### Przykłady

**P.25** Trójkąt równoboczny  $\Delta$  posiada sześć symetrii: trzy odbicia względem trzech osi symetrii oraz trzy obroty o środku w przecięciu osi symetrii, o kąty  $120^\circ$ ,  $240^\circ$ ,  $360^\circ$ . Natomiast trójkąt równoboczny  $\Delta'$  z dorysowanymi elementami w wierzchołkach (Rys.3.1) posiada tylko trzy symetrie:  $\Omega(\Delta') = \{I, O_S^{120}, O_S^{240}\}$ .



**Rys. 3.1.** Zbiór symetrii figury  $\Delta'$ :  $\Omega(\Delta') = \{I, O_S^{120}, O_S^{240}\}$

**P.26** Rząd grupy symetrii koła jest nieskończony ponieważ grupa ta posiada nieskończenie wiele osi symetrii – w tym także nieskończenie wiele obrotów.

Symetrię figury skończonej tworzą tylko odbicia i obroty (w tym tożsamość jako obrót o kąt  $360^\circ$ ). Na płaszczyźnie wyróżniamy dwie grupy symetrii figury skończonej (ograniczonej):

1. grupa cykliczna obrotów  $C_n = \langle O_A^{\frac{360}{n}} \rangle$

$$C_1 = \{I\}, C_2 = \{I, O_A^{180} = H_A\}, C_3 = \{I, O_A^{120}, O_A^{240}\},$$

$$C_4 = \{I, O_A^{90}, O_A^{180}, O_A^{270}\},$$

$\vdots$

$$C_n = \left\{ I, O_A^{\frac{360}{n}}, O_A^{2\frac{360}{n}}, O_A^{3\frac{360}{n}}, \dots, O_A^{(n-1)\frac{360}{n}} \right\};$$

2. grupa diedralna wszystkich symetrii  $n$ -kątów foremnych  $D_n = \left\langle O_A^{\frac{360}{n}}, R_1 \right\rangle$

$$\begin{aligned} D_1 &= \{I, R\}, \\ D_2 &= \{I, O_A^{180} = H_A, R_1, R_2\}, \\ D_3 &= \{I, O_A^{120}, O_A^{240}, R_1, R_2, R_3\}, \\ D_4 &= \{I, O_A^{90}, O_A^{180}, O_A^{270}, R_1, R_2, R_3, R_4\}, \\ &\vdots \\ D_n &= \left\{ I, O_A^{\frac{360}{n}}, O_A^{2\frac{360}{n}}, O_A^{3\frac{360}{n}}, \dots, O_A^{(n-1)\frac{360}{n}}, R_1, R_2, \dots, R_n \right\}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że każde odbicie można otrzymać ze złożenia odbicia  $R_1$  oraz obrotu:  $O_A^{k\frac{360}{n}} R_1 = R_{k+1}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n-1$ .

### Przykłady

**P.27** Rozety płaskie są to płaskie ornamenty, których jedynymi symetriami są obroty o ustalonym środku lub odbicia (odzwierciedlenia) względem osi przechodzących przez ten środek. Uzupełniając daną figurę tak, aby posiadała odpowiednią grupę symetrii  $C_n$  lub  $D_n$  zawsze otrzymamy rozetę:

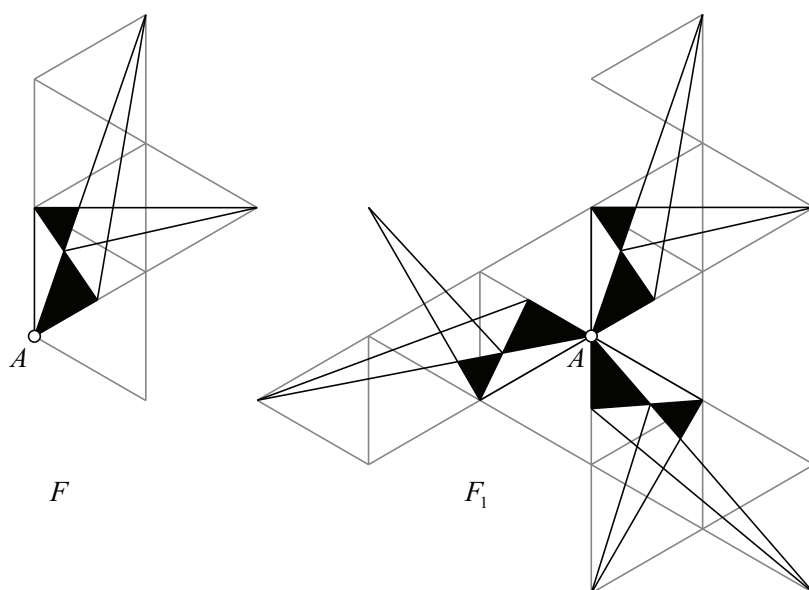
- zwrotną (o grupie symetrii  $C_n$ )

lub

- osiową (o grupie symetrii  $D_n$ ).

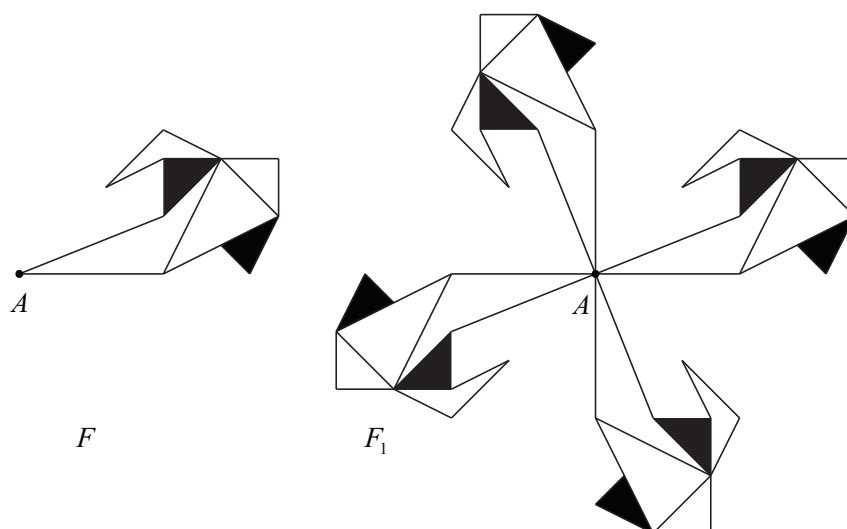
Uzupełnić dowolnie figurę  $F$  tak – aby nowa figura  $F_1$  była rozetą o następującej grupie symetrii:

- (a)  $C_3$  o środku  $A$  (rysunek wykonać na siatce trójkątów równobocznych)



