Dzień dobry,

przedstawiam rozwiązania niektórych zadań. Na ogół zadania te są wzięte z naszej listy. Część z nich zrobiliśmy już na ćwiczeniach.

56. a)

$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(2^x+1)}{x} \overset{H[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2^x \ln 2 \frac{1}{2^x+1}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2^x \ln 2}{2^x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln 2}{1+\frac{1}{2^x}} = \frac{\ln 2}{1+0} = \ln 2$

56. c)

$\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{arc\,tg} x}{x^2} \overset{H[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{1}{x^2+1}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+1-1}{2x(x^2+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^3+2x} \overset{H[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x}{6x^2+2} = \frac{0}{2} = 0$

56.e)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{\ln\cos 3x} \overset{H[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)}{\frac{1}{\cos 3x}\cdot(-\sin 3x)\cdot 3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{\cos x}\cdot\frac{\cos 3x}{-3\sin 3x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x}{\cos x}\cdot\frac{-\sin x}{-3\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x}{\cos x}\cdot\frac{\frac{\sin x}{x}}{3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x}{\cos x}\cdot\frac{\frac{\sin x}{x}}{9\cdot\frac{\sin 3x}{3x}} \overset{*}{=} \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{9\cdot 1} = \frac{1}{9}$$

Wyjaśnienie.

$*$ tu korzystamy z bardzo znanej granicy:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$$

t może być równe $3x$, albo jeszcze coś innego. Byle tylko w liczniku i w mianowniku była to ta sama wielkość t dążąca do zera.

56. f)

$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\cdot\operatorname{arc\,ctg} x \overset{[\infty\cdot 0]}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arc\,ctg} x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \overset{H[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{x^2+1}}{\frac{1}{-2x\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x\sqrt{x}}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x\sqrt{x}}{x\sqrt{x}(\sqrt{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}})} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}} \overset{[\frac{2}{\infty+0}]}{=} 0$

56.h)

$$\lim_{x\to\pi^-} (\pi-x)\operatorname{tg}\frac{x}{2} \overset{[0\cdot\infty]}{=} \lim_{x\to\pi^-} \frac{\pi-x}{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}} \overset{H[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to\pi^-} \frac{-1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{\sin^2\frac{x}{2}}} = \lim_{x\to\pi^-} 2\sin^2\frac{x}{2} \overset{*}{=} 2\cdot 1^2 = 2$$

Wyjaśnienie.

$*$ $x\to\pi^-$ stąd $\frac{x}{2}\to\frac{\pi}{2}^-$ i wówczas $\sin\frac{x}{2}\to 1$.

Uwaga. To że rozpatrywana granica była akurat lewostrona nie miało, akurat w tym przykładzie, żadnego znaczenia. Gdybyśmy tu mieli $x\to\pi^+$ albo po prostu $x\to\pi$ rachunki i wynik były by takie same.

57.

Najpierw zrobimy przykład łatwiejszy niż 57. c).

Oznaczmy go c_0)

Wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji: $f(x) = 4x - \frac{1}{x}$,

Możemy rozwiązać to zadanie nie korzystając z pochodnej.

Funkcja nie jest określona w zerze i dziedzina funkcji jest sumą przedziałów $(-\infty,0)$ oraz $(0,\infty)$.

Rozważmy najpierw przedział $(0,\infty)$.

Tu poczynimy proste spostrzeżenie, $\frac{1}{x}$ maleje (bo przy stałym liczniku mianownik rośnie).

Zatem $-\frac{1}{x}$ rośnie. Także rośnie funkcja liniowa $4x$.

Stąd w przedziale $(0,\infty)$ funkcja f rośnie bo jest sumą funkcji rosnacych.

Podobne spostrzeżenia prowadzą do wniosku, że f rośnie w przedziale $(-\infty, 0)$.

Odpowiedź brzmi: funkcja f rośnie w przedziale $(-\infty, 0)$, a także w przedziale $(0, \infty)$.

Teraz zadanie podobne. Różnica jest taka, że we wzorze na funkcję, znak $-$ zamienimy na $+$. Przykład jest jednak znacznie trudniejszy. Chyba, że wykorzystamy pochodną.

