# Lista 3 z Analizy Matematycznej 1 dla W02
## funkcja wykładnicza i logarytm, równania i nierówności

Marcin Michalski, WMAT PWr

Październik 2022

Niektóre przykłady zostały zaczerpnięte z przykładowych list zadań na stronie WMATu, m.in. list ułożonych przez dra Mariana Gewerta oraz doc. Zbigniewa Skoczylasa.

**Zadanie 1.** *Oblicz*

*(a)* $\left(\frac{2^{-5}\cdot 3^{-8}}{4^2\cdot 8^{-3}\cdot 9^{-3}}\right)^{-1}$;

*(b)* $\left(\frac{(\sqrt{64})^{\frac{1}{3}}}{4^{-\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}$;

*(c)* $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$;

*(d)* $\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^{\sqrt{3}^{\sqrt{3}}}$;

*(e)* $\sqrt[3]{2^5}\cdot\left(2^{1/3}\right)^7$;

*(f)* $\frac{(\sqrt{2})^3\cdot\left(\sqrt[3]{3^{\frac{1}{2}}}\right)^6}{6}$.

**Zadanie 2.** *Pokaż, że dla dla rozsądnych*[1] $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ *zachodzi* $\log_x y = \log_{x^z} y^z$. *W szczególności:* $\log_{\frac{1}{x}} y = -\log_x y$.

**Zadanie 3.** *Pokaż, że dla rozsądnych* $x, y \in \mathbb{R}_+$ *zachodzi* $\log_x y \cdot \log_y x = 1$.

**Zadanie 4.** *Pokaż, że dla rozsądnych* $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ *zachodzi* $\log_{xy} z = \frac{1}{\log_z x + \log_z y}$.

**Zadanie 5.** *Oblicz*

*(a)* $\log_3 51 + \log_3 \frac{27}{17}$;

*(b)* $\log_4 32 - \frac{1}{2}$;

*(c)* $2\log_6 12 + 3\log_6(3\sqrt[3]{2})$;

*(d)* $\log_{2\sqrt{3}}(24\sqrt{3})$;

*(e)* $\log_2 3 \log_3 5$;

*(f)* $\log_{49} 343$;

*(g)* $2^{\log_2 5 + \log_2 7}$;

*(h)* $3^{\frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}} 13}$;

**Zadanie 6.** *Przekształć wykres funkcji* $f(x) = \log_2 x$ *tak, aby otrzymać wykres* $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

**Zadanie 7.** *Rozwiąż równania i nierówności*

[1] Unikajmy 1 w podstawach logarytmów i 0 w mianownikach.

*(a)* $x^3 + x^2 - 2x = 0$;

*(b)* $x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x - 2 = 0$;

*(c)* $(x^2 + x - 2)(x^2 + x - 6) \leqslant 0$;

*(d)* $x^4(x-1)^3(x+2)^2(x-2) > 0$.

**Zadanie 8.** *Rozwiąż równania i nierówności*

*(a)* $\frac{9x}{3x-1} = \frac{3}{3x+1} + 2$;

*(b)* $\frac{x-4}{x-2} - \frac{2}{x-3} = \frac{x-21}{x^2+x-6}$;

*(c)* $\frac{x^2+5x}{x-3} > x$;

*(d)* $\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} > 0$.

**Zadanie 9.** *Rozwiąż równania i nierówności*

*(a)* $2^{x+1} = 3^{2x}$;

*(b)* $2^{x+1} - 3 \cdot 2^{-x} = 5$;

*(c)* $5^x + 2^{x+1} < 2^{2x} \cdot 5^{2x}$;

*(d)* $3^x + 3^{-x} \geqslant 2$.

**Zadanie 10.** *Rozwiąż równania i nierówności*

*(a)* $\log_2(5x+1) - \log_2(x-1) = 3$;

*(b)* $2\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x} - \log_{\frac{1}{3}}(6x-1) = 0$;

*(c)* $\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} > 0$;

*(d)* $\frac{2}{\log_{\frac{1}{3}} x} \geqslant 1 - \log_3 x$.

**Zadanie $^\star$ 11.** *Załóżmy, że funkcja* $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *spełnia*

*(i)* $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ *dla wszystkich* $x, y$;

*(ii)* $f(1) = 0$;

*(iii)* $f(2) = 1$.

*Pokaż, że* $f(x) = \log_2 x$ *dla* $x \in \{2^q : q \in \mathbb{Q}\}$.