

# Lista 2 z Analizy Matematycznej 1 dla W02

## Funkcje, funkcja odwrotna, składanie funkcji

Marcin Michalski, WMAT PWr

Październik 2022

**Zadanie 1.** Nadaj funkcji  $f(x) = x^2$  dziedzinę i przeciwdziedzinę tak, aby funkcja  $f$

(a) była bijekcją;

(c) była surjekcją, ale nie iniekcją;

(b) była iniekcją, ale nie surjekcją;

(d) nie była ani iniekcją, ani surjekcją.

**Zadanie 2.** Wyznacz jak największe sensowne dziedziny (zawarte w  $\mathbb{R}$ ) podanych funkcji

(a)  $f_1(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ ;

(c)  $f_4(x) = \frac{\sqrt{5x+2}}{\sqrt{-3x+7}}$ ;

(b)  $f_2(x) = \frac{1}{x^2-4x+3}$ ;

(d)  $f_3(x) = \frac{\sqrt{3-|x|}}{-2x^2+18}$ ;

**Zadanie 3.** Pokaż, że funkcja odwrotna do funkcji liniowej również jest funkcją liniową.

**Zadanie 4.** Pokaż, że złożenie dwóch funkcji liniowych też jest funkcją liniową.

**Zadanie 5.** Podaj kilka przykładów takich funkcji  $f$ , że  $f = f^{-1}$ .

**Definicja.** Funkcję rzeczywistą  $f$  nazywamy rosnącą, jeśli

$$(\forall x_1, x_2 \in \text{dom}(f))(x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)).$$

Analogicznie,  $f$  jest malejąca, jeśli

$$(\forall x_1, x_2 \in \text{dom}(f))(x_1 < x_2 \rightarrow f(x_2) < f(x_1)).$$

Funkcję, która jest rosnąca lub malejąca, będziemy nazywać monotoniczną.

**Zadanie 6.** Oceń prawdziwość podanych niżej stwierdzeń. Prawdziwe uzasadnij, a dla nieprawdziwych podaj kontrprzykład.

(a) Złożenie dwóch funkcji rosnących jest funkcją rosnącą.

(b) Złożenie dwóch funkcji malejących jest funkcją malejącą.

(c) Złożenie funkcji rosnącej i malejącej jest funkcją rosnącą.

(d) Złożenie funkcji rosnącej i malejącej jest funkcją malejącą.

W dwóch ostatnich przypadkach załóż, że rozpatrujemy  $g \circ f$ , gdzie  $g$  rośnie, a  $f$  maleje. Czy kolejność ma tu znaczenie?

**Zadanie \* 7.** Niech  $f = f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_1$ , gdzie każda z funkcji  $f_k, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , jest monotoniczna. Od czego zależy to, czy  $f$  będzie rosnąca, czy malejąca?

**Zadanie 8.** Zauważ, że funkcja monotoniczna jest różnowartościowa.

**Zadanie 9.** Pokaż, że funkcja odwrotna do funkcji rosnącej jest rosnąca. Sformułuj dualny fakt dla funkcji malejącej.

**Zadanie 10.** Pokaż, że

(a) funkcja liniowa jest monotoniczna;

(b) funkcja  $f(x) = x^2$  jest rosnąca na  $[0, \infty)$  i uzasadnij, że wobec tego również  $\sqrt{x}$  jest funkcją rosnącą na tej samej dziedzinie.

**Zadanie 11.** Manipulując wykresem funkcji  $f(x) = x$  naszkicuj wykres funkcji  $g(x) = |x - 2| - 3$ , a następnie naszkicuj wykres

(a)  $g(x) + 3$ ;

(d)  $|g(x)|$ ;

(b)  $g(x + 4)$ ;

(e)  $g(2x)$ ;

(c)  $g(|x|)$ ;

(f)  $g(-x)$ ;

**Zadanie 12.** Wyznacz funkcje odwrotne do podanych funkcji

(a)  $f_1(x) = 2x - 3$ ;

(f)  $f_6(x) = \frac{x+7}{3x-1}$ ,  $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$ ;

(b)  $f_2(x) = 2x^3 + 5$ ;

(g)  $f_7(x) = \sqrt{1-x^2} + 3$ ,  $\text{dom}(f) = [0, 1]$ ;

(c)  $f_3(x) = x^2 - 6x + 11$ ,  $\text{dom}(f) = [3, \infty)$ ;

(h)  $f_8(x) = \sqrt{4-x^2} - 5$ ,  $\text{dom}(f) = [-2, 0]$ ;

(d)  $f_4(x) = 2x^2 - 8x + 10$ ,  $\text{dom}(f) = (-\infty, 2]$ ;

(i)  $f_9(x) = \log_2(5x + 3)$ ;

(e)  $f_5(x) = \frac{2x+3}{5x-2}$ ,  $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{5}\}$ ;

(j)  $f_{10}(x) = \log_3(2x + 8) + \log_3(23)$ .

**Zadanie 13.** Wyznacz  $f \circ f, f \circ g, g \circ f, g \circ g$  dla podanych par funkcji

(a)  $f_1(x) = x, g_1(x) = \frac{1}{x}$ ;

(c)  $f_3(x) = 2x + 3, g_3(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ ;

(b)  $f_2(x) = x^2, g_2(x) = \sqrt{x}$ ;

(d)  $f_4(x) = \frac{1}{x+1}, g_4(x) = \frac{1-x}{x}$ .