

## 10 Pola wektorowe. Potoki. Stabilność. Układy dysypatywne. Atraktory dziwne.

### 10.1 Pola wektorowe

Zakładamy, że  $D \subset \mathbb{R}^n$  jest obszarem (tzn. zbiorem otwartym i spójnym).

*Polem wektorowym*  $\mathbf{f}$  określonym na obszarze  $D$  nazywamy przyporządkowanie każdemu punktowi  $\mathbf{x} \in D$   $n$ -wymiarowego wektora  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  zaczepionego w punkcie  $\mathbf{x}$ . Ponieważ punkt  $z \in D$  jest zadany przez  $n$  współrzędnych, zatem może być utożsamiony z uporządkowaną  $n$ -tką liczb rzeczywistych. Podobnie, wektor można też utożsamzić z uporządkowaną  $n$ -tką liczb rzeczywistych (współrzędnych wektora). Zatem pole wektorowe to funkcja wektorowa z  $D$  w  $\mathbb{R}^n$ . Mówimy, że pole wektorowe  $\mathbf{f}$  jest ciągłe, lokalnie lipschitzowskie, różniczkowalne, klasy  $C^k$ , itp., gdy funkcja wektorowa  $\mathbf{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  jest ciągła, lokalnie lipschitzowska, różniczkowalna, klasy  $C^k$ , itp.

Niech  $\mathbf{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  będzie polem wektorowym. Załóżmy, że  $\varphi: (\alpha, \beta) \rightarrow D$  jest rozwiązaniem układu

$$(UA) \quad \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

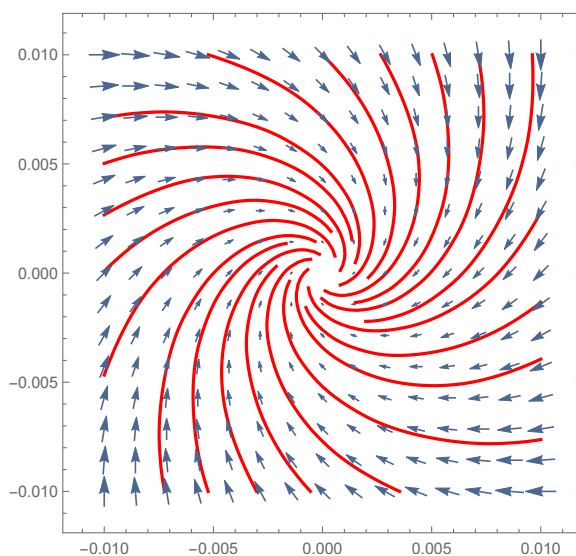
równań różniczkowych. Pochodna tej funkcji w punkcie  $t \in (\alpha, \beta)$ ,  $\varphi'(t)$ , jest to wektor  $\mathbf{f}(\varphi(t))$ . Zatem rozwiązanie układu (UA) to różniczkowalna funkcja wektorowa  $\varphi$  taka, że dla każdej chwili  $t$  pochodna tej funkcji to wektor pola wektorowego zaczepiony w punkcie będącym wartością tej funkcji w chwili  $t$ .

Dla pola wektorowego  $\mathbf{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , klasy  $C^1$ , i punktu  $\mathbf{x}_0 \in D$  oznaczmy przez  $\varphi(\cdot; \mathbf{x}_0): (\tau_{\min}(\mathbf{x}_0), \tau_{\max}(\mathbf{x}_0)) \rightarrow D$  nieprzedłużalne rozwiązanie układu równań różniczkowych  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  spełniające warunek początkowy  $\varphi(0) = \mathbf{x}_0$ . W języku pól wektorowych, odwzorowanie

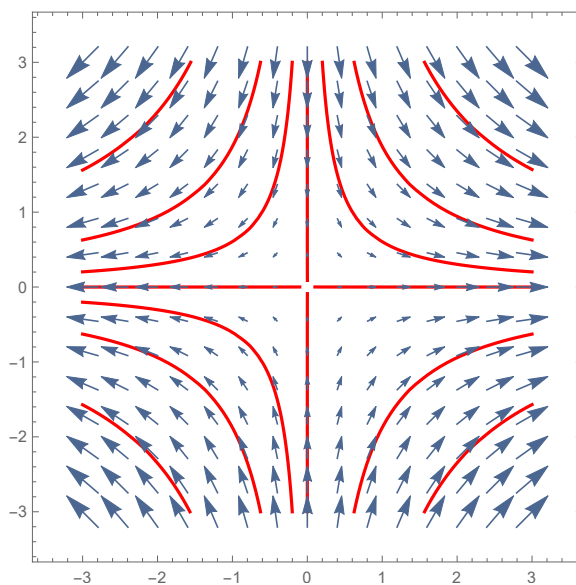
$$[(\tau_{\min}(\mathbf{x}_0), \tau_{\max}(\mathbf{x}_0)) \ni t \mapsto \varphi(\cdot; \mathbf{x}_0) \in D]$$

nazywamy *trajektorią* pola wektorowego przechodzącą przez punkt  $\mathbf{x}_0 \in D$ , zaś obraz tego odwzorowania to *orbita* punktu  $\mathbf{x}_0$  (lub *krzywa fazowa*) pola  $\mathbf{f}$  przechodząca przez punkt  $\mathbf{x}_0$  (niekiedy to odwzorowanie nazywa się *ruchem*, a jego obraz trajektorią).

Poniżej umieszczono kilka ilustracji pól wektorowych (**niebieskie**) i krzywych fazowych (**czerwone**).



$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$



$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Na wstępie wykażemy pomocniczy

**Lemat 10.1.** Załóżmy, że  $\mathbf{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  będzie polem wektorowym klasy  $C^1$ . Niech  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in D$  (niekoniecznie różne) i  $t_1 \in (\tau_{\min}(\mathbf{x}_0), \tau_{\max}(\mathbf{x}_0))$  będą takie,

że

$$\varphi(t_1; \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_1.$$

Wówczas funkcja przesunięta  $\varphi(\cdot + t_1; \mathbf{x}_0): (\tau_{\min}(\mathbf{x}_0) - t_1, \tau_{\max}(\mathbf{x}_0) - t_1) \rightarrow D$  jest trajektorią punktu  $\mathbf{x}_1$ .

*Dowód.* Zauważmy, że zarówno  $\varphi(\cdot; \mathbf{x}_1)$  jak i  $\varphi(\cdot + t_1; \mathbf{x}_0)$  są nieprzedłużalnymi rozwiązaniami zagadnienia początkowego

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_1. \end{cases}$$

Na podstawie jednoznaczności nieprzedłużalnego rozwiązania zagadnienia początkowego odwzorowania te pokrywają się.  $\square$

**Twierdzenie 10.2.** Niech  $\mathbf{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  będzie polem wektorowym klasy  $C^1$ . Wówczas dla punktu  $\mathbf{x}_0 \in D$  mogą zachodzić trzy wzajemnie wykluczające się przypadki:

- (1) Trajektoria punktu  $\mathbf{x}_0$  jest funkcją stałą. (Punkt taki nazywamy punktem stacjonarnym, punktem równowagi lub położeniem równowagi.) Punkty stacjonarne odpowiadają miejscom zerowym pola wektorowego  $\mathbf{x}_0$ .
- (2) Trajektoria punktu  $\mathbf{x}_0$  jest (niestałą) funkcją okresową, o okresie podstawowym  $T > 0$ . (Punkt taki nazywamy punktem okresowym dla pola wektorowego  $\mathbf{f}$ , a jego orbitę nazywamy orbitą okresową.)
- (3) Trajektoria punktu  $\mathbf{x}_0$  jest funkcją różnowartościową. (Punkt taki nazywamy punktem nieokresowym dla pola wektorowego  $\mathbf{f}$ .)

W przypadku (2), oznaczmy przez  $\mathbb{T}$  okrąg sparametryzowany w następujący sposób:

$$\mathbb{T} = \{ (\cos \vartheta, \sin \vartheta) : \vartheta \in [0, 2\pi] \}.$$

Wówczas odwzorowanie

$$[\mathbb{T} \ni z = (\cos \vartheta, \sin \vartheta) \mapsto \varphi\left(\frac{T}{2\pi}\vartheta, \mathbf{x}_0\right)]$$

jest homeomorfizmem okręgu  $\mathbb{T}$  na orbitę punktu  $\mathbf{x}_0$ .

