

Lista 7 z Analizy Matematycznej 1 dla W02

Ciągłość funkcji

Marcin Michalski, WMAT PWr

Grudzień 2022

Niektóre przykłady pochodzą z list zadań dostępnych na [stronie WMATu](#). W razie niedosytu poniższą listą gorąco zachęcam do ich przejrzenia!

Zadanie 1. *Zapisz za pomocą kwantyfikatorów, symboli logicznych i innych znaków matematycznych, że funkcja f ma własność Darboux lub nie jest ciągła. Zamień to zdanie na równoważną implikację.*

Zadanie 2. *Wyznacz granicę $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$. Wskazówka: spróbuj podstawienia $y = a^x - 1$ i użyj logarytmu naturalnego. W którym miejscu rachunków korzystasz z ciągłości?*

Zadanie 3. *Wyznacz granice*

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x};$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x^2)}{2x^2 + x - 3};$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{\sin(3x)};$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\operatorname{tg}(x)};$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^x}{\sin(5x)};$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^x}{\sin x};$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{2x} - 2^x}{\operatorname{tg}(3x)};$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^\pi - x^e}{x - 1}.$$

Zadanie 4. *Dla jakich parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ podane funkcje są ciągłe?*

$$(a) f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{jeśli } x \leq \frac{\pi}{2}; \\ \sin x & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} -1 & \text{jeśli } x \leq -1; \\ 1 & \text{jeśli } x \geq 1; \\ a \operatorname{tg}(bx) & \text{dla } x \in (-1, 1). \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} \ln(x^a) & \text{jeśli } x \geq e; \\ \frac{1}{x^b} & \text{dla } x < e. \end{cases}$$

Zadanie 5. *Wyznacz punkty nieciągłości podanych funkcji i określ ich rodzaj.*

$$(a) f(x) = \operatorname{sgn} x;$$

$$(b) f(x) = \lfloor x \rfloor;$$

$$(c) f(x) = \lceil x \rceil;$$

$$(d) f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{jeśli } x \neq 0; \\ 0 & \text{gdy } x = 0. \end{cases};$$

$$(e) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{jeśli } x \neq 0; \\ 0 & \text{gdy } x = 0. \end{cases}.$$

Zadanie 6. Zbadaj ciągłość funkcji

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } x \in \mathbb{Q}; \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Czy coś się zmienia dla funkcji $g(x) = xf(x)$?

Zadanie 7. Uzasadnij, że każdy wielomian nieparzystego stopnia ma przynajmniej jeden pierwiastek.

Zadanie 8. Udowodnij, że podane równania mają rozwiązania na wskazanej dziedzinie oraz wykaż, że są one jedyne lub uzasadnij, że przeciwnie - mają ich więcej.

$$(a) e^{\pi x} + \pi^{e x} + x = \sqrt{5}, x \in \mathbb{R};$$

$$(b) \ln x = -3x^2, x \in (0, \infty);$$

$$(c) \operatorname{arctg} x = \frac{1}{x}, x \in (0, \infty);$$

$$(d) e^x - \frac{1}{x} = 10^{-13}, x \in (-\infty, 0);$$

$$(e) \frac{x+1}{x} = \cos x + x, x \in (0, \infty);$$

$$(f) \sin \frac{1}{x} = 0, x \in (0, 1).$$

Zadanie 9. Czy założenie o domkniętości odcinka, na którym określona była funkcja ciągła, jest istotne dla tezy o ograniczoności takiej funkcji?

Zadanie 10. Czy założenie o dziedzinie funkcji ciągłej jest istotne dla tezy o ciągłości funkcji odwrotnej?

Zadanie 11. Pokaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x istnieje ciąg liczb wymiernych $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ do niej zbieżny.

Zadanie * 12. Załóżmy, że f i g są rzeczywistymi funkcjami ciągłymi i $f \upharpoonright \mathbb{Q} = g \upharpoonright \mathbb{Q}$. Pokaż, że $f = g$.