Rys. 3.2. Figura  $F_1$  o grupie symetrii  $C_3$  o środku  $A$

(b)  $C_4$  o środku  $A$

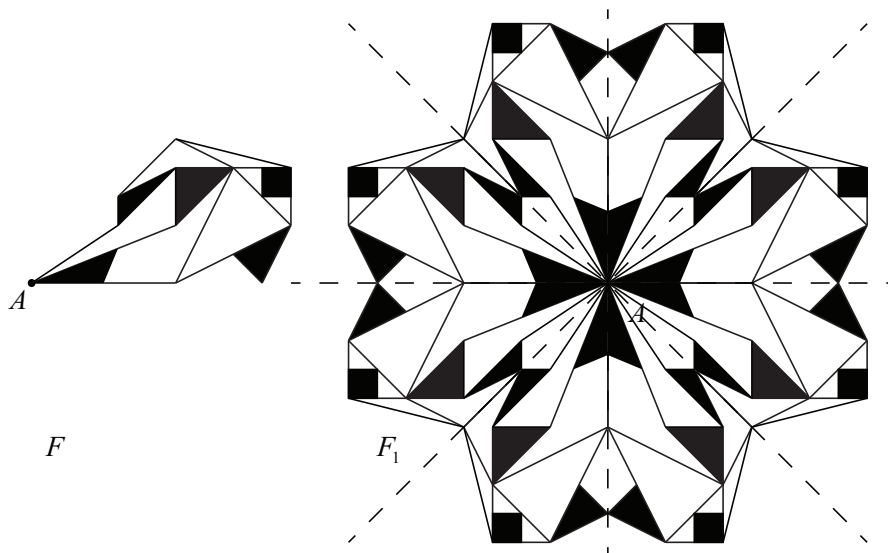


Rys. 3.3. Figura  $F_1$  o grupie symetrii  $C_4$  o środku  $A$

(c)  $D_4$  o środku  $A$

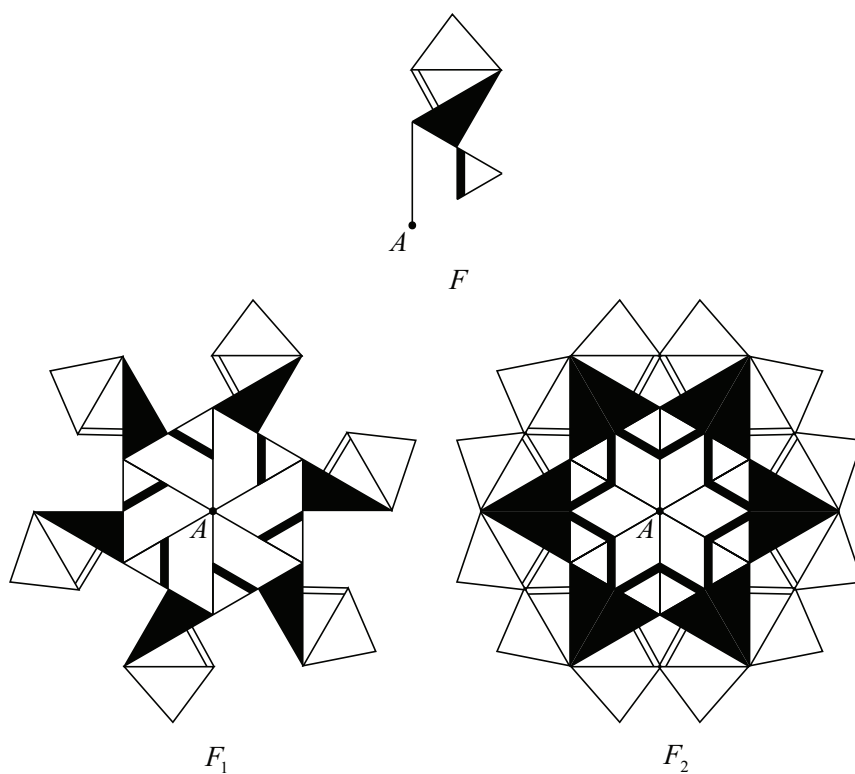
Początkowo uzupełniamy figurę  $F$  do figury o grupie symetrii  $C_4$  o środku  $A$ . Potem otrzymaną figurę odbijamy w przyjętych przez nas osiach

symetrii. Otrzymujemy figurę  $F_1$ .



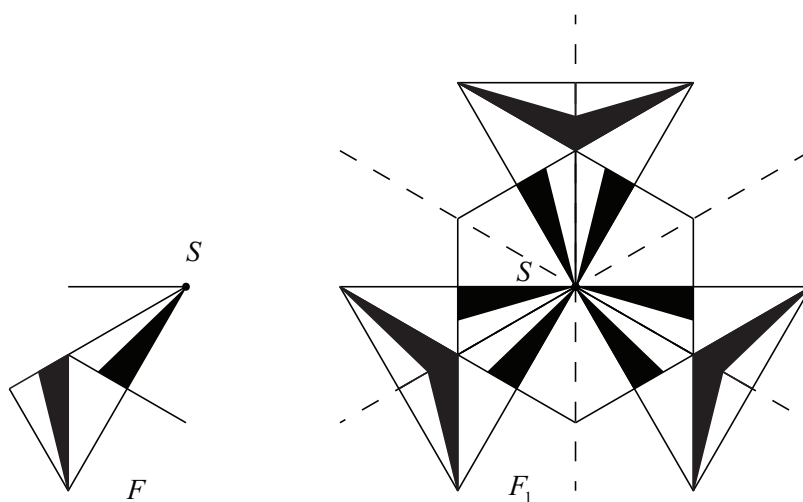
**Rys. 3.4.** Figura  $F_1$  o grupie symetrii  $D_4$  o środku  $A$

(d)  $C_6$  o środku  $A$  i  $D_6$  o środku  $A$



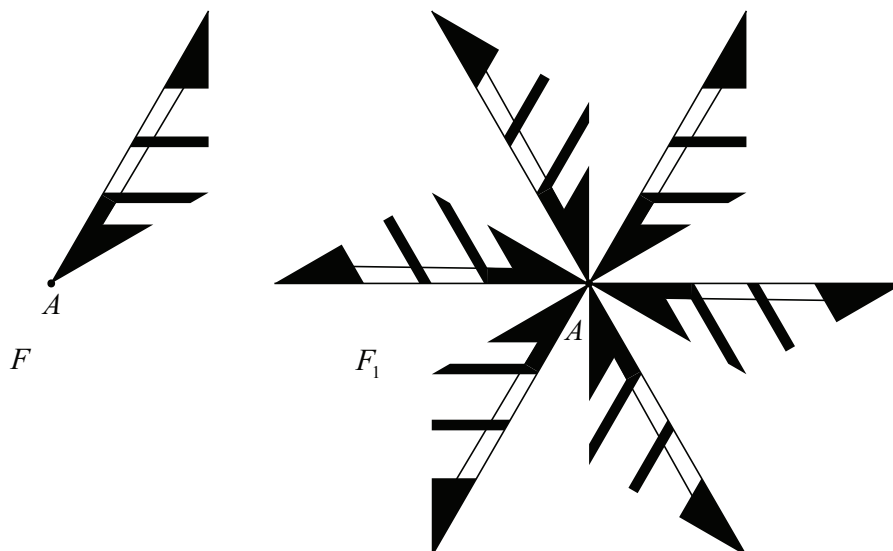
**Rys. 3.5.** Figura  $F_1$  o grupie symetrii  $C_6$  o środku  $A$  i figura  $F_2$  o grupie symetrii  $D_6$  o środku  $A$

(e)  $D_3$  o środku  $S$



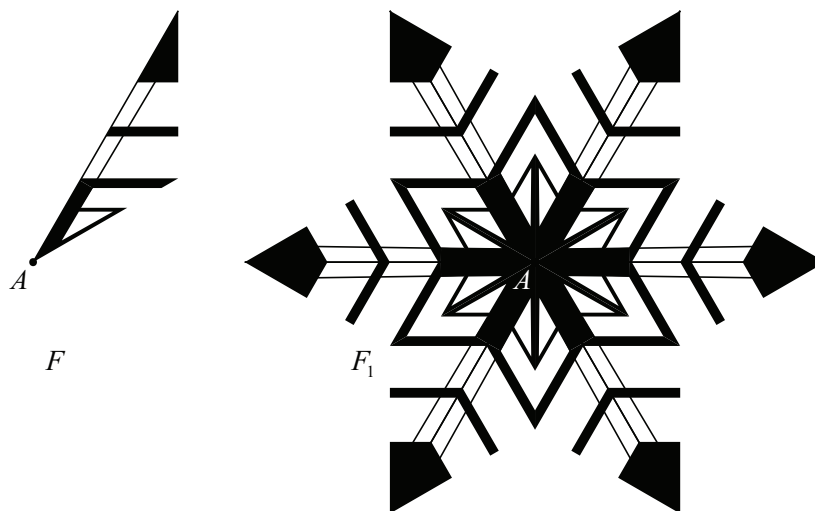
**Rys. 3.6.** Figura  $F_1$  o grupie symetrii  $D_3$  o środku  $S$

(f)  $C_6$  o środku  $A$



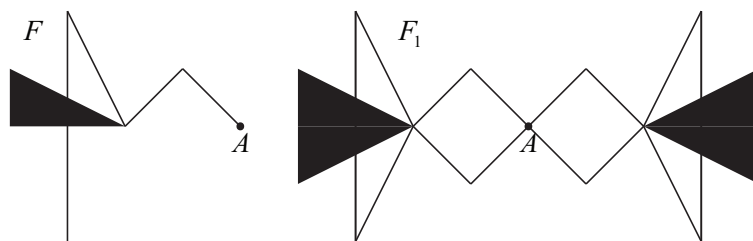
**Rys. 3.7.** Figura  $F_1$  o grupie symetrii  $C_6$  o środku  $A$

