Lista 5 z Analizy Matematycznej 1 dla W02
Ciągi

Marcin Michalski, WMAT PWr

Listopad 2022

Niektóre przykłady pochodzą z list zadań dostępnych na stronie WMATu. W razie niedosytu poniższą listą gorąco zachęcam do ich przejrzenia!

Zadanie 1. *Zapisz poniższe formuły i ich zaprzeczenia używając kwantyfikatorów, symboli logicznych i innych symboli matematycznych. Zanegowane formuły nie powinny zawierać symbolu negacji.*

(a) *Liczba m jest ograniczeniem dolnym ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$;*

(b) *ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony z góry;*

(c) *ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest rosnący od pewnego miejsca.*

Zadanie 2. *Zbadaj ograniczoność (z dołu, z góry, w ogóle) podanych ciągów. Tam, gdzie to możliwe, spróbuj obliczyć supremum i infimum ciągu.*

(a) $x_n = \frac{2n}{3n+5}$;

(b) $x_n = 10n^2 - n^3$;

(c) $x_n = \sqrt{2n+7} - \sqrt{2n+3}$

(d) $x_n = (-1)^{n+1} + \frac{(-1)^n}{n}, n > 0$;

(e) $x_n = 2^n + (-2)^n$;

(f) $x_n = \sqrt[n]{5^n - 1}$;

(g) $x_n = \frac{1}{n+5}\sin(\frac{n\pi}{6})$;

(h) $x_n = \frac{3^n}{n!}$;

(i) $x_n = \frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$;

(j) $x_n = \frac{1+2+3+\ldots+n}{n!}$.

Zadanie 3. *Zbadaj monotoniczność (od pewnego miejsca?) podanych ciągów.*

(a) $x_n = \frac{5^n}{n!}$;

(b) $x_n = \frac{1}{n+1}\sin(\frac{n\pi}{3})$;

(c) $x_n = \frac{n^2}{n^2+1}$;

(d) $x_n = n^2\cos n$

(e) $x_n = 7^n - 5^{n+1}$;

(f) $x_n = \sqrt{n^2+n+1} - n$;

(g) $x_n = \frac{13^n}{11^n+12^n}$;

(h) $x_n = \frac{1+2+3+\ldots+n}{n!}$.

Zadanie 4. *Pokaż, że każdy ciąg zbieżny ma dokładnie jedną granicę.*

Zadanie 5. *Pokaż, że* $\lim_{n\to\infty} x_n = g$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\lim_{n\to\infty}(x_n - g) = 0$.

Zadanie 6. *Czy tezy twierdzenia o arytmetyce granic można odwrócić? Np. czy jeśli* $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *jest ciągiem zbieżnym, to zbieżne są ciągi* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *i* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$*?*

Zadanie 7. *Czy w twierdzeniu o ciągu monotonicznym i ograniczonym można zrezygnować z monotoniczności (od pewnego miejsca)?*

Zadanie 8. *Pokaż, że dla* $a > 0$ *ciąg* $\sqrt[n]{a}$ *jest zbieżny do 1. Wskazówka: na wykładzie zrobiliśmy* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

4 kolejne zadania mają takie samo polecenie, ale testują znajomość różnych technik wyznaczania granic.

Zadanie 9. *Wyznacz granice poniższych ciągów.*

(a) $x_n = \frac{n-1}{n+1}$;

(b) $x_n = \frac{3n^2+65n-13}{8n^2-5n+3}$;

(c) $x_n = \frac{(3n^2-4n+12)^3(9n-1)^7}{2n(n+1)^6(n-1)^6}$;

(d) $x_n = \frac{n^3\sqrt{2n+3}}{\sqrt{3n^7+5n^4+13}}$

(e) $x_n = \frac{13^{n+1}+5\cdot 12^n}{4\cdot 13^n+12^{n-1}}$;

(f) $x_n = \sqrt{n^2+3n+1} - \sqrt{n^2+5n+3}$;

(g) $x_n = \sqrt{4^n + 3\cdot 2^n + 1} - \sqrt{4^n+5}$;

(h) $x_n = \sqrt[n]{n^k}, k \in \mathbb{N}$;

(i) $x_n = \frac{\sqrt[n]{27}-\sqrt[n]{8}}{\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2}}$;

(j) $x_n = \sqrt[3]{n^2+n} - \sqrt[3]{n^2-n}$.

Do dwóch ostatnich przykładów może się przydać Zadanie 11 z Listy 1.

