Lista 1 z Analizy Matematycznej 1 dla W02
Elementy logiki i rachunku zbiorów, działania na liczbach, zasada indukcji matematycznej

Marcin Michalski, WMAT PWr

Październik 2022

Zadanie 1. *Sprawdź, że poniższe formuły są tautologiami.*

(a) $p \vee \neg p$;

(b) $(p \wedge (p \to q)) \to q$;

(c) $p \leftrightarrow \neg(\neg p)$;

(d) $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$;

(e) $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$;

(f) $\big((p \to q) \wedge (q \to r)\big) \to (p \to r)$

(g) $\big(p \vee (q \wedge r)\big) \leftrightarrow \big((p \vee q) \wedge (p \vee r)\big)$;

(h) $\big(p \wedge (q \vee r)\big) \leftrightarrow \big((p \wedge q) \vee (p \wedge r)\big)$;

(i) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \big((p \to q) \wedge (q \to p)\big)$;

(j) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \big((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)\big)$

Zadanie 2. *Wskaż prawidłowe prawa de Morgana i je udowodnij. Pokaż również dlaczego te błędne są faktycznie błędne.*

(a) $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$;

(b) $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$;

(c) $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$;

(d) $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$;

Zadanie 3. *Załóżmy, że prawdziwe jest zdanie "jeśli Jaś będzie grzeczny, to dostanie cukierka". Które z podanych zdań są prawdziwe?*

(i) *jeśli Jaś nie będzie grzeczny, to nie dostanie cukierka;*

(ii) *jeśli Jaś nie dostanie cukierka, to znaczy, że nie był grzeczny;*

(iii) *Jaś będzie niegrzeczny lub dostanie cukierka;*

(iv) *skoro Jaś dostał cukierka, to był grzeczny.*

Wskazówka: może przydadzą się tautologie z poprzedniego zadania?

Zadanie 4. *Na rozdrożu stoją dwaj bracia, z których jeden zawsze mówi prawdę, a drugi zawsze kłamie. Jedna droga prowadzi do stolicy, a druga na manowce. Jakie pytanie trzeba zadać jednemu z braci, by niezależnie od tego, któremu z nich te pytanie się zada, wskazał on drogę do stolicy?*

Zadanie 5. *Niech* $<$ *oznacza standardową relację mniejszości. Rozstrzygnij prawdziwość poniższych formuł dla* $X \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$

(a) $(\forall x \in X)(\exists y \in X)(x < y)$;

(b) $(\forall x \in X)(\exists y \in X)(y < x)$;

(c) $(\forall x, y \in X)(x < y \to (\exists z \in X)(x < z < y))$;

(d) $(\exists x \in X)(x^2 = 2)$.

Zadanie 6. *Niech* $\varphi(x, y)$ *będzie formułą zależną od zmiennych* x, y. *Która z formuł*

(i) $(\forall x)(\exists y)(\varphi(x, y))$,   *(ii)* $(\exists y)(\forall x)(\varphi(x, y))$

jest silniejsza, tzn. implikuje drugą? Zilustruj ten fakt odpowiednim przykładem.

W Zadaniach 7 i 8 pomocne są tautologie z początku listy.

Zadanie 7. *Pokaż, że zachodzą następujące tożsamości dla dowolnych zbiorów* $A, B, C \subseteq \Omega$.

(a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

(b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

(c) $(A^c)^c = A$;

(d) $A \cup A^c = \Omega$;

(e) $A \backslash B = A \cap B^c$;

(f) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$;

(g) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$;

Zadanie 8. *Pokaż, że zachodzą następujące zależności są prawdziwe dla dowolnych zbiorów* $A, B, C \subseteq \Omega$.

(a) $A \subseteq A$;

(b) $A = B \leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$;

(c) $(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \to A \subseteq C$;

(d) $A \subseteq B \leftrightarrow B^c \subseteq A^c$;

Zadanie 9. *Naszkicuj na płaszczyźnie podane zbiory* *(a)* $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1\}$;

(b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |xy| \leqslant 1\}$;

(c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} > 1\}$.

Zadanie 10. *Niech* $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant x\}$ *oraz* $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < -x\}$. *Naszkicuj zbiory* A, A^c, B, B^c, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$ *oraz* $B \backslash A$.

Zadanie 11. *Uzupełnij poniższe wzory skróconego mnożenia*

(a) $(a + b)^2 = \dots$;

(b) $(a - b)^2 = \dots$;

(c) $(a + b)(a - b) = \dots$;

(d) $(a + b)^3 = \dots$;

(e) $(a - b)^3 = \dots$;

oraz sprawdź, że

(f) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$;

(g) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

Bazując na ostatnim podpunkcie spróbuj odgadnąć wzór na $a^n - b^n$.

Zadanie 12. *Usuń niewymierność z mianownika*

(a) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$;

(b) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$;

(c) $\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt[3]{13}+\sqrt[3]{17}}$;

(d) $\frac{\pi}{\sqrt[3]{19}-\sqrt[3]{23}}$;

(e) $\frac{\pi^2}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$;

(f) $\frac{23}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}$.

Zadanie 13. *Niech* $n \in \mathbb{N}$. *Stosując zasadę indukcji matematycznej udowodnij, że*

(a) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$;

(b) $\sum_{k=0}^{n} (2k + 1) = (n + 1)^2$;

(c) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

(d) $n \leqslant 2^n$;

(e) *dla* $x \geqslant -1$ *zachodzi* $(x + 1)^n \geqslant 1 + nx$.

Zadanie * 14. *Zbiór nazywamy dobrze uporządkowanym, jeśli każdy jego niepusty podzbiór ma element najmniejszy. Pokaż, że zasada indukcji matematycznej jest równoważna dobremu uporządkowaniu* $\mathbb{N}$ *ze standardową relacją* $\leqslant$.