(g)  $D_6$  o środku  $A$



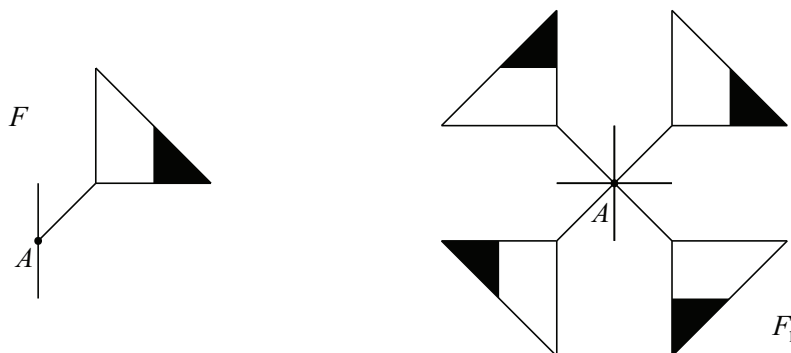
**Rys. 3.8.** Figura  $F_1$  o grupie symetrii  $D_6$  o środku  $A$

(h)  $D_2$  o środku  $A$



**Rys. 3.9.** Figura  $F_1$  o grupie symetrii  $D_2$  o środku  $A$

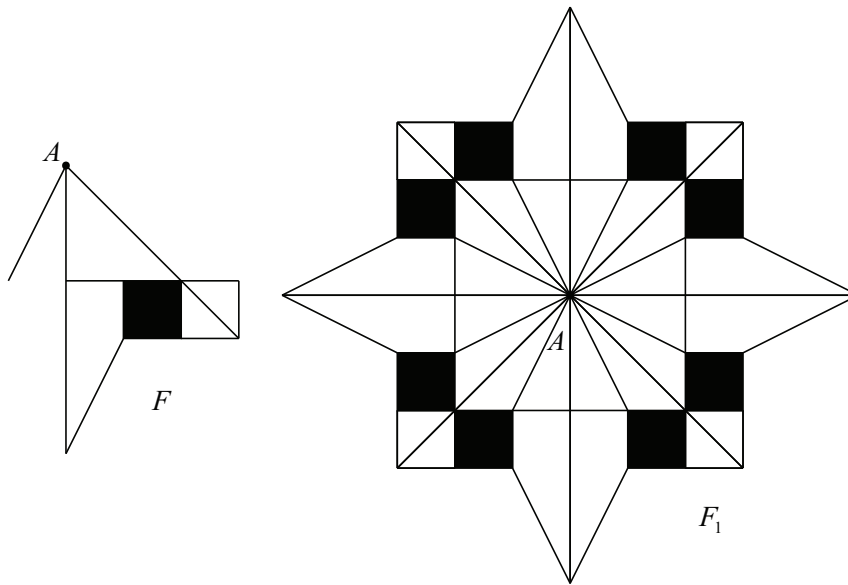
(i)  $C_4$  o środku  $A$



**Rys. 3.10.** Figura  $F_1$  o grupie symetrii  $C_4$  o środku  $A$

(j)  $D_4$  o środku  $A$

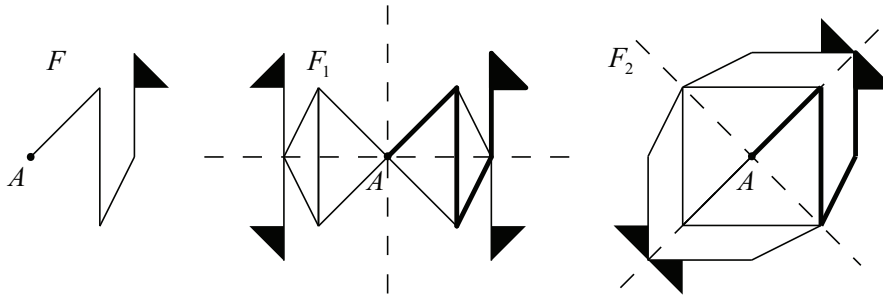




Rys. 3.11. Figura  $F_1$  o grupie symetrii  $D_4$  o środku  $A$

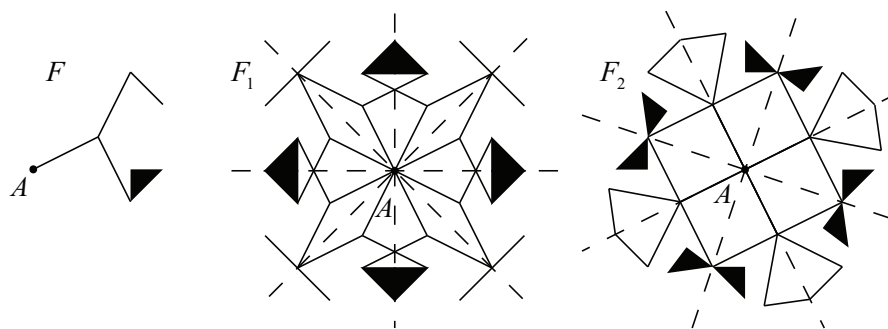
Rozważane powyżej uzupełnianie nie jest wcale jednoznaczne – można wykonać je na różne sposoby (Rys.3.12 i Rys.3.13):

(k)  $D_2$  o środku  $A$



Rys. 3.12. Figury  $F_1$  i  $F_2$  mają grupę symetrii  $D_2$  o środku  $A$

(l)  $D_4$  o środku  $A$



**Rys. 3.13.** Figury  $F_1$  i  $F_2$  mają grupę symetrii  $D_4$  o środku  $A$

## Rozdział 4

# Deseń w nieskończonym pasie

Szukamy izometrii, które przekształcają motyw umieszczony w pasie – w pewien powtarzający się wzór (deseń) i pozostawiają nieskończony pas w takim samym położeniu. Izometrie takie mogą być tylko złożeniem odbić w lustrze poziomym, będącym osią symetrii pasa i w lustrach pionowych, prostopadłych do osi symetrii.

Ponieważ złożenie parzystej ilości odbić w lustrach równoległych daje translację (dwa lustra równoległe) a złożenie nieparzystej ilości odbić w lustrach równoległych daje odbicie (jedno lustro) więc jedynymi izometriami pozostawiającymi pas w takim samym położeniu będą złożenia odbić:

- w lustrze poziomym ( $R$ ) (oś symetrii pasa)
- w dwóch lustrach pionowych ( $R_i, i = 1, 2$ )

Szukamy grup przekształceń generowanych przez te odbicia. Deseń nie powstanie przecież przy jednym tylko odbiciu motywu. Obszarem fundamentalnym nazywamy najmniejszy fragment wzoru, zawierający motyw, którego translacja pozwoli otrzymać cały deseń. Oczywiście obszary fundamentalne często nie są wyznaczone jednoznacznie.

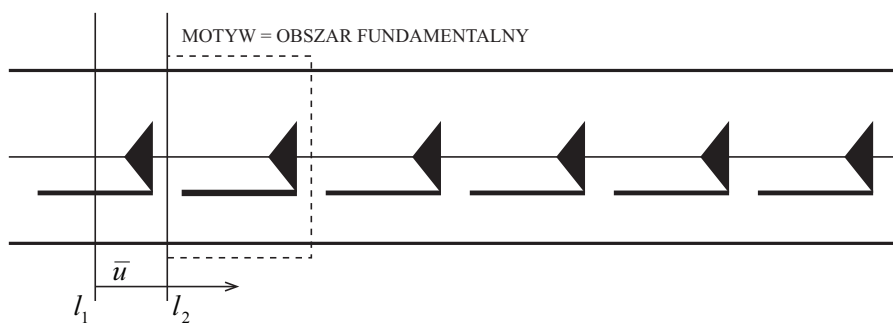
Przez  $\bar{u}$  będziemy oznaczać wektor prostopadły do luster pionowych  $l_1, l_2$  o długości dwa razy większej, niż odległość między lustrami.

