6 Układy równań różniczkowych. Równania wyższych rzędów.

6.1 Podstawowe pojęcia dla układów równań różniczkowych zwyczajnych

Definicja. Układem n równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego nazywamy układ

$$\text{(UR}n\text{)} \qquad \begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ x_2' = f_2(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x_n' = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

Układ (URn) będziemy zwykle zapisywać w postaci wektorowej: oznaczając $\mathbf{x} := \operatorname{col}(x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{x}' := \operatorname{col}(x_1', \dots, x_n')$, $\mathbf{f} := \operatorname{col}(f_1, \dots, f_n)$ otrzymujemy

$$\text{(UR}n\text{)} \qquad \mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}).$$

Układ (URn) (szczególnie gdy jest zapisany w postaci wektorowej) nazywamy też *(n-wymiarowym) wektorowym równaniem różniczkowym zwyczajnym.* „Pojedyncze” równania różniczkowe nazywamy wtedy *skalarnymi* równaniami różniczkowymi.

Definicja. Rozwiązanie układu (URn) to funkcja wektorowa $\boldsymbol{\varphi}\colon I \to \mathbb{R}^n$ taka, że $\boldsymbol{\varphi}'(t) = \mathbf{f}(t, \boldsymbol{\varphi}(t))$ dla każdego $t \in I$.

Definicja. Warunki początkowe dla układu (URn) to

$$\text{(WP}n\text{)} \qquad \begin{cases} x_1(t_0) = x_{1,0} \\ x_2(t_0) = x_{2,0} \\ \vdots \\ x_n(t_0) = x_{n,0} \end{cases}$$

czyli w zapisie wektorowym

$$\text{(WP}n\text{)} \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \text{gdzie } \mathbf{x}_0 := \operatorname{col}(x_{1,0}, \dots, x_{n,0})$$

Układ (URn) wraz z warunkami początkowymi (WPn) będziemy nazywali *zagadnieniem początkowym.*

Definicja. Rozwiązanie zagadnienia początkowego (URn)+(WPn) jest to rozwiązanie $\boldsymbol{\varphi}\colon I \to \mathbb{R}^n$ układu (URn) takie, że $t_0 \in I$ oraz $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{x}_0$.

6.2 Twierdzenia o istnieniu, jednoznaczności i przedłużaniu rozwiązań dla układów równań różniczkowych zwyczajnych

Przez P będziemy (w tym podrozdziale) oznaczać prostopadłościan $[x_{1,0} - \varepsilon_1, x_{1,0} + \varepsilon_1] \times \cdots \times [x_{n,0} - \varepsilon_n, x_{n,0} + \varepsilon_n]$, gdzie $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n > 0$. $\|\cdot\|$ oznacza standardową normę euklidesową w $\mathbb{R}^n$.

Definicja. Funkcja wektorowa $\mathbf{f}\colon [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times P \to \mathbb{R}^n$, gdzie $\delta > 0$, spełnia na $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times P$ *warunek Lipschitza względem* $\mathbf{x}$ (*jednostajnie po* t), jeżeli istnieje $L > 0$ takie, że

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_2)\| \leqslant L\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$$

dla wszystkich $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ i wszystkich $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in P$.

Fakt 6.1. *Załóżmy, że pochodne cząstkowe $\partial f_i/\partial x_j$ istnieją i są ciągłe na $[t_0-\delta, t_0+\delta]\times P$. Wówczas $\mathbf{f}$ spełnia na $[t_0-\delta, t_0+\delta]\times P$ warunek Lipschitza względem $\mathbf{x}$, ze stałą*

$$L = n \sup\{\, |\tfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, \mathbf{x})| : i, j = 1, \dots, n,\ t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta],\ \mathbf{x} \in P\,\}.$$

