1 Równania różniczkowe zwyczajne liniowe pierwszego rzędu

Równaniem różniczkowym zwyczajnym liniowym pierwszego rzędu nazywamy równanie postaci

$$x' + a(t)x = h(t), \tag{RL1}$$

gdzie $a\colon I \to \mathbb{R}$, $h\colon I \to \mathbb{R}$.

Równanie (RL1) nazywamy *liniowym jednorodnym*, gdy $h \equiv 0$. W przeciwnym przypadku równanie nazywamy *liniowym niejednorodnym.*

1.1 Zagadnienie początkowe dla równania różniczkowego liniowego pierwszego rzędu

Twierdzenie 1.1 (Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia początkowego dla równania różniczkowego liniowego pierwszego rzędu)**.** *Jeżeli funkcje a i h są ciągłe, to dla każdego punktu $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie zagadnienia początkowego*

$$\begin{cases} x' + a(t)x = h(t) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{RL1-ZP}$$

określone na całym przedziale I.

Dowód. Załóżmy, że funkcja $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ jest rozwiązaniem zagadnienia początkowego (RL1-ZP). Zatem

$$\varphi'(t) + a(t)\varphi(t) = h(t) \qquad \forall t \in I.$$

Mnożymy obie strony powyższej równości przez $e^{A(t)}$, gdzie $A(t) := \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds$, i całkujemy, otrzymując równoważną postać

$$\int_{t_0}^{t} (e^{A(s)}\varphi'(s) + a(s)e^{A(s)}\varphi(s))\, ds = \int_{t_0}^{t} e^{A(s)}h(s)\, ds \qquad \forall t \in I,$$

czyli

$$e^{A(t)}\varphi(t) - e^{A(t_0)}\varphi(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{A(s)}h(s)\, ds.$$

Ponieważ $e^{A(t_0)} = 1$, po prostych przekształceniach otrzymujemy

$$\varphi(t) = e^{-A(t)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(s)-A(t)}h(s)\,ds \tag{1.1}$$

dla wszystkich $t \in I$.

We wszystkich dokonywanych przekształceniach mamy w istocie równoważności, zatem funkcja określona wzorem (1.1) jest rozwiązaniem zagadnienia początkowego (RL1-ZP) na I. $\square$

Z dowodu twierdzenia wynika, że rozwiązanie zagadnienia początkowego (RL1-ZP) można zapisać w postaci

$$\varphi(t) = x_0 \exp\Bigl(-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\Bigr) + \int_{t_0}^{t} \exp\Bigl(-\int_{s}^{t} a(\tau)\,d\tau\Bigr)h(s)\,ds.$$

1.2 Struktura rozwiązań równania różniczkowego liniowego pierwszego rzędu

Rozważmy równanie różniczkowe liniowe jednorodne pierwszego rzędu

$$x' + a(t)x = 0, \tag{RLJ1}$$

Rozwiązanie równania (RLJ1) równe stale zero nazywamy *rozwiązaniem trywialnym*.

Lemat 1.2. *Załóżmy, że* $a\colon I \to \mathbb{R}$ *jest funkcją ciągłą. Wówczas dla każdego rozwiązania* $\varphi(\cdot)$ *zachodzi następująca alternatywa: albo* $\varphi \equiv 0$ *na* I*, albo* $\varphi(t) \neq 0$ *dla każdego* $t \in I$.

Dowód. Wystarczy wykazać, że jeśli istnieje $t_0 \in I$ takie, że $\varphi(t_0) = 0$, to $\varphi \equiv 0$. Istotnie, funkcja $\varphi(\cdot)$ jest rozwiązaniem zagadnienia początkowego

$$\begin{cases} x' + a(t)x = 0 \\ x(t_0) = 0. \end{cases}$$

Rzecz jasna, funkcja stale równa 0 też spełnia powyższe zagadnienie początkowe. Zatem, na podstawie jednoznaczności rozwiązania zagadnienia początkowego (Twierdzenie 1.1), funkcje te są identyczne. $\square$

Twierdzenie 1.3. *Zbiór wszystkich rozwiązań równania różniczkowego liniowego jednorodnego pierwszego rzędu* (RLJ1)*, gdzie* $a\colon I \to \mathbb{R}$ *jest funkcją ciągłą, tworzy przestrzeń liniową* (*nad ciałem liczb rzeczywistych*) *wymiaru* 1.

Dowód. Oznaczmy zbiór rozwiązań równania (RLJ1) przez $\mathbb{S}$. To, że $\mathbb{S}$ jest przestrzenią liniową, jest (niemal) oczywiste. Ustalmy $t_0 \in I$, i oznaczmy przez $\mathcal{R}$ odwzorowanie liniowe przyporządkowujące rozwiązaniu $\varphi(\cdot)$ równania (RLJ1) jego wartość w t_0. Z Twierdzenia 1.1 wynika, że $\mathcal{R}$ jest różnowartościowe i „na", zatem jest izomorfizmem przestrzeni liniowych $\mathbb{S}$ i $\mathbb{R}$. □

Wniosek (Rozwiązanie ogólne równania różniczkowego liniowego jednorodnego pierwszego rzędu)**.** *Zbiór wszystkich rozwiązań równania* (RLJ1) *można zapisać w postaci*

$$\varphi(\cdot; C) = C\varphi_0(\cdot), \tag{1.2}$$

gdzie $C \in \mathbb{R}$ jest dowolną stałą, zaś φ_0 jest ustalonym nietrywialnym rozwiązaniem równania (RLJ1)*.*

Wzór (1.2) nazywamy *rozwiązaniem ogólnym równania liniowego jednorodnego pierwszego rzędu* (RLJ1).