Istnieje siedem grup symetrii nieskończonego pasa ([1])

**Grupy symetrii nieskończonego pasa generowane przez jedną izometrię:**

Niech  $\Gamma_1$  będzie grupą generowaną przez translację

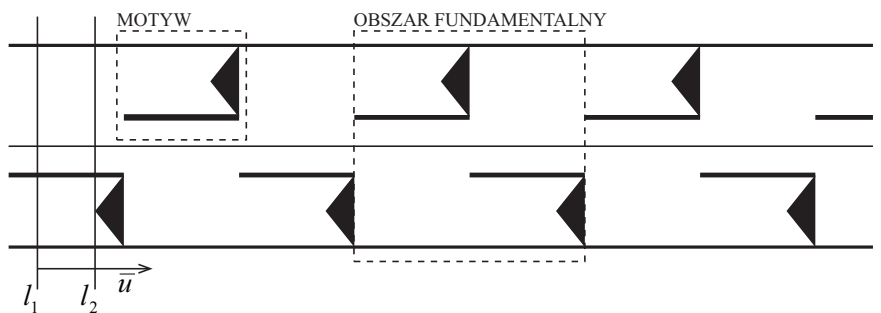
$$\Gamma_1 = \langle R_2 R_1 \rangle = \left\langle T_{\bar{u}}, \frac{|\bar{u}|}{2} = d(l_1, l_2) \right\rangle = \{T_{k\bar{u}}, k \in \mathbb{Z}\}$$



**Rys. 4.1.** Nieskończony pas o grupie symetrii  $\Gamma_1$

Niech  $\Gamma_2$  będzie grupą generowaną przez odbicie z poślizgiem

$$\Gamma_2 = \langle R R_2 R_1 \rangle = \left\{ G_{(2k+1)\bar{u}}^l, T_{2k\bar{u}}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

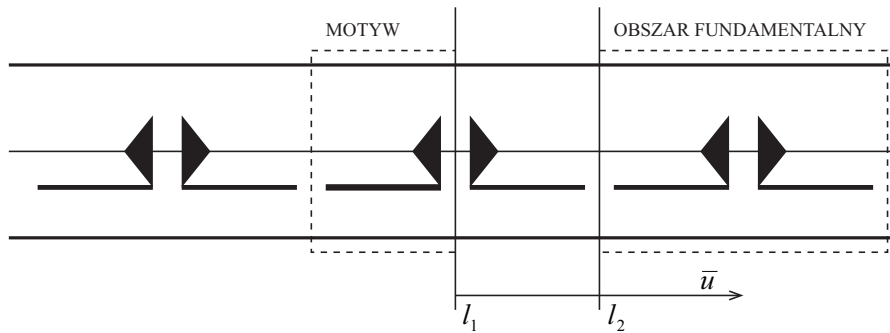


**Rys. 4.2.** Nieskończony pas o grupie symetrii  $\Gamma_2$ . Na rysunku zaznaczono przykładowy obszar fundamentalny

**Grupy symetrii nieskończonego pasa generowane przez dwie izometrie:**

Grupa  $\Gamma_3$  jest generowana przez dwa odbicia w lustrach pionowych

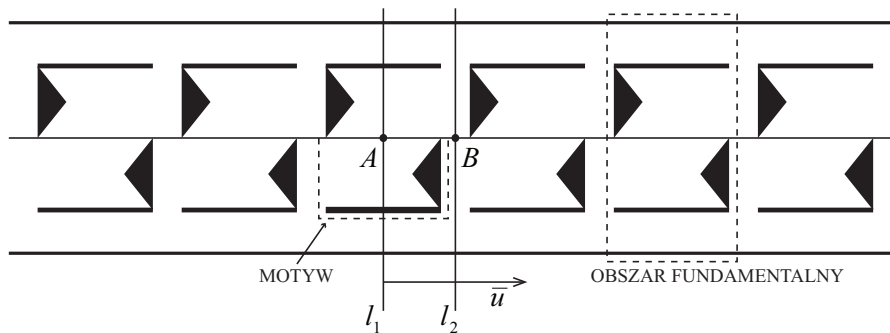
$$\Gamma_3 = \langle R_1, R_2 \rangle = \{R_1, R_2, T_{k\bar{u}}k \in Z\}$$



**Rys. 4.3.** Nieskończony pas o grupie symetrii  $\Gamma_3$ . Na rysunku zaznaczono przykładowy obszar fundamentalny

Grupa  $\Gamma_4$  jest generowana przez dwa półobroty – inaczej dwie symetrie środkowe o środkach  $A, B$

$$\Gamma_4 = \langle RR_1, RR_2 \rangle = \{RR_1 = H_A, RR_2 = H_B, T_{k\bar{u}}k \in Z\}$$

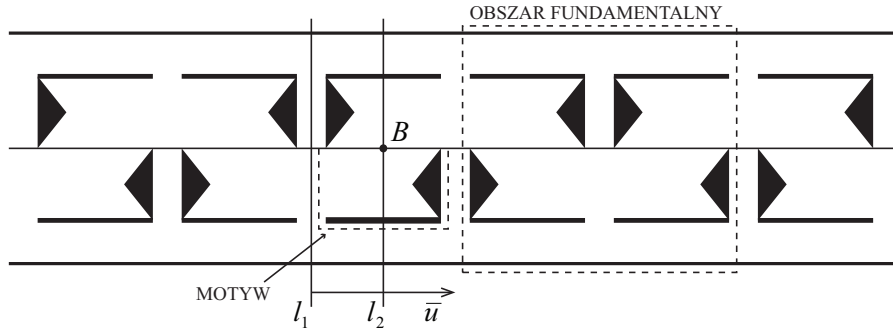


**Rys. 4.4.** Nieskończony pas o grupie symetrii  $\Gamma_4$

Grupa  $\Gamma_5$  jest generowana przez jedno odbicie w lustrze pionowym i jeden półobrót czyli symetrię środkową:

$$\Gamma_5 = \langle R_1, RR_2 \rangle = \{R_1, H_B, G_{(2k+1)\bar{u}}^l, T_{2k\bar{u}}, k \in Z\}$$

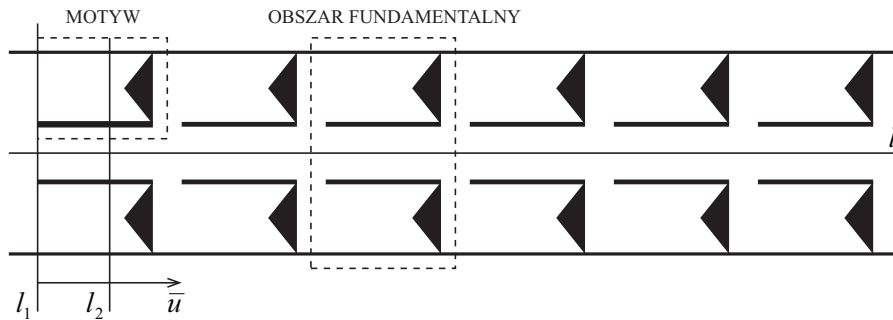
$$(\text{lub } \langle RR_1, R_2 \rangle = \{R_2, H_A, G_{\bar{u}}^l, T_{2k\bar{u}}, k \in Z\})$$



**Rys. 4.5.** Nieskończony pas o grupie symetrii  $\Gamma_5 = \langle R_1, RR_2 \rangle$ . Na rysunku zaznaczono przykładowy obszar fundamentalny

Grupa  $\Gamma_6$  jest generowana przez jedną translację i jedno odbicie w lustrze poziomym

$$\Gamma_6 = \langle R, R_2R_1 \rangle = \{R, T_{k\bar{u}}, G_{k\bar{u}}^l, k \in Z\}$$

