Lista 6 z Analizy Matematycznej 1 dla W02

Granice funkcji, granice jednostronne, asymptoty

Marcin Michalski, WMAT PWr

Listopad 2022

Niektóre przykłady pochodzą z list zadań dostępnych na stronie WMATu. W razie niedosytu poniższą listą gorąco zachęcam do ich przejrzenia!

Zadanie 1. *Dlaczego w definicji Cauchy'ego (Heinego) granicy funkcji w x_0 jest wymóg, by $x \neq x_0$ ($x_n \neq x_0$)? Podaj przykład ilustrujący ten problem.*

Zadanie 2. *Zapisz za pomocą kwantyfikatorów i innych symboli matematycznych, że funkcja f nie ma granicy właściwej w x_0. Twoja formuła nie powinna zawierać symbolu negacji.*

Zadanie 3. *Wyznacz*

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$;

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-x+1}{x^3-1}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^2}{x-1}$;

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2}{|x-1|}$;

(e) $\lim\limits_{x\to 0} (\frac{1}{|x|} - \frac{1}{x^2})$;

(f) $\lim\limits_{x\to \infty} (\sqrt{x^2+2x-1} - x)$;

(g) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{3\sqrt{x}+x^2}{x+2\sqrt{x}}$;

(h) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}$;

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x \cos x}{1+x^2}$;

(j) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\sin x^3}{x}$;

(k) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin x}$;

(l) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{\sin x}$;

(m) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{2^x+45}{e^x+11}$;

(n) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x}{e^x}$;

(o) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^2+x}{e^x}$.

Zadanie 4. *Sprawdź, czy poniższe funkcje mają granicę (być może niewłaściwą) w zadanym punkcie.*

(a) $\frac{\operatorname{sgn} x}{x^2}, x_0 = 0$;

(b) $\frac{\operatorname{sgn} x}{x^3}, x_0 = 0$;

(c) $\frac{x-1}{|x-1|}, x_0 = 1$;

(d) $\frac{\lceil x \rceil}{\lfloor x \rfloor}, x_0 = 0$;

(e) $\sin\frac{1}{x}, x_0 = 0$;

(f) $\frac{1}{\operatorname{tg} x - \sin x}, x_0 = 0$;

(g) $e^{\frac{1}{x}}, x_0 = 0$;

(h) $\frac{1}{e^x - 2^x}, x_0 = 0$.

Zadanie 5. *Niech* $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. *Pokaż, że*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e.$$

Wywnioskuj stąd, że $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

Wskazówka: Oszacuj x_n *przez "podłogę" i "sufit" (które są już liczbami naturalnymi) i skorzystaj z monotoniczności funkcji wykładniczej i tw. o 3 ciągach.*

Zadanie 6. *Wyznacz*

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3x\right)^{\frac{1}{x}}$;

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\operatorname{tg} x\right)^{\operatorname{ctg} x}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\pi x)}{x}$;

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x^3)}{x^2}$;

(e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2(2x)}{x^2}$;

(f) $\lim\limits_{x\to 0} a^x, a > 0$.

W ostatnim podpunkcie może się przydać granica ciągu $\sqrt[n]{a}$.

Zadanie 7. *Wyznacz wszystkie asymptoty podanych funkcji i naszkicuj ich poglądowe wykresy.*

(a) $\frac{\sqrt{3x^2+x+5}}{2x-4}$;

(b) $\sqrt{5x^2-3x+7}$;

(c) $\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2-4}$;

(d) $\frac{x\operatorname{arctg}(x)}{x-1}$;

(e) $3\operatorname{arctg} x + 5 + \frac{\sin x}{x}$;

(f) $\frac{3x^2-5x+7}{x-3} + \frac{1}{2}\sin x$;

(g) $\frac{e^x}{e^x-1}$;

(h) $\frac{3}{e^x-e^2}$.