*Dowód.* Ustalmy  $\mathbf{x}_0 \in D$ .

Załóżmy, że istnieją takie  $t_1, t_2 \in (\tau_{\min}(\mathbf{x}_0), \tau_{\max}(\mathbf{x}_0))$ , że  $t_1 < t_2$  oraz  $\varphi(t_1; \mathbf{x}_0) = \varphi(t_2; \mathbf{x}_0) =: \mathbf{x}_1$ . Z Lematu 10.1 wynika, że odwzorowania  $\varphi(\cdot; \mathbf{x}_0)$  i  $\varphi(\cdot + t_2 - t_1; \mathbf{x}_0)$  pokrywają się, skąd wynika, po pierwsze, że  $\tau_{\min}(\mathbf{x}_0) = -\infty$

i  $\tau_{\min}(\mathbf{x}_0) = \infty$ , po drugie, że jest to funkcja okresowa o okresie (niekoniecznie podstawowym)  $t_2 - t_1$ .

Rozważmy zbiór

$$G := \{ t \in \mathbb{R} : \varphi(t; \mathbf{x}_1) = \mathbf{x}_1 \}.$$

Twierdzymy, że  $G$  jest grupą ze względu na dodawanie. To, że  $0 \in G$ , jest oczywiste. Niech  $\vartheta_1, \vartheta_2 \in G$ . Z Lematu 10.1 wynika, że odwzorowania  $\varphi(\cdot; \mathbf{x}_1)$  i  $\varphi(\cdot + \vartheta_2; \mathbf{x}_1)$  pokrywają się, w szczególności,  $\varphi(\vartheta_1 + \vartheta_2; \mathbf{x}_1) = \varphi(\vartheta_1; \mathbf{x}_1) = \mathbf{x}_1$ . Dalej, niech  $\vartheta \in G$ . Z Lematu 10.1 wynika, że odwzorowania  $\varphi(\cdot; \mathbf{x}_1)$  i  $\varphi(\cdot - \vartheta; \mathbf{x}_1)$ , pokrywają się, w szczególności,  $\varphi(-\vartheta; \mathbf{x}_1) = \varphi(0; \mathbf{x}_1) = \mathbf{x}_1$ .

Zbiór  $G$  jest zbiorem domkniętym: istotnie, niech  $(\vartheta_k)_{k=1}^{\infty} \subset G$  będzie ciągiem zbieżnym do  $t \in \mathbb{R}$ . Skoro  $\varphi(\vartheta_k; \mathbf{x}_1) = \mathbf{x}_1$  dla każdego  $k \in \mathbb{N}$ , z ciągłości odwzorowania  $\varphi(\cdot; \mathbf{x}_1)$  wynika, że  $\varphi(t; \mathbf{x}_1) = \mathbf{x}_1$ , zatem  $t \in G$ .

Korzystamy teraz z wyniku mówiącego, że dla domkniętej podgrupy  $G$  addytywnej grupy liczb rzeczywistych  $(\mathbb{R}, +, 0)$  zachodzą następujące trzy (wzajemnie wykluczające się) przypadki:

- (i)  $G = \mathbb{R}$ .
- (ii) Istnieje  $T > 0$  takie, że  $G = \{ kT : k \in \mathbb{Z} \}$ .
- (iii)  $G = \{0\}$ .

W przypadku (i), trajektoria jest funkcją stałą:  $\varphi(t; \mathbf{x}_1) = \mathbf{x}_1$  dla każdego  $t \in \mathbb{R}$ . Ale, znów na podstawie jednoznaczności,  $\varphi(-t_1; \mathbf{x}_1) = \mathbf{x}_0$ , zatem  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1$ .

Przypadek (iii) jest wykluczony, gdyż z Lematu 10.1 wynika, że  $G$  zawiera  $t_2 - t_1 \neq 0$ .

W przypadku (ii), z Lematu 10.1 wynika, że trajektoria punktu  $\mathbf{x}_1$ , a zatem i trajektoria punktu  $\mathbf{x}_0$ , jest funkcją okresową, o okresie  $T$  (zauważmy, że nie wiemy jeszcze, czy  $T$  jest okresem podstawowym!). Chcemy stwierdzić, czy odwzorowanie

$$(10.1) \quad [\mathbb{T} \ni (\cos \vartheta, \sin \vartheta) \mapsto \varphi\left(\frac{T}{2\pi}\vartheta; \mathbf{x}_0\right) \in D]$$

jest dobrze określone. Jedyne punkty, w którym może coś się „psuć”, to  $(1, 0)$ , odpowiadający  $\vartheta = 0$  i  $\vartheta = 2\pi$ . Lecz wtedy  $\varphi\left(\frac{T}{2\pi}0; \mathbf{x}_0\right) = \varphi(0; \mathbf{x}_0) = \varphi(T; \mathbf{x}_0) = \varphi\left(\frac{T}{2\pi}2\pi; \mathbf{x}_0\right)$ . Twierdzymy, że odwzorowanie (10.1) jest różnowartościowe. Załóżmy nie wprost, że  $0 \leq \vartheta_1 < \vartheta_2 \leq 2\pi$  są takie, że  $T_1 := \vartheta_2 - \vartheta_1 < T$  oraz  $\varphi\left(\frac{T}{2\pi}\vartheta_1; \mathbf{x}_0\right) = \varphi\left(\frac{T}{2\pi}\vartheta_2; \mathbf{x}_0\right)$ . Powtarzając poprzednie rozumowanie dochodzimy do wniosku, że  $G = \{ kT_1 : k \in \mathbb{Z} \}$ . Otrzymana

sprzeczność pokazuje, że odwzorowanie (10.1) jest różnowartościowe. Przy okazji otrzymaliśmy, że  $T$  jest okresem podstawowym.

Ciągłość odwzorowania (10.1) jest oczywista. Teraz wykorzystujemy znany fakt z topologii, że odwzorowanie ciągle i różnowartościowe przestrzeni metrycznej zwartej jest homeomorfizmem na swój obraz.  $\square$

Obszar  $D$  nazywamy *przestrzenią fazową*, zaś rozkład przestrzeni fazowej na krzywe fazowe to *portret fazowy*.

## 10.2 Pola wektorowe zupełne

Pole wektorowe  $\mathbf{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , klasy  $C^1$ , nazywamy *zupełnym*, jeżeli każde rozwiązanie nieprzedłużalne układu (UA) jest określone na całej prostej  $(-\infty, \infty)$ .

W przypadku, gdy  $D = \mathbb{R}^n$ , mamy prosty warunek dostateczny zupełności pola  $\mathbf{f}$ :

**Lemat 10.3.** *Założmy, że  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  jest polem wektorowym klasy  $C^1$ , dla którego istnieją stałe  $A, B \geq 0$  takie, że  $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leq A + B\|\mathbf{x}\|$  dla każdego  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Wówczas  $\mathbf{f}$  jest zupełnym polem wektorowym.*

*Dowód.* Jest to wniosek z Twierdzenia 7.2.  $\square$

Założmy, że  $\mathbf{f}: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  jest zupełnym polem wektorowym klasy  $C^1$ .

Dla  $\mathbf{x}_0 \in D$ , oznaczmy przez  $\varphi(\cdot; \mathbf{x}_0)$  (jedyne) rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \end{cases}$$

Na podstawie Twierdzenia Picarda–Lindelöfa (Tw. 6.2) funkcja powyższa jest dobrze określona.

**Twierdzenie 10.4.** *Niech  $\mathbf{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  będzie zupełnym polem wektorowym klasy  $C^1$ . Wówczas zachodzą następujące własności:*

- (i)  $\varphi(0; \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ , dla każdego  $\mathbf{x}_0 \in D$ ,
- (ii)  $\varphi(t; \varphi(s; \mathbf{x}_0)) = \varphi(t + s; \mathbf{x}_0)$  dla wszystkich  $s, t \in \mathbb{R}$  i  $\mathbf{x}_0 \in D$ ,
- (iii)  $\varphi(-t; \varphi(t; \mathbf{x}_0)) = \mathbf{x}_0$  dla wszystkich  $t \in \mathbb{R}$  i  $\mathbf{x}_0 \in D$ .