57. c)

Wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji: $f(x) = 4x + \frac{1}{x}$.

Jak poprzednio dziedzina funkcji: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

$f'(x) = 4 - \frac{1}{x^2}$

$f'(x) > 0 \iff 4 > \frac{1}{x^2} \iff x^2 > \frac{1}{4} \iff x < -\frac{1}{2}$ lub $x > \frac{1}{2}$

Zatem funkcja rośnie w przedziałach $(-\infty, -\frac{1}{2})$ oraz $(\frac{1}{2}, \infty)$. A maleje w przedziałach $(-\frac{1}{2}, 0)$ oraz $(0, \frac{1}{2})$.

57. h)

Wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji: $f(x) = \frac{x}{\ln x}$.

Dziedzina funkcji: $D = \mathbb{R}_+ \setminus \{1\} = (0,1) \cup (1, \infty)$ (Logarytm jest określony tylko dla liczb dodatnich. Ponadto każdy logarytm ma w punkcie $x = 1$ miejsce zerowe.)

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}.$$

Stąd $f'(x) > 0 \iff \ln x > 1 \iff x > e$.

Uwzględniamy dziedzinę i dajemy odpowiedź:

funkcja rośnie w przedziale (e, ∞), a maleje w przedziałach $(0,1)$ oraz $(1, e)$.

59. d)

Znaleźć ekstrema lokalne funkcji: $f(x) = (x+1)e^{-x}$.

Dziedzina funkcji: $D = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + (x+1) \cdot (-e^{-x}) = e^{-x}[1 - (x+1)] = -xe^{-x}.$$

Stąd $f'(x) = 0 \iff x = 0$.

Zatem f ma najwyżej jedno ekstremum lokalne.

Pozostaje odpowiedzieć czy ma je faktycznie. Do tego wystarczy by f' zmieniała znak w swoim miejscu zerowym.

Tak, dla $x < 0$ mamy $f'(x) > 0$, zaś dla $x > 0$, $f'(x) < 0$. Pochodna w punkcie $x = 0$ zmienia znak z $+$ na $-$.

Podsumowując. Funkcja f ma jedno ekstremum: maksimum lokalne właściwe w punkcie $x = 0$.

* * *

Oto kolejne zadania z rozwiazaniami.

Zaczniemy od przykładu w typie zadania 59. Z tym, że nie jest to zadanie z listy.

Zadanie.

Znaleźć ekstrema lokalne funkcji: $f(x) = x^4 - 4x^3 - 18x^2 + 108x + 11$.

Rozwiązanie:

Dziedzina funkcji: $D = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 36x + 108 = 4(x^3 - 3x^2 - 9x + 27) = 4(x-3)(x^2 - 9) =$$

$$4(x-3)(x-3)(x+3) = 4(x-3)^2(x+3)$$

Pochodna ma dwa miejsca zerowe: $x = 3$ oraz $x = -3$.

Pochodna jest wielomianem i $x = 3$ jest tego wielomianu podwójnym pierwiastkiem. Stąd f' nie zmienia znaku w pumkcie $x = 3$ i wobec tego f nie ma tu ekstremum.

Dla $x = -3$ mamy zmianę znaku: z $-$ na $+$.

Wynika stąd, ze funkcja f ma jedno ekstremum: minimum lokalne właściwe w punkcie $x = -3$.

59. i)

Znaleźć ekstrema lokalne funkcji: $f(x) = 2\operatorname{arc\,tg} x - \ln(1 + x^2)$.

To zadanie jest trochę podobne do zadania 59 d).

Rozwiązanie:

Dziedzina funkcji: $D = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 2\frac{1}{1+x^2} - 2x\frac{1}{1+x^2} = 2 \cdot \frac{1-x}{1+x^2}.$$

Stąd $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1$.

Tutaj, tak jak w zadaniu 59 d), funkcja f może mieć najwyżej jedno ekstremum lokalne.

Dla $x < 1$ mamy $f'(x) > 0$, zaś dla $x > 1$, $f'(x) < 0$. Pochodna w punkcie $x = 1$ zmienia znak z $+$ na $-$.

Podsumowując. Funkcja f ma jedno ekstremum: maksimum lokalne właściwe w punkcie $x = 1$.