Twierdzenie 6.2 (Twierdzenie Picarda(–Lindelöfa))**.** *Niech $\mathbf{f}\colon [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times P \to \mathbb{R}^n$ będzie ciągłą funkcją wektorową spełniającą na $[t_0-\delta, t_0+\delta]\times P$ warunek Lipschitza względem $\mathbf{x}$ ze stałą L jednostajnie po t. Wówczas istnieje dokładnie jedno rozwiązanie $\boldsymbol{\varphi}\colon [t_0-\eta, t_0+\eta] \to \mathbb{R}^n$ zagadnienia początkowego*

$$\text{(UR}n\text{-ZP)}\qquad \begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \end{cases}$$

gdzie $\eta = \min\{\delta, \frac{\varepsilon_1}{M_1}, \dots, \frac{\varepsilon_n}{M_n}\}$, $M_i = \sup\{\, |f_i(t, \mathbf{x})| : t \in [t_0-\delta, t_0+\delta], \mathbf{x} \in P\,\}$.

Dowód twierdzenia Picarda dla układów równań różniczkowych jest niemal wierną kopią dowodu tego twierdzenia dla równań (Tw. 3.2; należy tylko w odpowiednich miejscach zastąpić wartości bezwzględne normami).

Ciąg kolejnych przybliżeń to ciąg $(\boldsymbol{\varphi}_k)_{k=0}^{\infty}$ ciągłych funkcji wektorowych z $[t_0 - \eta, t_0 + \eta]$ w $\mathbb{R}^n$ zdefiniowanych rekurencyjnie:

$$\boldsymbol{\varphi}_0(t) = \mathbf{x}_0 \qquad \forall t \in [t_0 - \eta, t_0 + \eta]$$

$$\boldsymbol{\varphi}_{k+1}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \boldsymbol{\varphi}_k(s))\, ds \qquad \forall t \in [t_0 - \eta, t_0 + \eta]$$

Twierdzenie 6.3 (Twierdzenie Peano)**.** *Niech* $\mathbf{f}\colon [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times P \to \mathbb{R}^n$ *będzie ciągłą funkcją wektorową. Wówczas istnieje rozwiązanie* $\boldsymbol{\varphi}\colon [t_0 - \eta, t_0 + \eta] \to \mathbb{R}^n$ *zagadnienia początkowego*

$$\text{(UR}n\text{-ZP)} \qquad \begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \end{cases}$$

gdzie $\eta = \min\{\delta, \frac{\varepsilon_1}{M_1}, \dots, \frac{\varepsilon_n}{M_n}\}$, $M_i = \sup\{\, |f_i(t, \mathbf{x})| : t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbf{x} \in P\,\}$.

Odtąd aż do końca bieżącego podrozdziału zakładamy, że $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, $-\infty \leqslant c_i < d_i \leqslant \infty$, oraz $\mathbf{f}\colon (a, b) \times (c_1, d_1) \times \dots \times (c_n, d_n) \to \mathbb{R}^n$ jest ciągłą funkcją wektorową.

Definicja. Rozwiązanie $\boldsymbol{\varphi}\colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ układu równań różniczkowych $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ nazywamy *nieprzedłużalnym w prawo*, gdy nie istnieje rozwiązanie $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}\colon (\alpha, \tilde{\beta}) \to \mathbb{R}^n$ układu, takie, że $\tilde{\beta} > \beta$ oraz $\boldsymbol{\varphi} \equiv \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}$ na (α, β).

Analogicznie, rozwiązanie $\boldsymbol{\varphi}\colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ układu $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ nazywamy *nieprzedłużalnym w lewo*, gdy nie istnieje rozwiązanie $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}\colon (\tilde{\alpha}, \beta) \to \mathbb{R}^n$ układu, takie, że $\tilde{\alpha} > \alpha$ oraz $\boldsymbol{\varphi} \equiv \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}$ na (α, β).

Rozwiązanie *nieprzedłużalne* to rozwiązanie równocześnie nieprzedłużalne w prawo i nieprzedłużalne w lewo.

Twierdzenie 6.4 (Twierdzenie o przedłużaniu rozwiązań)**.** *Niech* $\boldsymbol{\varphi}\colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ *będzie nieprzedłużalnym w prawo rozwiązaniem układu równań różniczkowych* $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$*. Wówczas*

a) $\beta = b$,

lub

b) *Dla każdego zbioru zwartego* K *zawartego w* $(c_1, d_1) \times \dots \times (c_n, d_n)$ *istnieje* $\tau \in (\alpha, \beta)$ *takie, że* $\boldsymbol{\varphi}(t) \notin K$ *dla każdego* $t \in [\tau, \beta)$.

