Lista 9 z Analizy Matematycznej 1 dla W02

Ekstrema funkcji, badanie przebiegu zmienności funkcji, wzór Taylora

Marcin Michalski, WMAT PWr

Styczeń 2023

Niektóre przykłady pochodzą z list zadań dostępnych na stronie WMATu. W razie niedosytu poniższą listą gorąco zachęcam do ich przejrzenia!

Zadanie 1. *Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne podanych funkcji.*

(a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$;

(b) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$;

(c) $f(x) = x\sqrt{9-x^2}$

(d) $f(x) = (\sin x)^2$;

(e) $f(x) = (x^2 - x - 2)e^{2x}$;

(f) $f(x) = 3\mathrm{arctg}x - \ln(1+x^2)$[1].

Zadanie 2. *Wyznacz najmniejsze i największe wartości podanych funkcji w zadanych dziedzinach.*

(a) $f(x) = (x-1)^2(x+2)$ *na* $[-3, \infty)$;

(b) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ *na* $(-\infty, 2]\backslash\{0\}$;

(c) $f(x) = x\ln x$ *na* $(0, 1]$;

(d) $f(x) = x^2e^{-x}$ *na* $\mathbb{R}$;

(e) $f(x) = |x-1|(x+1)(x-2)$ *na* $(-1, \frac{5}{3}]$;

(f) $f(x) = (x-3)^2e^{|x|}$ *na* $[-1, 4]$;

Punkt x_0 nazywamy punktem przegięcia funkcji f, jeśli w x_0 funkcja z wklęsłej staje się wypukła, lub na odwrót.

Zadanie 3. *Wyznacz przedziały wklęsłości/wypukłości oraz punkty przegięcia podanych funkcji.*

(a) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$;

(b) $f(x) = (x-3)(x+2)^2$;

(c) $f(x) = \mathrm{tg}(x)$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$;

(d) $f(x) = x^2\ln x$;

(e) $f(x) = -xe^{-x}$;

(f) $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

[1] O wyznaczeniu maksimum tej funkcji mówiliśmy na I wykładzie :-)

Zadanie 4. *Wyznacz prostokąt o największym polu, wpisany między parabolę* $1 - x^2$*, a osią* OX.

Zadanie 5. *Pokaż, że jeśli* x_0 *jest pierwiastkiem* k *krotnym wielomianu* W*, to jest pierwiastkiem* $k-1$ *krotnym wielomianu* W'.

Zadanie 6. *Sprawdź, która z liczb* π^e*,* e^π *jest większa, bez obliczania ich wartości.*

Zadanie 7. *Pokaż, że Twierdzenie Lagrange'a jest szczególnym przypadkiem wzoru Taylora.*

Zadanie 8. *Pokaż, że jeśli dla różniczkowalnej funkcji* f *zachodzi* $f = f'$*, to* $f(x) = ce^x$ *dla pewnej stałej* c.

Zadanie 9. *Zapisz wzór Taylora w* 0 *z* $n{+}1$ *resztą,* $n \in \mathbb{N}$*, dla funkcji* $e^x, \ln(1+x), \sin x, \cos x$.

Zadanie 10. *Oszacuj z dokładnością do* 10^{-4} *liczby* e, e^{-1}*,* $\sin\frac{1}{10}, \ln\frac{11}{10}$.