*Dowód.* Część (i) jest oczywista.

Aby wykazać (ii), ustalmy  $\mathbf{x}_0 \in D$  i  $s \in \mathbb{R}$ . Wykorzystując wzór na pochodną funkcji złożonej widzimy, że funkcja wektorowa

$$[\mathbb{R} \ni t \mapsto \varphi(t + s; \mathbf{x}_0) \in D]$$

jest rozwiązaniem układu (UA). Oznaczmy  $\mathbf{y}_0 := \varphi(s; \mathbf{x}_0)$ . Funkcja powyższa jest zatem rozwiązaniem zagadnienia początkowego

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{y}_0, \end{cases}$$

zatem, na postawie jednoznaczności,

$$\varphi(t + s; \mathbf{x}_0) = \varphi(t; \varphi(s; \mathbf{x}_0))$$

dla wszystkich  $t \in \mathbb{R}$ .

Część (iii) jest wnioskiem z (i) i (ii). □

### 10.3 Definicja potoku (abstrakcyjnego)

*Potokiem* na przestrzeni metrycznej  $X$  nazywamy odwzorowanie ciągłe  $\Phi: \mathbb{R} \times X \rightarrow X$  spełniające następujące warunki:

- (1)  $\Phi(0, x) = x$  dla każdego  $x \in X$ .
- (2)  $\Phi(s + t, x) = \Phi(s, \Phi(t, x))$  dla wszystkich  $s, t \in \mathbb{R}$  i  $x \in X$ .
- (3)  $\Phi(-t, \Phi(t, x)) = x$  dla wszystkich  $t \in \mathbb{R}$  i  $x \in X$ .

Dla  $t \in \mathbb{R}$  oznaczmy  $\Phi_t(\cdot) := \Phi(t, \cdot)$ . Warunki (1)–(3) przybierają teraz postać:

- (1')  $\Phi_0 = \text{Id}_X$ ,
- (2')  $\Phi_s \circ \Phi_t = \Phi_{s+t}$  dla wszystkich  $s, t \in \mathbb{R}$ ,
- (3') dla każdego  $t \in \mathbb{R}$  odwzorowanie  $\Phi_t$  jest odwracalne, i zachodzi  $(\Phi_t)^{-1} = \Phi_{-t}$ .

Z warunków (1')–(3') wynika następujący fakt:

*Odwzorowanie*

$$[\mathbb{R} \ni t \mapsto \Phi_t \in \text{Hom}(X)]$$

jest homomorfizmem grupy  $(\mathbb{R}, +, 0)$  w grupę  $(\text{Hom}(X), \circ, \text{Id}_X)$ , gdzie  $\text{Hom}(X)$  oznacza zbiór wszystkich homeomorfizmów przestrzeni metrycznej  $X$  na siebie.

## 10.4 Potok fazowy zupełnego pola wektorowego.

Dla zupełnego pola wektorowego  $\mathbf{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  klasy  $C^1$  zdefiniujemy odwzorowanie  $\Phi: \mathbb{R} \times D \rightarrow D$  wzorem:

$$\Phi(t, \mathbf{x}) := \varphi(t; \mathbf{x}), \quad t \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in D.$$

Twierdzenie 10.4 mówi nam, że tak zdefiniowane  $\Phi$  spełnia własności (1), (2) i (3) potoku na przestrzeni metrycznej  $D$ .

Pozostaje jeszcze kwestia ciągłości odwzorowania  $\Phi$ . Ponieważ rozwiązanie zagadnienia początkowego otrzymuje się jako punkt stały pewnego odwzorowania zewężającego, idea dowodu ciągłej zależności jest dosyć prosta, niemniej sprawdzenie wszystkiego wymaga przeprowadzenia wielu raczej żmudnych rachunków.

Otrzymane powyżej odwzorowanie  $\Phi$  nazywamy *potokiem generowanym przez (zupełne) pole wektorowe  $\mathbf{f}$* , lub *potokiem fazowym pola wektorowego  $\mathbf{f}$* .

## 10.5 Klasyfikacja punktów stacjonarnych dla liniowych pól wektorowych na płaszczyźnie

Rozważmy liniowe pole wektorowe

$$(10.2) \quad \mathbf{x}' = A\mathbf{x},$$

gdzie  $\mathbf{x} = \text{col}(x, y)$  i

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Punkt  $\mathbf{0} = \text{col}(0, 0)$  jest punktem stacjonarnym.

Oznaczmy  $\Delta := (\text{tr } A)^2 - 4 \det A$ .

Na początku założmy, że  $\det A \neq 0$ .

- **Przypadek  $\Delta > 0$ .**

Wówczas macierz  $A$  ma dwie różne rzeczywiste wartości własne,  $\lambda_1 < \lambda_2$ . Poprzez odpowiednią zmianę bazy układ (10.2) można sprowadzić do postaci

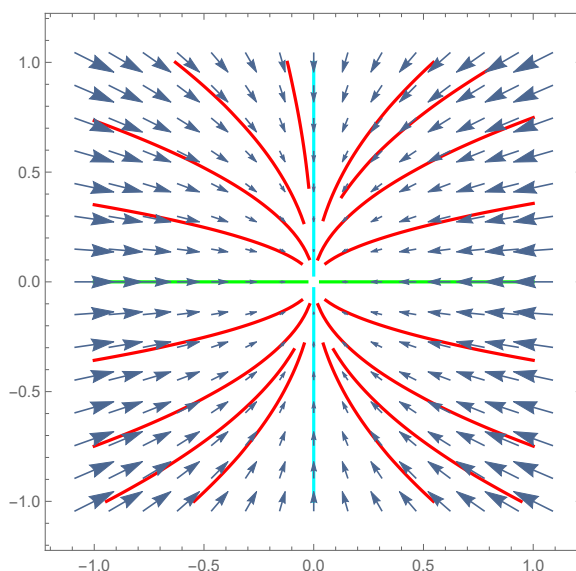
$$\boldsymbol{\xi}' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{\xi},$$

gdzie  $\boldsymbol{\xi} = \text{col}(\xi, \eta)$ , którego rozwiązania mają postać

$$\xi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad \eta(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

– **Podprzypadek**  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ .

Wówczas krzywe fazowe w otoczeniu początku układu wyglądają jak na poniższym rysunku (na tym i dalszych rysunkach, niebieskie strzałki oznaczają wektory pola,  **czerwone**  krzywe to „typowe” krzywe fazowe, zaś linie w kolorach  **zielonym**  i  **niebieskozielonym**  oznaczają pewne wyróżnione krzywe fazowe).

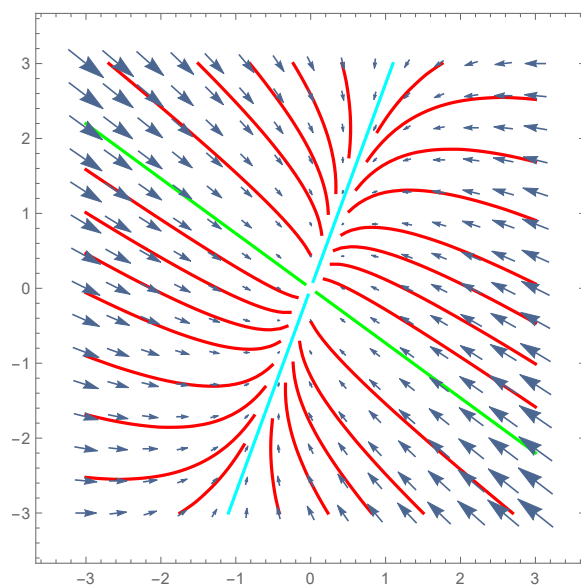


Pole wektorowe i krzywe fazowe dla układu  $\xi' = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \xi$

Taki punkt stacjonarny  $\mathbf{0}$  jest przykładem *węzła stabilnego*.

Zauważmy, że zmiana współrzędnych  $\mathbf{x} \leftrightarrow \xi$  odpowiada złożeniu rozciągnięcia w dwóch wzajemnie prostopadłych kierunkach, obrotu i ewentualnie odbicia. Zatem, w wyjściowych współrzędnych węzeł stabilny może wyglądać jak na poniższej ilustracji.

