Lista 8 z Analizy Matematycznej 1 dla W02

Pochodne, twierdzenia o wartości średniej, reguła de l'Hospitala

Marcin Michalski, WMAT PWr

Grudzień 2022

Niektóre przykłady pochodzą z list zadań dostępnych na stronie WMATu. W razie niedosytu poniższą listą gorąco zachęcam do ich przejrzenia!

Zadanie 1. *Zapisz za pomocą kwantyfikatorów, symboli logicznych i innych znaków matematycznych, że funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 ale nie jest w nim różniczkowalna. Twoja formuła nie powinna używać symbolu negacji. Następnie podaj przykład takiej funkcji.*

Zadanie 2. *Badając jednostronne granice ilorazu różnicowego*[1] *sprawdź, czy podane funkcje są różniczkowalne w zadanym punkcie oraz naszkicuj ich wykresy.*

(a) $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$;

(b) $f(x) = \max\{1, x^2\}, x_0 = 1$;

(c) $f(x) = \begin{cases} x & \text{jeśli } x \leqslant 0, \\ \sin x & \text{jeśli } x > 1, \end{cases} \quad x_0 = 0$;

(d) $f(x) = \min\{\ln x, 0\}$;

(e) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{jeśli } x < 0, \\ e^x & \text{jeśli } x \geqslant 0, \end{cases} \quad x_0 = 0$;

(f) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{jeśli } x \geqslant 0, \\ -\sqrt{-x} & \text{jeśli } x < 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$

Zadanie 3. *Udowodnij wzór na* $(\frac{f}{g})'$ *korzystając z pochodnej iloczynu i pochodnej złożenia.*

Zadanie 4. *Udowodnij wzór na pochodną funkcji odwrotnej za pomocą pochodnej złożenia.*

Zadanie 5. *Poznawszy wzory na pochodne* $\ln x$ *oraz* e^x *wyznacz wzory na pochodne funkcji* $\log_a x$ *oraz* a^x *(*$1 \neq a > 0$*).*

Zadanie 6. *Na wykładzie wyznaczyliśmy pochodną funkcji* x^r *za pomocą pochodnej logarytmicznej. Wyznacz pochodną funkcji* x^n*, gdzie* $n \in \mathbb{N}$*, bezpośrednio z definicji pochodnej. Wskazówka: skorzystaj ze wzoru dwumianowego Newtona.*

Zadanie 7. *Wyznacz pochodne poniższych funkcji.*

[1] Granice te nazywa się pochodnymi lewo- i prawostronnymi.

(a) $5x^3 - 3x^2 + 2x - 11$;

(b) $x^3\sqrt{3x+2}$;

(c) $\frac{(x-2)^3(x+3)^5}{5x}$;

(d) $\frac{e^{3x^2}}{6x}$;

(e) $(2^x - 3^x)^5$;

(f) $(x+1)\ln(x^2-1)$;

(g) $\ln(\frac{\ln x}{2^{x^2+1}})$;

(h) $2\sin x\cos x$;

(i) $(\sin x + \cos x)^2$;

(j) $3^{((\sin x)^2)}$;

(k) $(1+x^2)\mathrm{arctg}x$;

(l) $\arcsin x - \arccos x$;

(m) $(\arcsin x + \arccos x)^2$;

(n) $(\mathrm{arctg}x + \mathrm{arcctg}x)^2$;

(o) $\sqrt{1-x^2} + x\arcsin x$;

(p) $x\mathrm{arctg}x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$;

(q) $x((\ln x)^2 + 2 - 2\ln x)$;

(r) $(\sin x)^{\cos x}$.

Zadanie 8. *Wiedząc, że podane funkcje są bijekcjami, wyznacz pochodne ich funkcji odwrotnych w zadanych punktach.*

(a) $x + \ln x$, $p_0 = e + 1$;

(b) $\ln(\ln x)$, $p_0 = 2$;

(c) $\cos x + x$, $p_0 = 1$;

(d) $5^x + x^3 + x$, $p_0 = 7$.

Zadanie 9. *Jaka jest zależność pomiędzy $f'(x_0)$ i $f'(-x_0)$ dla różniczkowalnej funkcji nieparzystej? Podaj argument geometryczny oraz algebraiczny/analityczny. Sformułuj dualny fakt dla funkcji parzystej.*

Zadanie 10. *Niech f będzie różniczkowalną bijekcją. Jaki jest związek między styczną do f w punkcie (x_0, y_0), a styczną do f^{-1} w punkcie (y_0, x_0)?*

Zadanie 11. *Wyznacz styczne do podanych funkcji w zadanych punktach.*

(a) $\ln x$ *w* $(1,0)$;

(b) $\mathrm{tg}\, x$ *w* $(0,0)$;

(c) $x\sin x$ *w* $(0,0)$;

(d) $x^3 - 3x + 13$ *w punkcie, dla którego styczna jest równoległa do prostej* $y = -x + 5$.

Zadanie 12. *Wyznacz styczne do podanych funkcji w zadanych punktach.*

(a) $\ln x$ *w* $(1,0)$;

(b) $\mathrm{tg}\, x$ *w* $(0,0)$;

(c) $x\sin x$ *w* $(0,0)$;

(d) $x^3 - 3x + 13$ *w punkcie, dla którego styczna jest równoległa do prostej* $y = -x + 5$.

Zadanie 13. *Wyznacz styczną do funkcji* $\operatorname{tg} x$ *w punkcie* $(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3})$ *oraz, be wykonywania obliczeń, styczną do* $\operatorname{arctg} x$ *w punkcie* $(\sqrt{3}, \frac{\pi}{3})$.

Zadanie 14. *Przejrzyj poprzednie listy i tam, gdzie to możliwe, zastosuj do trudnych do obliczenia granic funkcji regułę de l'Hospitala.*

Zadanie 15. *Wyznacz granice*

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$;

(b) $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x$;

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{\sin x}$;

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^\pi - 1}{x^e - 1}$;

(e) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^\pi - 1}{x^e - 1}$;

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$;

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$;

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\ln(1+x^2)} - \frac{1}{\operatorname{tg}(x^2)}$;

(i) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^n}{e^x}, n \in \mathbb{N}$;

(j) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^{\frac{1}{n}}}{\ln x}$;

(k) $\lim\limits_{x\to \infty} x^{\frac{1}{x}}$;

(l) $\lim\limits_{x\to 0} (1 + \sin x)^{\operatorname{ctg} x}$;

(m) $\lim\limits_{x\to 0} (x + \sin x)^{\ln(1+x)}$;

(n) $\lim\limits_{x\to \infty} (\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x)^x$;

Zadanie 16. *Pokaż, że granica* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x})}{x}$ *istnieje, chociaż granica ilorazu pochodnych nie istnieje.*

Zadanie 17. *Pokaż, że jeśli funkcje* f *i* g *ciągłe na przedziale* $[a, b]$ *i różniczkowalne wewnątrz niego mają równe pochodne, to różnią się o stałą.*

Zadanie 18. [2] *Niech* f *będzie funkcją określoną na* (a, b)*, posiadającą granicę w* $x_0 \in (a, b)$*. Pokaż, że funkcja*

$$g(x) = \inf\{f(\xi) : \xi \in (x_0, x)\}$$

określona na (x_0, b) *ma w* x_0 *tę samą granicę, co* f.

[2] Fakt ten był przydatny w dowodzie reguły de l'Hospitala