Niech $\boldsymbol{\varphi}\colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ *będzie nieprzedłużalnym w lewo rozwiązaniem układu równań różniczkowych* $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$*. Wówczas*

a) $\alpha = a$,

lub

b) *Dla każdego zbioru zwartego* K *zawartego w* $(c_1, d_1) \times \dots \times (c_n, d_n)$ *istnieje* $\tau \in (\alpha, \beta)$ *takie, że* $\boldsymbol{\varphi}(t) \notin K$ *dla każdego* $t \in (\alpha, \tau]$.

Część b) niekiedy formułuje się w następujący sposób: $(t, \boldsymbol{\varphi}(t))$ *dąży, gdy* $t \to \beta^-$, *do brzegu zbioru* $(a, b) \times (c_1, d_1) \times \dots \times (c_n, d_n)$ (odpowiednio: $(t, \boldsymbol{\varphi}(t))$ *dąży, gdy* $t \to \alpha^+$, *do brzegu zbioru* $(a, b) \times (c_1, d_1) \times \dots \times (c_n, d_n)$).

Dowód twierdzenia o przedłużaniu dla równań wektorowych jest dość żmudny, choć wykorzystywane są w nim tylko standardowe fakty z rachunku różniczkowego funkcji wielu zmiennych. Można go znaleźć np. w książce: A. Palczewski, *Równania różniczkowe zwyczajne. Teoria i metody metodyczne z wykorzystaniem komputerowego systemu obliczeń symbolicznych*, WNT, Warszawa, 1999, str. 78–80, lub: Ph. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, Birkhäuser, Boston, 1982, str. 12–14.

Fakt 6.5. *Niech $t_0 \in (a, b)$ i $\mathbf{x}_0 \in (c_1, d_1) \times \cdots \times (c_n, d_n)$. Wówczas istnieje nieprzedłużalne rozwiązanie zagadnienia początkowego*

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases}$$

Fakt 6.6. *Załóżmy ponadto, że na każdym prostopadłościanie $P \subset (a, b) \times (c_1, d_1) \times \cdots \times (c_n, d_n)$ funkcja $\mathbf{f}$ spełnia warunek Lipschitza względem $\mathbf{x}$ jednostajnie po t. Niech $t_0 \in (a, b)$ i $\mathbf{x}_0 \in (c_1, d_1) \times \cdots \times (c_n, d_n)$. Wówczas istnieje dokładnie jedno nieprzedłużalne rozwiązanie zagadnienia początkowego*

$$\text{(UR}n\text{-ZP)} \qquad \begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases}$$

Wykres rozwiązania układu $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ nazywamy *krzywą całkową* tego układu. Wykres rozwiązania nieprzedłużalnego będziemy nazywali *nieprzedłużalną krzywą całkową*.

6.3 Autonomiczne układy równań różniczkowych zwyczajnych

Autonomicznym układem n równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu nazywamy układ

$$\text{(UAn)} \qquad \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Odtąd do końca podrozdziału zakładamy, że $\mathbf{f} \colon D \to \mathbb{R}^n$ jest ciągłą funkcją wektorową określoną na obszarze $D \subset \mathbb{R}^n$.

Mamy następujące wnioski z twierdzeń Peano i Picarda:

Twierdzenie 6.7. *Dla każdego $t_0 \in \mathbb{R}$ i każdego $\mathbf{x}_0 \in D$ istnieje nieprzedłużalne rozwiązanie zagadnienia początkowego*

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases}$$

Twierdzenie 6.8. *Załóżmy, że* $\mathbf{f}$ *spełnia na każdym prostopadłościanie* $P \subset D$ *warunek Lipschitza względem* $\mathbf{x}$. *Wówczas dla każdego* $t_0 \in \mathbb{R}$ *i każdego* $\mathbf{x}_0 \in D$ *istnieje dokładnie jedno nieprzedłużalne rozwiązanie zagadnienia początkowego*

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases}$$

Niech $\boldsymbol{\varphi}\colon I \to \mathbb{R}^n$ będzie rozwiązaniem autonomicznego układu równań różniczkowych (UAn). Obraz $\{\, \boldsymbol{\varphi}(t) : t \in I \,\}$ nazywamy *krzywą fazową* układu (UAn).