Zadanie 10. *Wyznacz granice poniższych ciągów.*

(a) $x_n = \frac{7n}{2^n}$;

(b) $x_n = \frac{n^2+4n+43}{3^n}$;

(c) $x_n = \frac{5^n}{n!}$;

(d) $x_n = \frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$;

(e) $x_n = \frac{1+2+3+\ldots+n}{n!}$;

(f) $x_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

Zadanie 11. *Wyznacz granice poniższych ciągów.*

(a) $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$;

(b) $x_n = \frac{\sin n + n}{n^2+3n-5}$;

(c) $x_n = \frac{3n^2-n+\sin n}{5n^2-3n-\cos n}$;

(d) $x_n = \frac{\lfloor n\pi \rfloor}{\lceil n\sqrt{2} \rceil}$;

(e) $x_n = \sqrt[n]{2^n+3^n+5^n}$;

(f) $x_n = \sqrt[n]{\frac{3}{2} - \cos(n!)}$;

(g) $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$;

(h) $x_n = \sqrt[n^2]{\frac{1}{n}}$;

(i) $x_n = \sqrt[n]{n^3+n^2+n+1}$;

(j) $x_n = \sqrt[n]{1+2+\ldots+n}$.

Zadanie 12. *Wyznacz granice poniższych ciągów.*

(a) $x_n = (\frac{n+1}{n})^{2n+1}$;

(b) $x_n = (\frac{n+2}{n})^{n}$;

(c) $x_n = (\frac{n}{n+1})^{n}$;

(d) $x_n = (\frac{n+3}{n+2})^{3-2n}$;

(e) $x_n = (\frac{n^2+1}{n^2})^{n}$;

(f) $x_n = (\frac{n-1}{n})^{-3n}$;

(g) $x_n = (\frac{n^2-1}{n^2})^{n}$;

(h) $x_n = (\frac{2^n+1}{2^n})^{2^n}$.

Zadanie 13. *Niech* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *będzie zadany rekurencyjnie przez* $x_0 = 2$ *oraz* $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$. *Przypomnij dlaczego ten ciąg jest zbieżny i oblicz jego granicę.*
Wskazówka: $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1}$

Zadanie * **14.** *Zbadaj zbieżność ciągu* $\sqrt[n]{n!}$.

Zadanie * **15.** *Załóżmy, że* $\lim_{n\to\infty} a_n = a \neq b = \lim_{n\to\infty} b_n$. *Czy zbiór*

$$\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cap \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$$

może być nieskończony?

Niech

- $\mathbf{c}$ - zbiór ciągów zbieżnych;
- $\mathbf{0} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$;
- $\mathbf{1} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} x_n = 1\}$;
- $\mathbf{a} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} x_n \in (0,1)\}$;
- $\mathbf{A} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} x_n \in (1,\infty)\}$;
- $\boldsymbol{\infty} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} x_n = \infty\}$.

Oznaczmy $S_1 \Box S_2 = \{(x_n \Box y_n)_{n\in\mathbb{N}} : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S_1 \ \wedge \ (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S_2\}$, gdzie $\Box$ to jedno ze standardowych działań: $+, -, \cdot$, dzielenie, potęgowanie, a $S_1, S_2 \in \{\mathbf{c}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{a}, \mathbf{A}, \boldsymbol{\infty}\}$.
$S_1 \Box S_2$ nazywamy symbolem oznaczonym, jeśli dla któregoś zbioru z $\{\mathbf{c}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{a}, \mathbf{A}, \boldsymbol{\infty}\}$ jest tak, że wszystkie ciągi z $S_1 \Box S_2$ do niego należą. W przeciwnym razie $S_1 \Box S_2$ nazywamy symbolem nieoznaczonym. Np. $\mathbf{c} + \mathbf{c}$ składa się z sum dwóch ciągów zbieżnych, a ponieważ suma ciągów zbieżnych jest ciągiem zbieżnym, to $\mathbf{c} + \mathbf{c} \subseteq \mathbf{c}$, czyli $\mathbf{c} + \mathbf{c}$ jest symbolem oznaczonym. Z drugiej strony np. $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{c}}$ jest symbolem nieoznaczonym (dlaczego?).

Zadanie * **16.** [1] *Sprawdź, które z symboli* $S_1 \Box S_2$ *są nieoznaczone, gdzie* $S_1, S_2, \Box$ *są zdefiniowane tak, jak powyżej.*

[1] To zadanie ma gwiazdkę, ale generalnie nie jest trudne, tylko nieco żmudne.