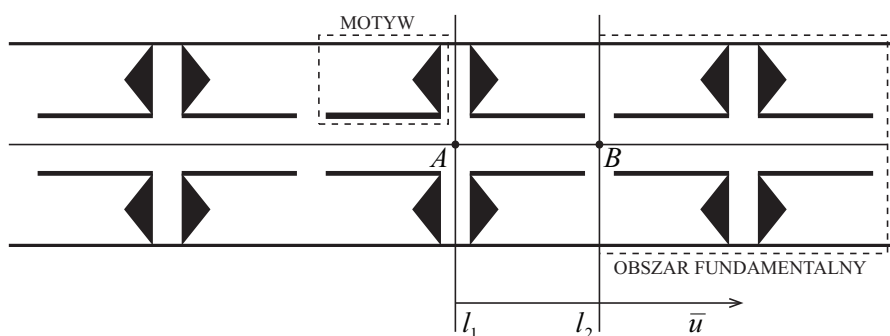


**Rys. 4.6.** Nieskończony pas o grupie symetrii  $\Gamma_6$

**Grupy symetrii nieskończonego pasa generowane przez trzy izometrie:**

Grupa  $\Gamma_7$  jest generowana przez jedno odbicie w lustrze poziomym i dwa odbicia w lustrach pionowych

$$\Gamma_7 = \langle R, R_2, R_1 \rangle = \{R, R_2, R_1, RR_1 = H_A, RR_2 = H_B, G_{2k\bar{u}}^l, T_{2k\bar{u}}, k \in Z\}$$



**Rys. 4.7.** nieskończony pas o grupie symetrii  $\Gamma_7$ . Na rysunku zaznaczono przykładowy obszar fundamentalny

### Międzynarodowe oznaczenia dla symetrii pasa

Każdą grupę symetrii nieskończonego pasa w oznaczeniach międzynarodowych opisują dwa znaki  $XY$ .

Znak  $X$  jest:

- literą  $m$  jeśli w zbiorze generatorów grupy istnieje odbicie w lustrze pionowym,
- cyfrą 1 jeśli w zbiorze generatorów grupy brak odbicia w lustrze pionowym

Znak  $Y$  jest:

- literą  $m$  jeśli w zbiorze generatorów grupy istnieje odbicie w lustrze poziomym,
- literą  $g$  jeśli w zbiorze generatorów grupy istnieje odbicie z poślizgiem,
- cyfrą 2 jeśli w zbiorze generatorów grupy istnieje symetria środkowa ale brak jest odbicia z poślizgiem,
- cyfrą 1 jeśli nie zachodzą powyższe przypadki.

Stąd używane przez nas oznaczenia mają odpowiedniki międzynarodowe:

$$\Gamma_1 = \langle R_2 R_1 \rangle = 11$$

$$\Gamma_2 = \langle R R_2 R_1 \rangle = 1g$$

$$\Gamma_3 = \langle R_1, R_2 \rangle = m1$$

$$\Gamma_4 = \langle R R_1, R R_2 \rangle = 12$$

$$\Gamma_5 = \langle R R_1, R_2 \rangle = mg$$

$$\Gamma_6 = \langle R, R_2 R_1 \rangle = 1m$$

$$\Gamma_7 = \langle R, R_2, R_1 \rangle = mm$$

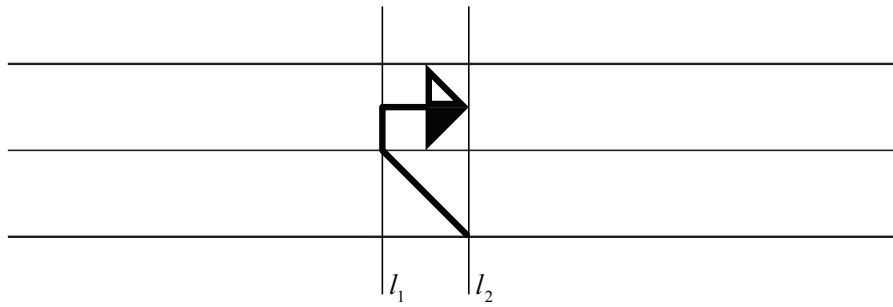
Warto jeszcze przypomnieć polskie nazwy w klasyfikacji nieskończonych pasów wprowadzone w pracy [2]:

- pas rytmiczny (o grupie symetrii  $\Gamma_1$ )
- pas przemienny (o grupie symetrii  $\Gamma_2$ )
- pas południkowy (o grupie symetrii  $\Gamma_3$ )
- pas obrotowy (o grupie symetrii  $\Gamma_4$ )
- pas falowy (o grupie symetrii  $\Gamma_5$ )
- pas równikowy (o grupie symetrii  $\Gamma_6$ )
- pas krzyżowy (o grupie symetrii  $\Gamma_7$ )

### Przykłady

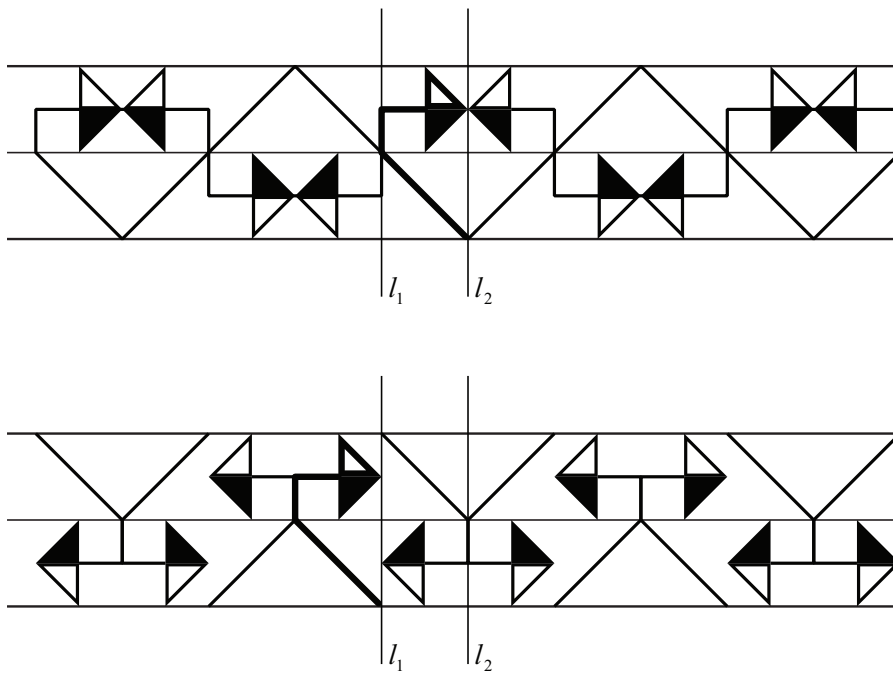
**P.28** Deseń w pasie nie jest jednoznacznie określony przez podanie motywu i oczekiwanej grupy symetrii. Zależy on bowiem od położenia motywu względem ustalonych luster. Niech  $F$  z rysunku (Rys.4.8) będzie motywem:

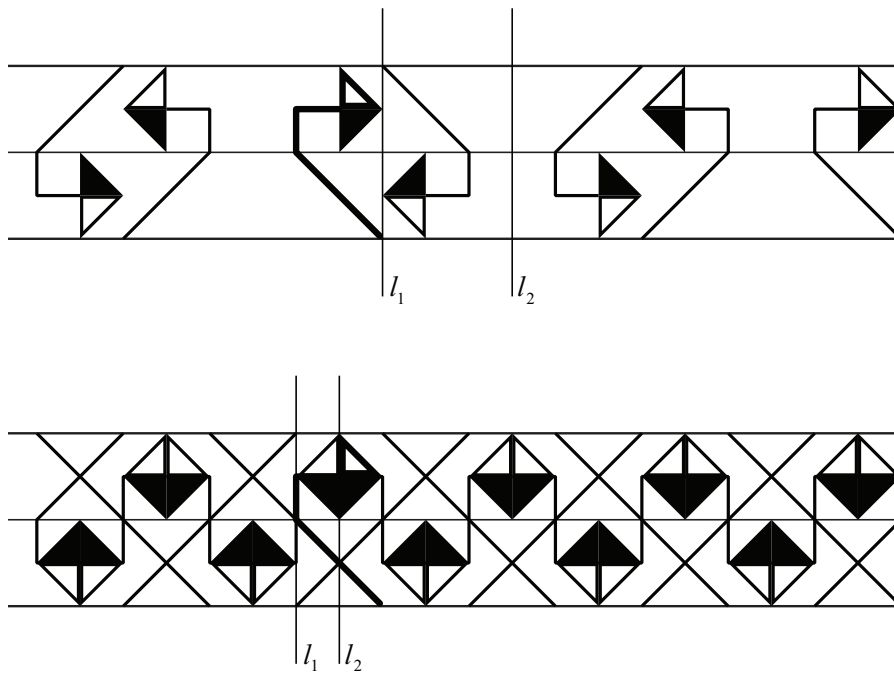




Rys. 4.8. Motyw tworzący deseń

Oto przykładowe desenie w nieskończonych pasach – wszystkie o grupie symetrii  $\Gamma_5 = \langle RR_1, R_2 \rangle$ , zależne od położenia motywu względem pionowych luster (Rys.4.9)