Rozważmy równanie różniczkowe liniowe niejednorodne pierwszego rzędu

$$x' + a(t)x = h(t). \tag{RLN1}$$

Równanie różniczkowe liniowe jednorodne pierwszego rzędu

$$x' + a(t)x = 0$$

nazywamy równaniem *stowarzyszonym* z (RLN1).

Poniższy wynik jest oczywisty.

Twierdzenie 1.4 (Rozwiązanie ogólne równania różniczkowego liniowego niejednorodnego pierwszego rzędu)**.** *Niech $\psi(\cdot)$ będzie ustalonym rozwiązaniem równania różniczkowego liniowego niejednorodnego pierwszego rzędu* (RLN1)*, gdzie $a\colon I \to \mathbb{R}$ i $h\colon I \to \mathbb{R}$ są funkcjami ciągłymi, i niech $\varphi_0(\cdot)$ będzie ustalonym nietrywialnym rozwiązaniem równania stowarzyszonego. Wówczas każde rozwiązanie równania różniczkowego liniowego niejednorodnego* (RLN1) *można jednoznacznie zapisać w postaci*

$$\varphi(\cdot; C) = C\varphi_0(\cdot) + \psi(\cdot) \tag{1.3}$$

gdzie $C \in \mathbb{R}$.

Wzór (1.3) nazywamy *rozwiązaniem ogólnym równania różniczkowego liniowego niejednorodnego pierwszego rzędu.* Stosując terminologię z algebry liniowej, można powiedzieć, że *zbiór rozwiązań równania liniowego niejednorodnego pierwszego rzędu jest przestrzenią afiniczną* (*nad ciałem liczb rzeczywistych*) *wymiaru* 1.

W praktyce, rozwiązanie ogólne równania liniowego niejednorodnego pierwszego rzędu

$$x' + a(t)x = h(t) \tag{RLN1}$$

otrzymuje się, mnożąc obie jego strony przez funkcję $e^{A(t)}$, gdzie $A(\cdot)$ jest pewną (ustaloną) funkcją pierwotną funkcji $a(\cdot)$. Otrzymujemy

$$e^{A(t)}x'(t) + a(t)e^{A(t)}x(t) = e^{A(t)}h(t),$$

czyli

$$\frac{d}{dt}(e^{A(t)}x(t)) = e^{A(t)}h(t),$$

co po nałożeniu na obie strony całki nieoznaczonej i oczywistych przekształceniach daje

$$x(t) = e^{-A(t)} \int e^{A(t)}h(t)\, dt.$$

Funkcję $e^{A(\cdot)}$ nazywamy *czynnikiem całkującym* równania (RLN1).

Przykład. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania różniczkowego liniowego niejednorodnego

$$x' + tx = te^{t^2/2}.$$

Mnożąc obie strony równania przez czynnik całkujący $e^{t^2/2}$, otrzymujemy

$$(e^{t^2/2}x)' = te^{t^2},$$

co daje

$$e^{t^2/2}x = \tfrac{1}{2}e^{t^2} + C,$$

czyli

$$x = \tfrac{1}{2}e^{t^2/2} + Ce^{-t^2/2}.$$

1.3 Równania różniczkowe Bernoulliego

Równaniem różniczkowym Bernoulliego [1] *nazywamy równanie postaci*

$$x' + a(t)x = h(t)x^p, \quad p \neq 0,\ p \neq 1,\ h \not\equiv 0. \tag{RB}$$

[1] Jakob Bernoulli (1654 – 1705), matematyk i fizyk szwajcarski

Fakt 1.5. *Przy pomocy podstawienia* $u := x^{1-p}$ *równanie różniczkowe Bernoulliego* (RB) *sprowadza się do równania różniczkowego liniowego niejednorodnego.*

Uzasadnienie. Różniczkując u po t, otrzymujemy

$$u' = (1-p)x^{-p}x'.$$

Podstawienie powyższego wyrażenia do (RB) daje równanie liniowe niejednorodne

$$u' + (1-p)a(t)u = (1-p)h(t).$$

□

Zauważmy jednak, że niekiedy przy pomocy powyższego podstawienia nie daje się otrzymać wszystkich rozwiązań danego równania Bernoulliego. Aby się o tym przekonać, rozważmy następujące równanie różniczkowe Bernoulliego:

$$x' = 2\sqrt{x}. \tag{1.4}$$

Łatwo zauważyć, że funkcja

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} 0 & \textit{dla } t \in (-\infty, 0] \\ t^2 & \textit{dla } t \in [0, \infty) \end{cases}$$

jest rozwiązaniem równania (1.4).

Po dokonaniu podstawienia $u = \sqrt{x}$ *otrzymujemy równanie liniowe niejednorodne*

$$u' = 1, \tag{1.5}$$

którego każde rozwiązanie ma postać $t + C$, $t \in (-\infty, \infty)$. *Rozwiązaniu* φ_1 *równania* (1.4) *odpowiada rozwiązanie* $\psi(t) = t$ *równania* (1.5), lecz tylko na przedziale $[0, \infty)$.

Z drugiej strony, rozwiązanie $\varphi_2 \equiv 0$ *równania* (1.4) *nie odpowiada* żadnemu *rozwiązaniu równania* (1.5).