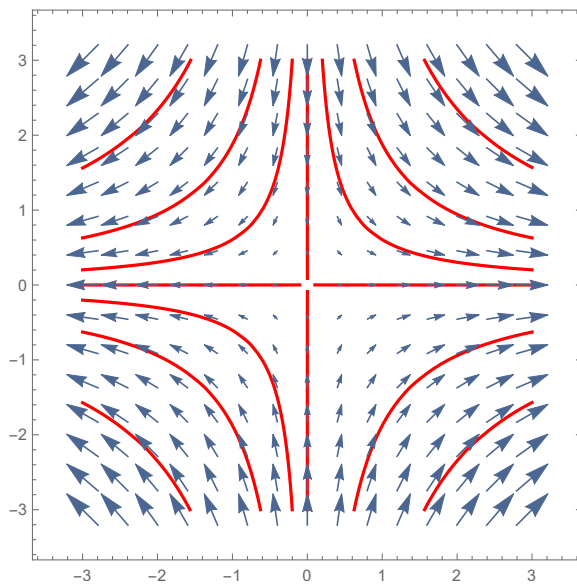




Pole wektorowe i krzywe fazowe dla układu  $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -2 & 1/2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

– **Podprzypadek**  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ .

Wówczas krzywe fazowe w otoczeniu początku układu wyglądają jak na poniższym rysunku.

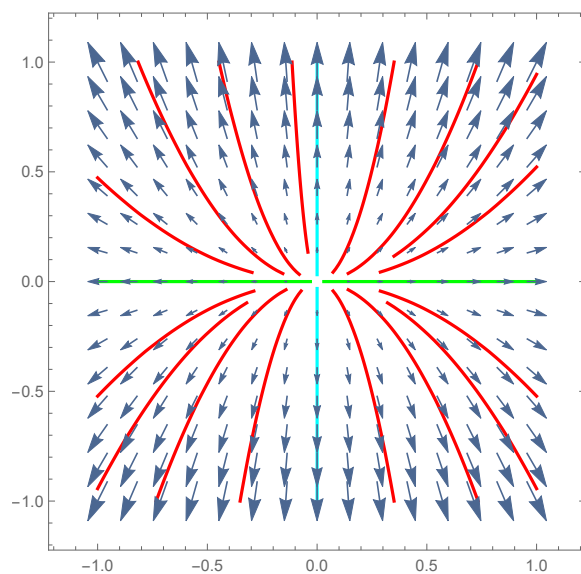


Pole wektorowe i krzywe fazowe dla układu  $\xi' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \xi$

Taki punkt stacjonarny  $\mathbf{0}$  jest przykładem *siodła*.

– **Podprzypadek**  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ .

Wówczas krzywe fazowe w otoczeniu początku układu wyglądają jak na poniższym rysunku.



Pole wektorowe i krzywe fazowe dla układu  $\xi' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \xi$

Taki punkt stacjonarny  $\mathbf{0}$  jest przykładem *węzła niestabilnego*.

**Przypadek  $\Delta < 0$ .**

Wówczas macierz  $A$  ma zespolone sprzężone wartości własne,  $\alpha \pm \beta i$ ,  $\beta \neq 0$ . Poprzez odpowiednią zmianę bazy układ (10.2) można sprowadzić do postaci

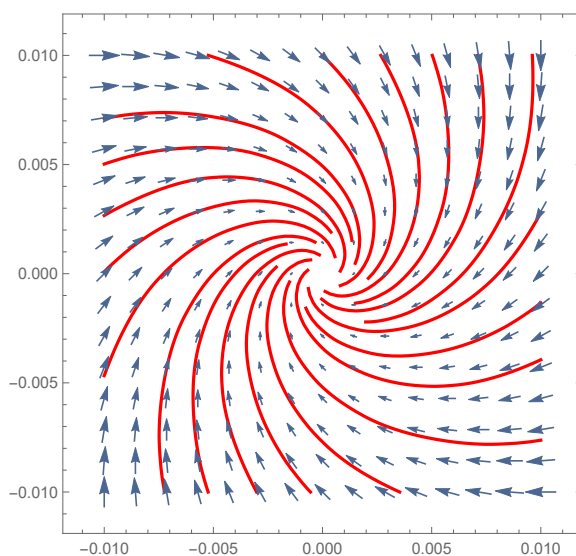
$$\xi' = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \xi,$$

którego rozwiązania mają, we współrzędnych biegunowych, postać

$$r(t) = r_0 e^{\alpha t} \quad \varphi(t) = \varphi_0 + \beta t.$$

– **Podprzypadek  $\alpha < 0$ .**

Wówczas krzywe fazowe w otoczeniu początku układu wyglądają jak na poniższym rysunku.

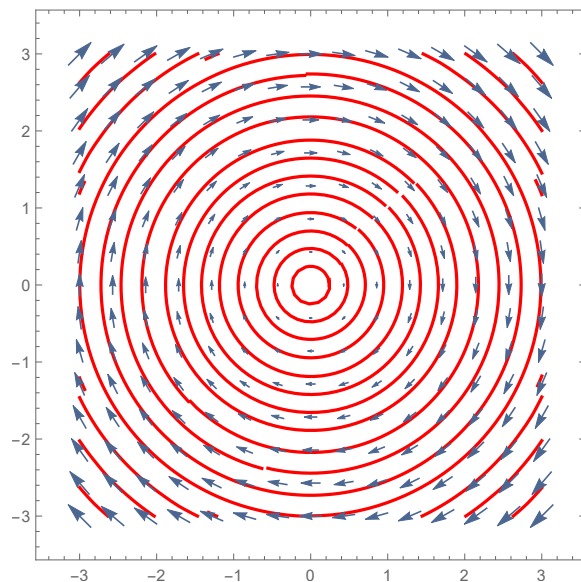


Pole wektorowe i krzywe fazowe dla układu  $\xi' = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \xi$

Taki punkt stacjonarny  $\mathbf{0}$  jest przykładem *ogniska stabilnego*.

– **Podprzypadek**  $\alpha = 0$ .

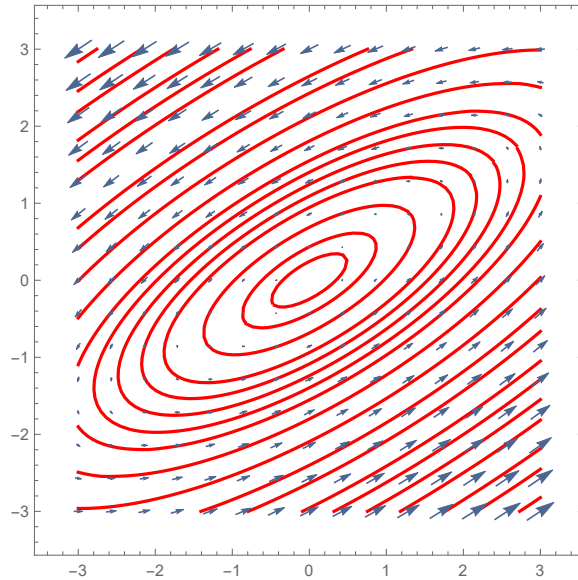
Wówczas krzywe fazowe w otoczeniu początku układu wyglądają jak na poniższym rysunku.



Pole wektorowe i krzywe fazowe dla układu  $\xi' = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \xi$

Taki punkt stacjonarny  $\mathbf{0}$  jest przykładem *środka*.

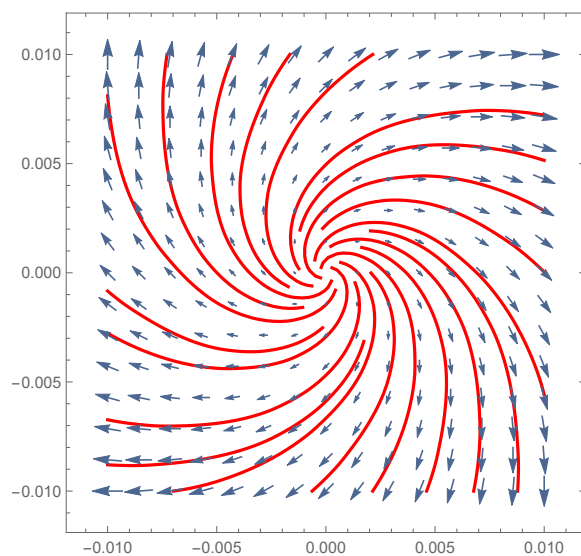
I w wyjściowych współrzędnych:



Pole wektorowe i krzywe fazowe dla układu  $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

– **Podprzypadek**  $\alpha > 0$ .