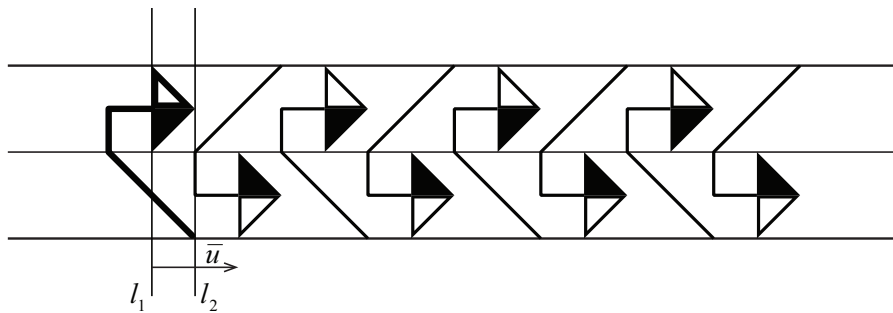




**Rys. 4.9.** Ten sam motyw daje różne desenie w zależności od swojego położenia względem luster – jednak wszystkie pasy mają grupę symetrii  $\Gamma_5$

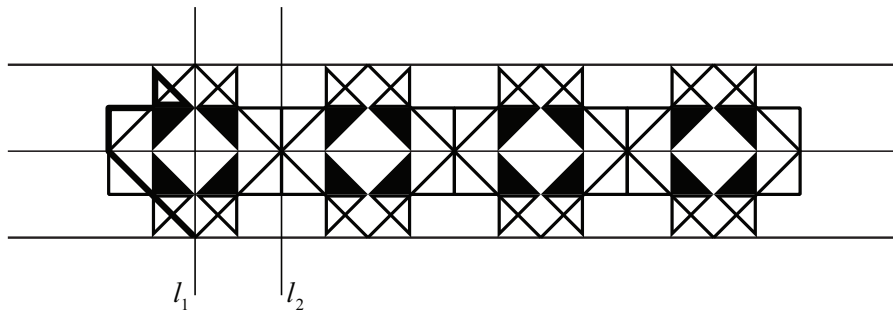
**P.29** Uzupełnić pas o zadanych lustrach deseniem o określonej grupie symetrii dla motywu z rysunku Rys.4.8 położonego odpowiednio względem luster.

(a) grupa symetrii  $\Gamma_2 = \langle RR_2R_1 \rangle$



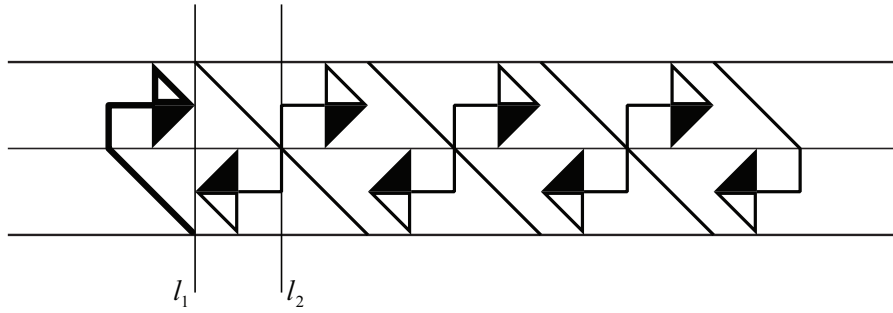
**Rys. 4.10.** Pas o grupie symetrii  $\Gamma_2$

(b) grupa symetrii  $\Gamma_7 = \langle R, R_1, R_2 \rangle$



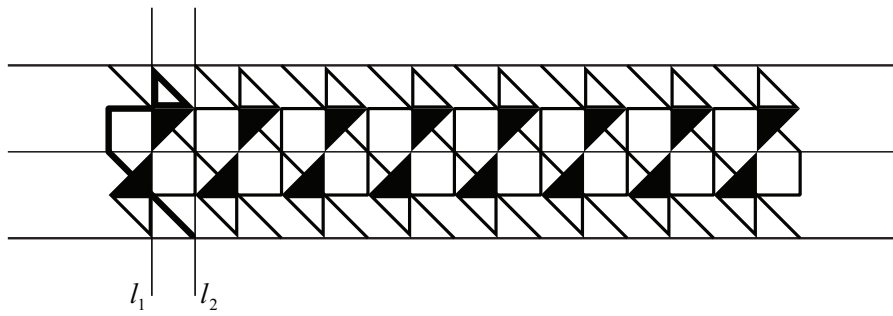
Rys. 4.11. Pas o grupie symetrii  $\Gamma_7$

(c) grupa symetrii  $\Gamma_4 = \langle RR_1, RR_2 \rangle$



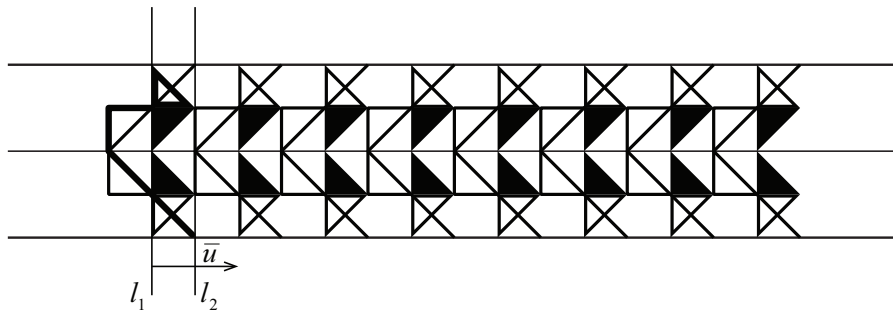
Rys. 4.12. Pas o grupie symetrii  $\Gamma_4$

(d) grupa symetrii  $\Gamma_4 = \langle RR_1, RR_2 \rangle$

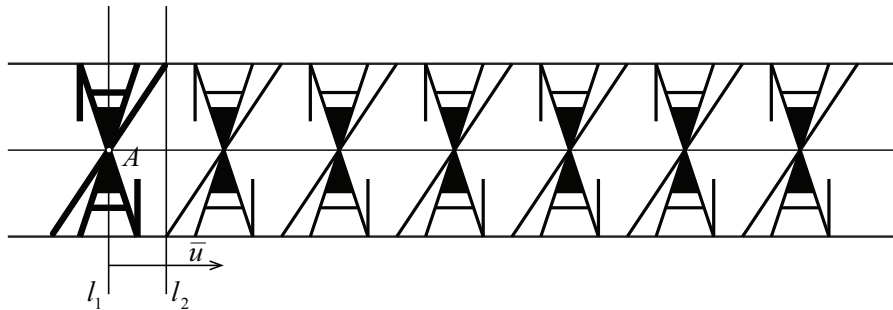


Rys. 4.13. Pas o grupie symetrii  $\Gamma_4$

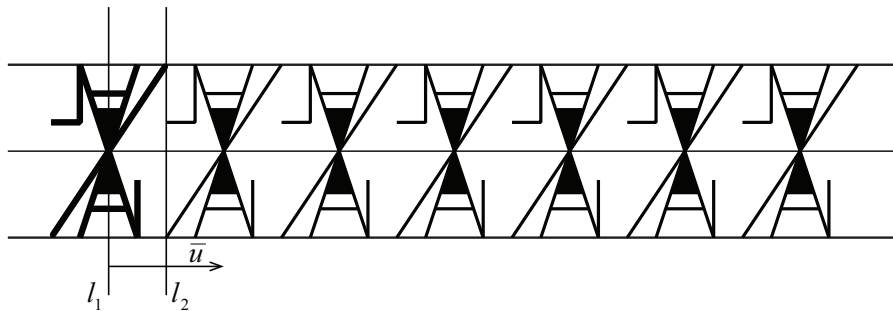
(e) grupa symetrii  $\Gamma_6 = \langle R, R_2R_1 \rangle$

Rys. 4.14. Pas o grupie symetrii  $\Gamma_6$ 

**P.30** Nie każdy motyw nadaje się do narysowania nieskończonego ornamentu danej grupy symetrii. Na przykład motyw dany na rysunku (Rys.4.15) przekształcony tylko przez złożenie translacji o wektor  $\bar{u}$  nie utworzy nieskończonego pasa o grupie symetrii  $\Gamma_1$ . Powstanie natomiast pas o grupie symetrii  $\Gamma_4$ . Spowodowane to jest symetrią środkową samego motywu – powoduje ona, że deseń nie ulega zmianie pod wpływem przekształceń  $H_A = R_l R_1$  i  $R_2$ , generujących grupę  $\Gamma_4$  pasa.