Wówczas krzywe fazowe w otoczeniu początku układu wyglądają jak na poniższym rysunku.



Pole wektorowe i krzywe fazowe dla układu  $\xi' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \xi$

Taki punkt stacjonarny  $\mathbf{0}$  jest przykładem *ogniska niestabilnego*.

- **Przypadek  $\Delta = 0$ .**

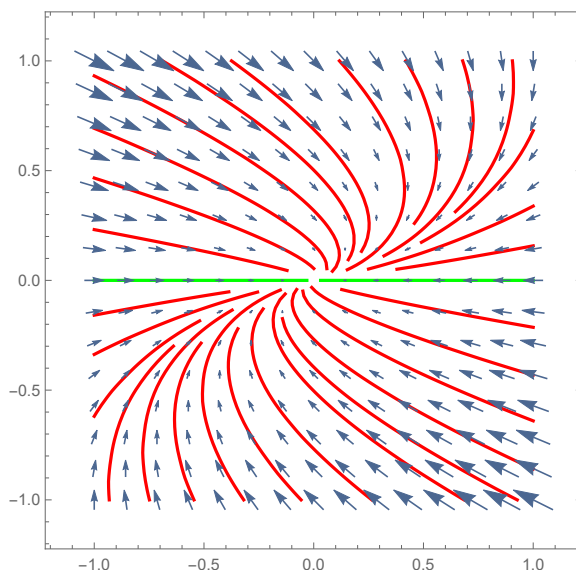
Wówczas macierz  $A$  ma podwójną rzeczywistą wartość własną  $\lambda$ . Po-  
przez odpowiednią zmianę bazy układ (10.2) można sprowadzić do po-  
staci

$$\xi' = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \xi,$$

albo do postaci

$$\xi' = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \xi.$$

W pierwszym przypadku krzywe fazowe wyglądają jak na poniższym  
rysunku.

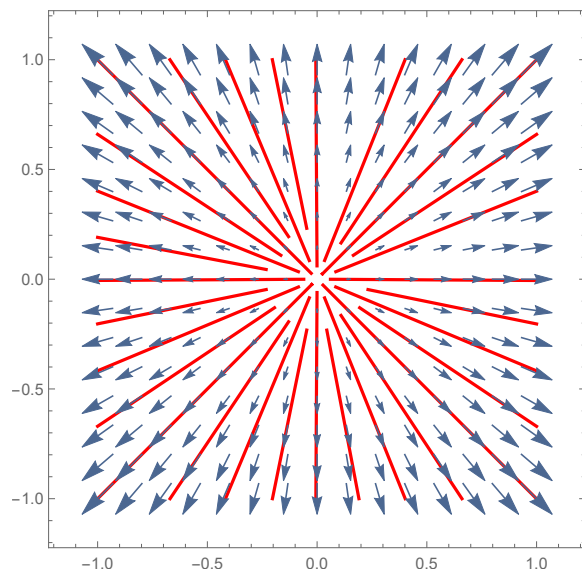


Pole wektorowe i krzywe fazowe dla układu  $\xi' = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \xi$

Taki punkt stacjonarny  $\mathbf{0}$  jest przykładem *węzła zdegenerowanego* (*stabilnego* gdy  $\lambda < 0$  i *niestabilnego* gdy  $\lambda > 0$ ).



W drugim przypadku krzywe fazowe wyglądają jak na poniższym rysunku.



Pole wektorowe i krzywe fazowe dla układu  $\xi' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xi$

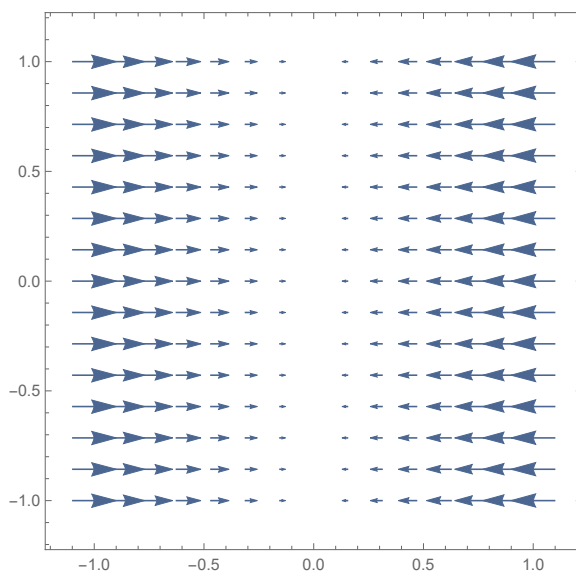
Taki punkt stacjonarny  $\mathbf{0}$  jest przykładem *węzła gwiazdzistego* (*stabilnego* gdy  $\lambda < 0$  i *niestabilnego* gdy  $\lambda > 0$ ).

A co się dzieje, gdy 0 jest wartością własną macierzy  $A$ ?

Jeśli jest pojedynczą, to poprzez odpowiednią zmianę bazy układ (10.2) można sprowadzić do postaci

$$\xi' = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xi,$$

gdzie  $\lambda \neq 0$ . Pole wektorowe wygląda wtedy jak na poniższym rysunku.



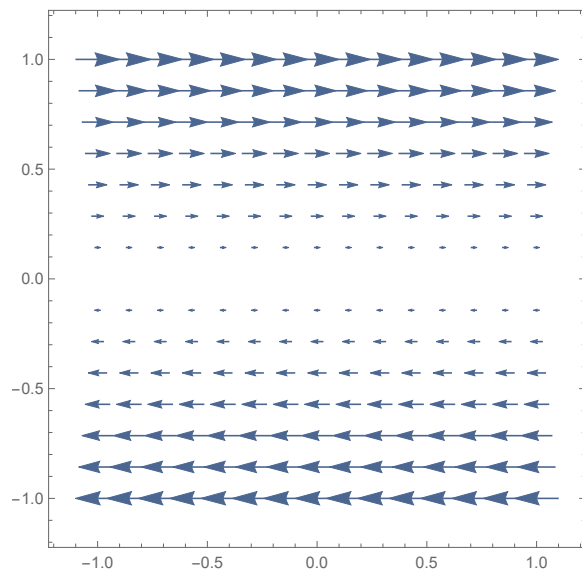
Pole wektorowe dla układu  $\xi' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xi$

(oś pionowa złożona jest z punktów stacjonarnych).

Jeśli zaś 0 jest podwójną wartością własną macierzy, to układ 10.2 albo sprowadza się do postaci

$$\xi' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xi,$$

i wtedy pole wektorowe wygląda jak na poniższym rysunku:



Pole wektorowe dla układu  $\xi' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xi$

(oś pozioma złożona jest z punktów stacjonarnych),

albo do postaci

$$\boldsymbol{\xi}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\xi},$$

i wówczas cała płaszczyzna złożona jest z punktów stacjonarnych.

## 10.6 Stabilność punktów stacjonarnych.

W bieżącym podrozdziale niech  $\mathbf{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  będzie polem wektorowym (niekoniecznie zupełnym) klasy  $C^1$  na obszarze  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Dla  $\mathbf{x}_0 \in D$  oznaczmy przez  $\boldsymbol{\varphi}(\cdot; \mathbf{x}_0)$  rozwiązanie układu równań różniczkowych  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  spełniające warunek początkowy  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ .

Przypomnijmy, że  $\mathbf{x}_0 \in D$  jest punktem stacjonarnym wtedy i tylko wtedy, gdy jest miejscem zerowym pola wektorowego  $\mathbf{f}$  (Tw. 10.2).

*Definicja.* Mówimy, że punkt stacjonarny  $\mathbf{x}_0 \in D$  układu  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  jest *stabilny w sensie Lapunowa*<sup>1</sup>, gdy dla każdego  $\varepsilon > 0$  można znaleźć takie  $\delta > 0$ , że jeśli  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$  to rozwiązanie  $\boldsymbol{\varphi}(\cdot; \mathbf{x})$  jest określone (co najmniej) na przedziale  $[0, \infty)$ , i zachodzi

$$\|\boldsymbol{\varphi}(t; \mathbf{x}) - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon \quad \text{dla wszystkich } t \geq 0.$$

Niekiedy w literaturze spotyka się inne rodzaje stabilności, na przykład stabilność w sensie Lagrange'a, stabilność w sensie Poissona. Jednak, gdy mówimy po prostu „stabilność”, rozumiemy przez to stabilność w sensie Lapunowa.

*Definicja.* Mówimy, że punkt stacjonarny  $\mathbf{x}_0 \in D$  układu  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  jest *asymptotycznie stabilny*, gdy

- jest stabilny w sensie Lapunowa,

oraz

- istnieje takie  $\delta_0 > 0$ , że jeśli  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta_0$  to  $\|\boldsymbol{\varphi}(t; \mathbf{x}) - \mathbf{x}_0\| \rightarrow 0$  przy  $t \rightarrow \infty$ .

Dla asymptotycznie stabilnego punktu stacjonarnego  $\mathbf{x}_0$  zbiór tych  $\mathbf{x} \in U$ , dla których  $\|\boldsymbol{\varphi}(t; \mathbf{x}) - \mathbf{x}_0\| \rightarrow 0$  przy  $t \rightarrow \infty$ , nazywamy *basenem przyciągania* punktu  $\mathbf{x}_0$ . Można udowodnić, że basen przyciągania asymptotycznie stabilnego punktu stacjonarnego jest zbiorem otwartym.

<sup>1</sup>Aleksandr Michajłowicz Lapunow (1857 – 1918), matematyk i fizyk rosyjski

Przyjrzyjmy się poniższym definicjom w przypadku jednowymiarowym ( $n = 1$ ,  $D$  to przedział otwarty  $I$ ).

Łatwiejsze jest znalezienie warunku równoważnego stabilności asymptotycznej punktu stacjonarnego  $x_0$ : istnieje  $\delta > 0$  takie, że  $(x - x_0)f(x) < 0$  dla każdego  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$  (innymi słowy, w pewnym sąsiedztwie punktu  $x_0$  pole wektorowe jest skierowane w stronę tego punktu).

Warunek równoważny stabilności w sensie Lapunowa jest nieco bardziej skomplikowany: istnieją ciągi  $x'_k \nearrow x_0$  i  $x''_k \searrow x_0$  takie, że  $(x'_k - x_0)f(x'_k) \leq 0$  i  $(x''_k - x_0)f(x''_k) \leq 0$  dla wszystkich  $k$ .

Powróćmy teraz do dowolnego  $n$ . Dla miejsca zerowego  $\mathbf{x}_0 \in D$  pola wektorowego  $\mathbf{f} = \text{col}(f_1, \dots, f_n)$  oznaczmy

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \left[ \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) \right]_{i,j=1}^n.$$

Macierz  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  nazywamy *macierzą linearyzacji* pola wektorowego  $\mathbf{f}$  w  $\mathbf{x}_0$  (inna nazwa to *macierz Jacobiego*).

**Twierdzenie 10.5** (Zasada linearyzowanej stabilności). *Niech  $\mathbf{x}_0$  będzie miejscem zerowym pola wektorowego  $\mathbf{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  klasy  $C^1$ .*

- (i) *Jeśli wszystkie wartości własne macierzy  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  mają ujemne części rzeczywiste, to punkt stacjonarny  $\mathbf{x}_0$  jest asymptotycznie stabilny.*
- (ii) *Jeśli któraś z wartości własnych macierzy  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  ma dodatnią część rzeczywistą, to punkt stacjonarny  $\mathbf{x}_0$  nie jest stabilny w sensie Lapunowa.*

W przypadku, gdy wszystkie wartości własne macierzy  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  mają nie-dodatnie części rzeczywiste, a niektóre z nich mają zerowe części rzeczywiste, punkt stacjonarny  $\mathbf{x}_0$  może być niestabilny, może być stabilny lecz nie asymptotycznie stabilny, może wreszcie być asymptotycznie stabilny.

### 10.6.1 Funkcje Lapunowa

Niech  $\mathbf{x}_0$  będzie punktem stacjonarnym dla układu  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , gdzie  $\mathbf{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  jest klasy  $C^1$ .

*Definicja.* Funkcja  $V: U \rightarrow \mathbb{R}$  klasy  $C^1$ , gdzie  $U \subset D$  jest otoczeniem punktu  $\mathbf{x}_0$ , jest *funkcją Lapunowa* dla  $\mathbf{x}_0$ , jeśli

$$(L1) \quad V(\mathbf{x}_0) = 0, \text{ i } V(\mathbf{x}) > 0 \text{ dla } \mathbf{x} \in U \setminus \{\mathbf{x}_0\},$$

**(L2)**  $\langle \nabla V(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle \leq 0$  dla  $\mathbf{x} \in U \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ .

Jeśli zamiast **(L2)** zachodzi mocniejszy warunek

**(L2)\***  $\langle \nabla V(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle < 0$  dla  $\mathbf{x} \in U \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ ,

$V$  nazywamy *ściłą funkcją Lapunowa* dla  $\mathbf{x}_0$ .

Zwróćmy uwagę, że z warunku **(L2)** [**(L2)\***] wynika, że dla dowolnego  $\mathbf{x} \in U \setminus \{\mathbf{x}_0\}$  funkcja  $t \mapsto V(\varphi(t; \mathbf{x}))$  jest nierosnąca [malejąca], dopóki  $\varphi(t; \mathbf{x})$  pozostaje w zbiorze  $U$ .

**Twierdzenie 10.6** (Twierdzenie Lapunowa o stabilności). *Niech  $\mathbf{x}_0$  będzie punktem stacjonarnym układu  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ .*

- (1) *Jeśli  $V: U \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją Lapunowa dla  $\mathbf{x}_0$ , to  $\mathbf{x}_0$  jest stabilny w sensie Lapunowa.*
- (2) *Jeśli  $V: U \rightarrow \mathbb{R}$  jest ściłą funkcją Lapunowa dla  $\mathbf{x}_0$ , to  $\mathbf{x}_0$  jest asymptotycznie stabilny.*

*Dowód.* Niech  $\varepsilon > 0$ . Ponieważ  $\varepsilon$  zawsze można zmniejszyć, założmy że jest ono tak małe, że  $\bar{B}(\mathbf{x}_0; \varepsilon)$ , kula domknięta o środku w  $\mathbf{x}_0$  i promieniu  $\varepsilon$ , jest zawarta w dziedzinie  $U$  funkcji Lapunowa  $V$ . Oznaczmy przez  $m$  kres dolny zbioru wartości funkcji  $V$  na sferze  $\bar{B}(\mathbf{x}_0; \varepsilon)$ . Z ciągłości i dodatniości funkcji  $V$  oraz ze zwartości sfery wynika, że  $m$  jest liczbą dodatnią. Niech  $\delta \in (0, \varepsilon)$  będzie takie, że na kuli otwartej  $B(\mathbf{x}_0; \delta)$  funkcja  $V$  przyjmuje wartości mniejsze niż  $m/2$  (istnienie takiej  $\delta$  wynika z ciągłości funkcji  $V$  w  $\mathbf{x}_0$ ).

Weźmy  $\mathbf{x} \in U$  takie, że  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ . Z własności **(L2)** funkcji Lapunowa wynika, że  $V(\varphi(t; \mathbf{x})) \leq V(\mathbf{x}) \leq m/2$  dla każdego  $t \in [0, \tau_{\max}(\mathbf{x}))$ , o ile  $\varphi(t; \mathbf{x}) \in U$ . Twierdzimy, że dla każdego  $t \in [0, \tau_{\max}(\mathbf{x}))$  zachodzi  $\|\varphi(t; \mathbf{x}) - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon$ . Istotnie, w przeciwnym przypadku musiałyby istnieć  $\vartheta \in (0, \tau_{\max}(\mathbf{x}))$  takie, że  $\|\varphi(\vartheta; \mathbf{x}) - \mathbf{x}_0\| = \varepsilon$ , czyli  $V(\varphi(\vartheta; \mathbf{x})) \geq m$ , co jest niemożliwe. Teraz wystarczy tylko zauważyć, że zbiór  $\{\varphi(t; \mathbf{x}) : t \in [0, \tau_{\max}(\mathbf{x}))\}$  jest zawarty w  $\bar{B}(\mathbf{x}_0; \varepsilon)$  (zbiorze zwartym), zatem, na podstawie twierdzenia o przedłużaniu rozwiązań,  $\tau_{\max}(\mathbf{x}) = \infty$ .