Rys. 4.15. Pas o grupie symetrii  $\Gamma_4$ , chociaż deseń powstał w wyniku przesunięcia motywu

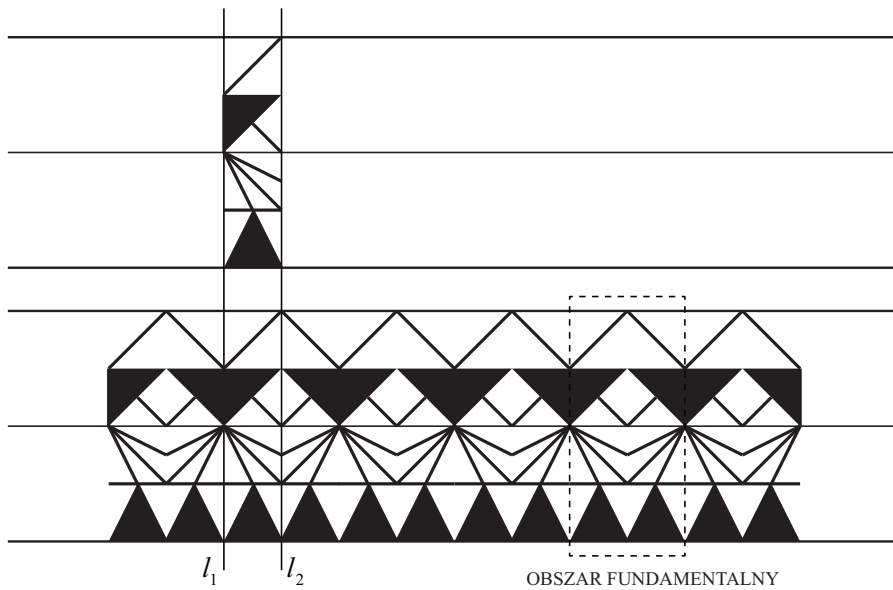
Jednak nieznacznie modyfikując zadany motyw i stosując tylko przesunięcie o wektor  $\bar{u}$  można łatwo otrzymać nieskończony pas o grupie symetrii  $\Gamma_1$  (Rys.4.16).



**Rys. 4.16.** Pas o grupie symetrii  $\Gamma_1$  – deseń powstał w wyniku tylko translacji motywu

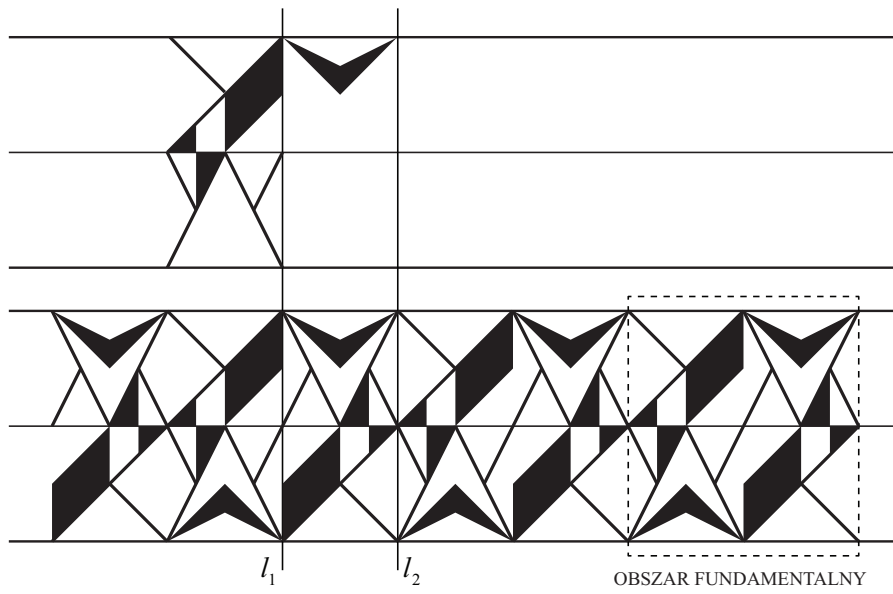
**P.31** Wykorzystując podany motyw oraz układ luster narysować desenie w nieskończonych pasach o następujących grupach symetrii. Zaznaczyć przykładowe obszary fundamentalne.

(a) grupa symetrii  $\Gamma_3 = \langle R_1, R_2 \rangle$



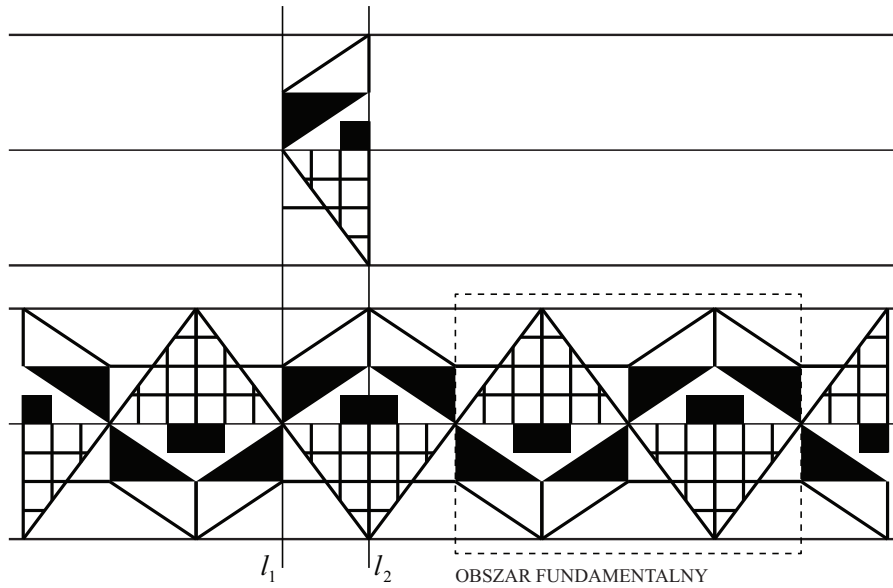
**Rys. 4.17.** Pas o grupie symetrii  $\Gamma_3$  z przykładowo zaznaczonym obszarem fundamentalnym