Założmy, że spełnione jest **(L2)\***. Ustalmy  $\varepsilon > 0$  takie, że  $\bar{B}(\mathbf{x}_0; \varepsilon)$  jest zawarta w dziedzinie  $U$  funkcji Lapunowa  $V$ , i za  $\delta_0$  weźmy tak małą liczbę dodatnią, że jeśli  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta_0$  to  $\|\varphi(t; \mathbf{x}) - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon$  dla wszystkich  $t \geq 0$  (istnienie takiego  $\delta_0$  zapewnia nam, już wykazana, stabilność w sensie Lapunowa). Założmy nie wprost, że istnieje  $\mathbf{x}$ , w odległości od  $\mathbf{x}_0$  mniejszej niż  $\delta_0$ , takie że  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t; \mathbf{x}) - \mathbf{x}_0\|$  bądź nie istnieje bądź nie jest równa zero. Ze zwartości  $\bar{B}(\mathbf{x}_0; \varepsilon)$  wynika istnienie ciągu  $(t_k)_{k=1}^{\infty}$ , rozbieżnego do  $\infty$ ,

takiego że  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t_k; \mathbf{x}) = \mathbf{x}_1$  i  $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_0$ . Ze ścisłej monotoniczności funkcji  $t \mapsto V(\varphi(t; \mathbf{x}))$  i z ciągłości funkcji  $V$  wynika, że  $V(\varphi(t; \mathbf{x}))$  maleje przy  $t \rightarrow \infty$  do  $V(\mathbf{x}_1)$ .

Wykorzystujemy teraz własność, o której nie było wspomniane przy okazji rozpatrywania rozwiązań, a mianowicie *ciągłą zależność rozwiązania od warunków początkowych*. Wynika z niej, że jeśli  $\varphi(t_k; \mathbf{x})$  dąży do  $\mathbf{x}_1$ , to  $\varphi(1; \varphi(t_k; \mathbf{x}))$  dąży do  $\varphi(1; \mathbf{x}_1)$ . Wykorzystując Lemat 10.1 wykazujemy, że  $\varphi(1; \varphi(t_k; \mathbf{x})) = \varphi(t_k+1; \mathbf{x})$ . Lecz daje to sprzeczność, gdyż  $V(\varphi(t_k+1; \mathbf{x})) \rightarrow V(\mathbf{x}_1)$ , zaś  $V(\varphi(1; \mathbf{x}_1)) < V(\mathbf{x}_1)$ .

□

**Twierdzenie 10.7.** *Niech  $\mathbf{x}_0$  będzie punktem stacjonarnym układu  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ . Załóżmy, że istnieje funkcja  $V: U \rightarrow \mathbb{R}$ , klasy  $C^1$ , gdzie  $U \subset D$  jest otoczeniem punktu  $\mathbf{x}_0$ , o następujących własnościach:*

- $V(\mathbf{x}_0) = 0$ ;
- dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje  $\mathbf{x}^*$  takie, że  $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\| < \varepsilon$  i  $V(\mathbf{x}^*) > 0$ ;
- $\langle \nabla V(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle > 0$  dla  $\mathbf{x} \in U \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ .

Wówczas  $\mathbf{x}_0$  nie jest stabilny w sensie Lapunowa.

Funkcję spełniającą powyższe warunki nazywamy *funkcją Czetajewa*.<sup>2</sup>

## 10.7 Bifurkacja Hopfa<sup>3</sup>

Będziemy rozważali rodzinę pól wektorowych sparametryzowanych parametrem  $\mu$ :

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu).$$

O *bifurkacji* mówimy, gdy przy zmianie parametru  $\mu$ , przy pewnej wartości zachowanie się krzywych fazowych pola wektorowego zmienia się „skokowo”.

Założmy, że  $\mu$  to parametr rzeczywisty, przyjmujący (dla ustalenia uwagi) wartości z  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  dla pewnego  $\varepsilon > 0$ . Ponadto, zakładamy, że funkcja  $\mathbf{f}: D \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$  jest (co najmniej) klasy  $C^1$ , gdzie  $D \subset \mathbb{R}^n$  to obszar zawierający  $\mathbf{0}$ , i taka, że  $\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mu) = \mathbf{0}$  dla wszystkich  $\mu \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ .

<sup>2</sup>Nikołaj Guriewicz Czetajew (1902 – 1959) (w literaturze anglojęzycznej stosowana jest pisownia *Chetaev*), rosyjski matematyk i mechanik teoretyk.

<sup>3</sup>Eberhard Hopf (1902 – 1983), matematyk pochodzenia austriackiego, pracujący w Niemczech i Stanach Zjednoczonych, zajmujący się głównie teorią równań różniczkowych i teorią ergodyczną; nie mylić z Heinzem Hopfem (1894 – 1971), matematykiem niemieckim (urodzonym w Grabiszynie, wówczas wiosce pod Wrocławiem), zajmującym się głównie topologią.

*Przykład.* Dla  $n = 1$  rozważmy rodzinę

$$x' = \mu + x^2.$$

- Gdy  $\mu < 0$ , pole wektorowe ma dwa punkty stacjonarne,  $-\sqrt{-\mu}$  (asymptotycznie stabilny), i  $\sqrt{-\mu}$  (niestabilny);
- gdy  $\mu = 0$ , pole wektorowe ma jeden punkt stacjonarny, 0 (niestabilny);
- gdy  $\mu > 0$ , pole wektorowe nie ma punktów stacjonarnych.

$\mu = 0$  nazywamy *punktem bifurkacji*: przy zmianie  $\mu$  z ujemnych na dodatnie portret fazowy zmienia się.

Jest to przykład *bifurkacji typu siodło-węzeł*.

*Przykład.* Dla  $n = 1$  rozważmy rodzinę

$$x' = \mu x - x^3.$$

- Gdy  $\mu < 0$ , pole wektorowe ma jeden, asymptotycznie stabilny, punkt stacjonarny 0;
- gdy  $\mu = 0$ , pole wektorowe ma jeden, asymptotycznie stabilny, punkt stacjonarny 0;
- gdy  $\mu > 0$ , pole wektorowe ma niestabilny punkt stacjonarny 0, i dwa asymptotycznie stabilne punkty stacjonarne,  $\pm\sqrt{\mu}$ .

Jest to przykład (*superkrytycznej*) *bifurkacji typu widły* (ang.: (*supercritical*) *pitchfork bifurcation*).

Zakładamy, że  $\mathbf{f}: D \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$  jest klasy  $C^4$ , gdzie  $D \subset \mathbb{R}^2$  to obszar zawierający  $\mathbf{0}$ , i  $\varepsilon > 0$ .

Następnie zakładamy, że

- $\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mu) = \mathbf{0}$  dla każdego  $\mu \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ,
- macierz Jacobiego  $D\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mu)$  ma, dla każdego  $\mu \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , zespolone wartości własne  $\alpha(\mu) \pm \beta(\mu)$  (bierzemy  $\beta(\mu) > 0$ ),
- $\alpha(0) = 0$ , i  $\alpha'(0) > 0$ .



Jeżeli ponadto pewna liczba, bardzo skomplikowana lecz dająca się w praktyce obliczyć, jest ujemna, to zachodzi *superkrytyczna bifurkacja Hopfa* (zwana też (superkrytyczną) bifurkacją Andronowa<sup>4</sup>–Hopfa, lub Poincarégo–Andronowa–Hopfa): dla każdego  $\mu < 0$  i dostatecznie bliskiego zeru, punkt stacjonarny  $\mathbf{0}$  jest ogniskiem stabilnym, zaś dla każdego  $\mu > 0$  i dostatecznie bliskiego zeru, punkt stacjonarny  $\mathbf{0}$  jest ogniskiem niestabilnym, „otoczonym” przez przyciągający cykl graniczny; ponadto, istnieją dodatnie  $M_1 < M_2$  takie, że dla każdego  $\mu > 0$  dostatecznie bliskiego zeru, cykl graniczny zawiera się w pierścieniu o promieniu wewnętrznym  $K_1\sqrt{\mu} + O(\mu)$  i promieniu zewnętrznym  $K_2\sqrt{\mu} + O(\mu)$ .

## 10.8 Układy dysypatywne. Atraktory

W niniejszym podrozdziale zakładamy, że  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  jest polem wektorowym klasy  $C^1$ , mającym następującą własność

*Dla każdego  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  dziedzina nieprzedłużalnego rozwiązania  $\varphi(\cdot; \mathbf{x}_0)$  zagadnienia początkowego  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ , zawiera przedział  $[0, \infty)$ .*

*Definicja.* Mówimy, że układ równań różniczkowych  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  jest *dysypatywny*, gdy istnieje kula domknięta  $\bar{B}(\mathbf{0}; R_0)$  o środku w  $\mathbf{0}$  i promieniu  $R_0 > 0$  taka, że dla każdego zbioru ograniczonego  $A \subset \mathbb{R}^n$  istnieje  $T = T(A) \geq 0$  takie, że  $\varphi(t; A) \subset \bar{B}(\mathbf{0}; R_0)$  dla wszystkich  $t \geq T$ .

Analogicznie można mówić o *dysypatywnym* polu wektorowym.

**Fakt 10.8.** *Załóżmy, że  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  jest dysypatywnym polem wektorowym klasy  $C^1$ . Wówczas zbiór*

$$G := \bigcap_{t \geq 0} \overline{\bigcup_{s \geq t} \varphi(s; K(\mathbf{0}; R_0))}$$

( $\bar{B}$  oznacza domknięcie zbioru  $B$ ) *ma następujące własności:*

- (i)  *$G$  jest zwarty i niepusty,*
- (ii)  *$G \subset K(\mathbf{0}; R_0)$ ,*
- (iii) *dla każdego  $\mathbf{x} \in G$  nieprzedłużalne rozwiązanie  $\varphi(\cdot; \mathbf{x})$  jest określone na  $(-\infty, \infty)$ , oraz  $\varphi(t; \mathbf{x}) \in G$  dla każdego  $t \in \mathbb{R}$ ,*
- (iv) *dla każdego zbioru ograniczonego  $U \subset \mathbb{R}^n$  i każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje  $T = T(U, \varepsilon) \geq 0$  takie, że  $\varphi(t; U) \subset G(\varepsilon)$  dla wszystkich  $t \geq T$ , gdzie  $G(\varepsilon)$  oznacza zbiór tych wszystkich punktów z  $\mathbb{R}^n$  których odległość od  $G$  jest mniejsza od  $\varepsilon$ ,*

---

<sup>4</sup>Aleksandr Aleksandrowicz Andronow (1901 – 1952), fizyk rosyjski.

*Dowód (fragment).* Zauważmy, że rodzina zbiorów

$$t \mapsto \overline{\bigcup_{s \geq t} \varphi(s; K(\mathbf{0}; R_0))}$$

jest zstępująca. W szczególności, wynika stąd, że

$$G = \bigcap_{t \geq T} \overline{\bigcup_{s \geq t} \varphi(s; K(\mathbf{0}; R_0))},$$

gdzie za  $T$  bierzemy  $T = T(K(\mathbf{0}; R_0))$  w definicji dysypatywności. Mamy więc, dla każdego  $t \geq T$ ,

$$\overline{\bigcup_{s \geq t} \varphi(s; K(\mathbf{0}; R_0))} \subset K(\mathbf{0}; R_0),$$

co natychmiast daje (ii). Własność (i) wynika z faktu, że przekrój zstępującej rodziny niepustych zbiorów zwartych jest niepusty i zwarty.

Dowody pozostałych części, chociaż nie wymagają zastosowania specjalnych pomysłów, są bardzo techniczne, i dlatego je tu pomijamy. □

Zajmijmy się pewnym wnioskiem z własności (iii). Mianowicie, zdefiniujemy odwzorowanie  $\Phi: \mathbb{R} \times G \rightarrow G$  jako  $\Phi(t, \mathbf{x}) := \varphi(t; \mathbf{x})$ . Odwzorowanie to jest potokiem na  $G$  (pomimo, że pole wektorowe nie musi być zupełne)

*Definicja.* Mówimy, że zbiór  $A \subset G$  jest *niezmienniczy*, gdy dla każdego  $t \in \mathbb{R}$  zachodzi  $\Phi_t(A) = A$ .

W szczególności, zbiór  $G$  jest niezmienniczy.

*Definicja.* Niepusty zwarty zbiór niezmienniczy  $A \subset G$  nazywamy *atraktorem*, gdy istnieje jego otoczenie otwarte  $U$  o tej własności, że

$$A = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\bigcup_{s \geq t} \Phi_s(U)}.$$

Niekiedy w definicji atraktora żąda się jeszcze jego *nierozkładalności*, tzn. by nie istniał jego podzbiór właściwy o tych własnościach.

Przykładem atraktora jest  $A = \{\mathbf{x}_0\}$ , gdzie  $\mathbf{x}_0$  jest asymptotycznie stabilnym punktem stacjonarnym.

*Atraktorem dziwnym* nazywamy atraktor, którego  $n$ -wymiarowa miara Lebesgue'a jest równa zero, lecz którego wymiar Hausdorffa jest ułamkowy.

Z pojęciem atraktora dziwnego wiąże się pojęcie chaosu.

Zwykle mówimy, że na zwartym zbiorze niezmienniczym  $A \subset G$  występuje *chaos*, gdy spełnione są następujące trzy warunki:

- Zbiór punktów okresowych w  $A$  jest gęsty w  $A$ ;
- Istnieje takie  $r > 0$ , że dla każdego  $\mathbf{x} \in A$  i każdego  $\varepsilon > 0$  można znaleźć takie  $\mathbf{y} \in A$ , że  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \varepsilon$ , lecz  $\|\varphi(t; \mathbf{x}) - \varphi(t; \mathbf{y})\| > r$  dla pewnego  $t > 0$  (jest to tzw. *czuła zależność od warunków początkowych*);
- Istnieje  $\hat{\mathbf{x}} \in A$  o tej własności, że zbiór  $\{\varphi(t; \hat{\mathbf{x}}) : t \in \mathbb{R}\}$  jest gęsty w  $A$  (jest to tzw. *topologiczna tranzytywność*).

Jest to tylko jedna z wielu (nierównoważnych!) definicji chaosu.

## 10.9 Układ Lorenza

Układem równań różniczkowych Lorenza nazywamy układ

$$(ULor) \quad \begin{cases} x' = \sigma(y - x) \\ y' = \rho x - y - xz \\ z' = -bz + xy, \end{cases}$$

gdzie  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , zaś  $\sigma$ ,  $\rho$  i  $b$  są parametrami dodatnimi.

Układ (ULor) został wprowadzony przez Edwarda N. Lorenza<sup>5</sup> w pracy *Deterministic nonperiodic flow*, Journal of the Atmospheric Sciences **20**(3) (1963), 130–141.

Jest on układem dysypatywnym. Ponadto, zbiór  $G$  ma trójwymiarową miarę Lebesgue'a równą zeru.

Badania numeryczne wskazywały na chaotyczne zachowanie się na zbiorze  $G$  (*atraktorze Lorenza*), dla pewnych wartości parametrów (na przykład, dla  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$  i  $\rho = 28$ ). Przez długi czas jednak nie udało się wykazać w sposób ścisły, że atraktor ten jest atraktorem dziwnym.

Dopiero na początku obecnego stulecia Warwick Tucker<sup>6</sup> udowodnił to (w swojej rozprawie doktorskiej), wykorzystując między innymi rachunek interwałowy (zaanonsowane w 2001, pełny dowód w *A rigorous ODE solver and Smale's 14th problem*, Foundations of Computational Mathematics **2**(1) (2002), 53–117).

<sup>5</sup>Edward Norton Lorenz (1917 – 2008), matematyk i meteorolog amerykański.

<sup>6</sup>Warwick Tucker (ur. 1970), matematyk pochodzenia australijskiego, obecnie w Szwecji.