(b) grupa symetrii  $\Gamma_4 = \langle RR_1, RR_2 \rangle$



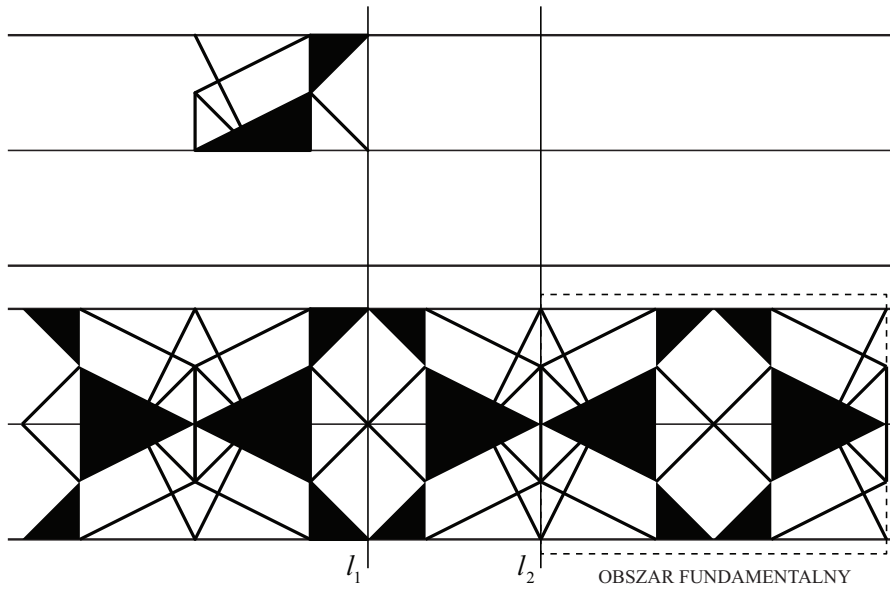
Rys. 4.18. Pas o grupie symetrii  $\Gamma_4$

(c) grupa symetrii  $\Gamma_5 = \langle RR_1, R_2 \rangle$



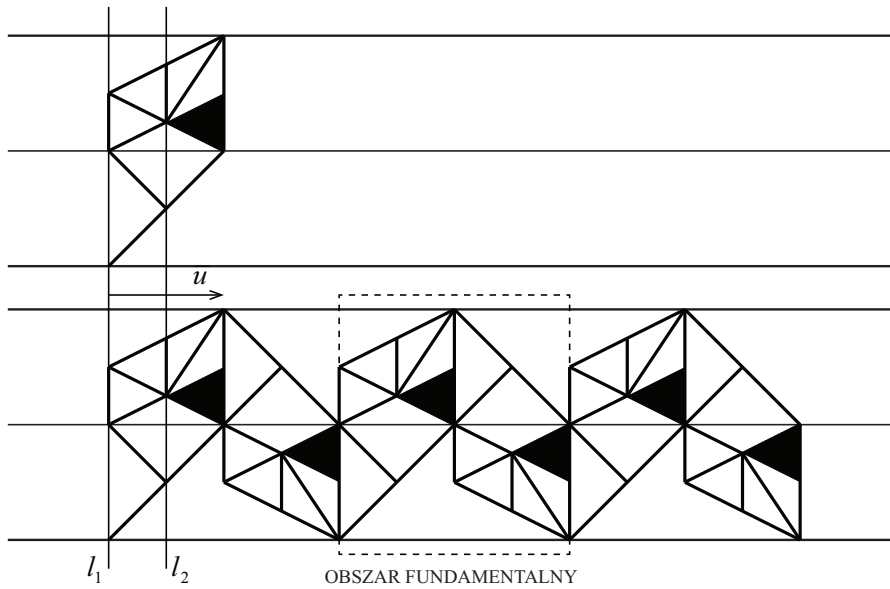
Rys. 4.19. Pas o grupie symetrii  $\Gamma_5$  z przykładowo zaznaczonym obszarem fundamentalnym

(d) grupa symetrii  $\Gamma_7 = \langle R, R_1, R_2 \rangle$



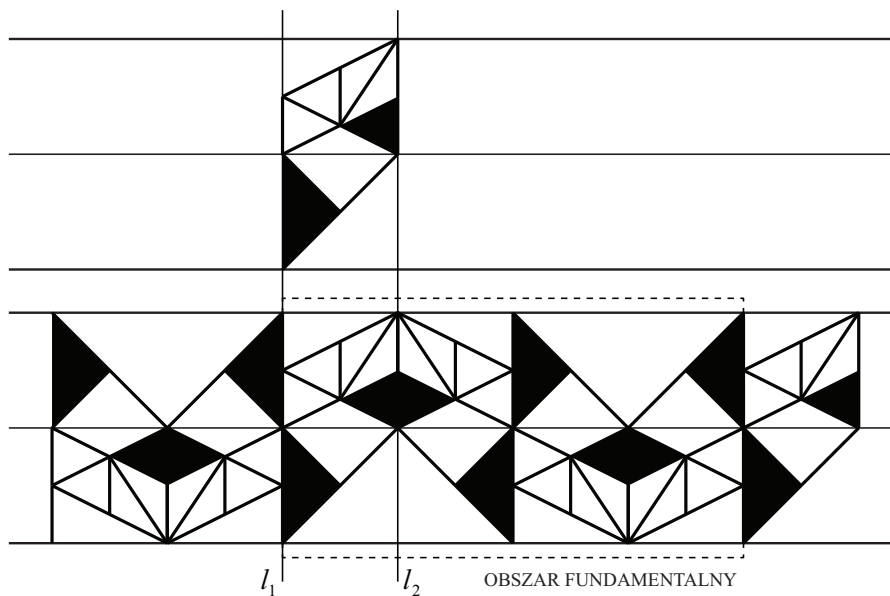
**Rys. 4.20.** Pas o grupie symetrii  $\Gamma_7$  z przykładowo zaznaczonym obszarem fundamentalnym

(e) grupa symetrii  $\Gamma_2 = \langle RR_2R_1 \rangle$



**Rys. 4.21.** Pas o grupie symetrii  $\Gamma_2$  z przykładowo zaznaczonym obszarem fundamentalnym

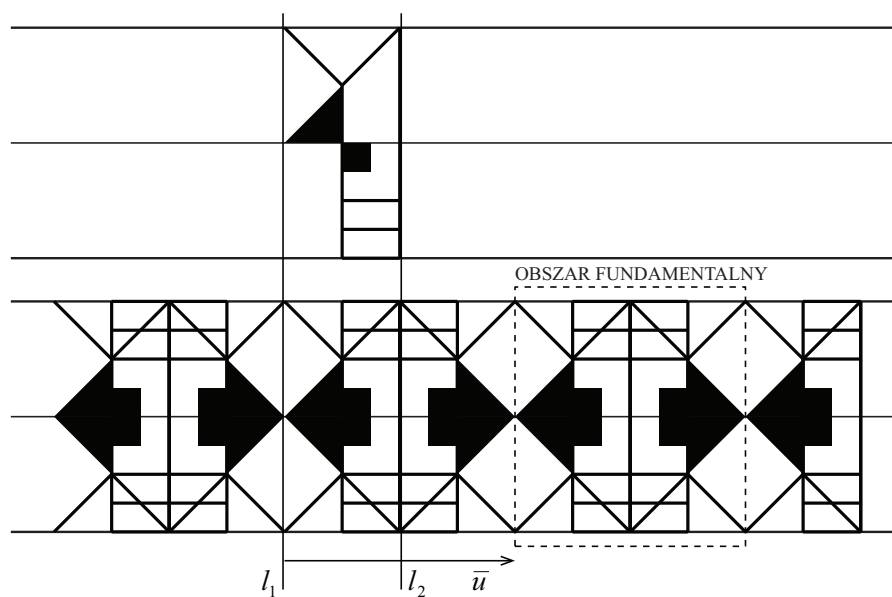
(f) grupa symetrii  $\Gamma_5 = \langle RR_1, R_2 \rangle$



**Rys. 4.22.** Pas o grupie symetrii  $\Gamma_5 = \langle RR_1, R_2 \rangle$  z przykładowo zaznaczonym obszarem fundamentalnym

(g) grupa symetrii  $\Gamma_7 = \langle R, R_1, R_2 \rangle$





**Rys. 4.23.** Pas o grupie symetrii  $\Gamma_7 = \langle R, R_1, R_2 \rangle$  z przykładowo zaznaczonym obszarem fundamentalnym

# Bibliografia

- [1] A. Speiser, *Die Theorie Der Gruppen Von Endlicher Ordnung*, Springer, Berlin, 2nd ed., 1927.
- [2] S. Jaśkowski, *O symetrii w zdobnictwie i przyrodzie (matematyczna teoria ornamentow)*, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa, 1952.
- [3] D. W. Crowe, "Symmetries of culture." Departament of Mathematics, University of Wisconsin-Madison, <http://vismath6.tripod.com/crowe1/>.