Rozważmy autonomiczny układ dwóch równań różniczkowych

$$\text{(UA2)} \qquad \begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y), \end{cases}$$

gdzie $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ są funkcjami ciągłymi określonymi na obszarze $D \subset \mathbb{R}^2$. Wykonując parę (formalnych) operacji możemy przekształcić układ (UA2) do postaci

$$\text{(6.1)} \qquad g(x, y)\, dx - f(x, y)\, dy = 0.$$

Załóżmy, że dla każdego $(x, y) \in D$ zachodzi $|f(x, y)| + |g(x, y)| > 0$. Wówczas każdy punkt obszaru D jest punktem regularnym dla równania (6.1).

Niech $\gamma = (\varphi, \psi)\colon I \to D$ będzie rozwiązaniem układu (UA2). Wówczas krzywa regularna γ klasy C^1 jest rozwiązaniem równania (6.1) w postaci parametrycznej.

Niech $\Phi\colon D \to \mathbb{R}$ będzie całką równania (6.1). Wówczas każda krzywa fazowa układu (UA2) jest zawarta w poziomicy całki Φ.

Jeśli dla każdej wartości C należącej do obrazu całki Φ równanie

$$\Phi(x, y) = C$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie $y = \eta(x; C)$, podstawiając otrzymany wzór do pierwszego równania układu (UA2) otrzymujemy rodzinę równań różniczkowych (sparametryzowanych stałą C)

$$x' = f(x, \eta(x; C)).$$

Niekiedy można otrzymać „rozwiązanie ogólne" powyższej rodziny równań:

$$x(t) = \chi(t; C, D).$$

Wówczas „rozwiązaniem ogólnym” wyjściowego układu możemy nazwać wyrażenie

$$\begin{cases} x(t) = \chi(t; C, D) \\ y(t) = \eta(\chi(t; C, D); C). \end{cases}$$

Przykład. Rozważmy autonomiczny układ dwóch równań różniczkowych zwyczajnych

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\dfrac{y^2}{x}. \end{cases}$$

Otrzymujemy zeń równanie różniczkowe w postaci Leibniza

$$y\,dx + x\,dy = 0.$$

Funkcja $\Phi(x, y) = xy$ jest całką powyższego równania na zbiorze punktów regularnych $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Zatem $\eta(x; C) = C/x$. Podstawiając to do pierwszego równania układu otrzymujemy

$$x' = \frac{C}{x},$$

co można rozwiązać przy pomocy rozdzielenia zmiennych, dostając

$$x = \pm\sqrt{2Ct + D},$$

gdzie $C \neq 0$ i D jest dowolne, lub $C = 0$ i $D > 0$. Ostatecznie otrzymujemy „rozwiązanie ogólne” wyjściowego układu w postaci

$$\begin{cases} x(t) = \pm\sqrt{2Ct + D} \\ y(t) = \dfrac{\pm C}{\sqrt{2Ct + D}}. \end{cases}$$

6.4 Równania różniczkowe zwyczajne n-tego rzędu

Definicja. Równaniem różniczkowym zwyczajnym n-tego rzędu nazywamy równanie

(RRZn) $$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}).$$

Definicja. Rozwiązanie równania (RRZn) to funkcja $\varphi \colon I \to \mathbb{R}$ taka, że $\varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t))$ dla każdego $t \in I$.

Definicja. Warunki początkowe dla równania (RRZn) to

(WPn) $$x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_1,\ \ldots,\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}.$$

Definicja. Rozwiązanie zagadnienia początkowego (RRZn)+(WPn) jest to rozwiązanie $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ równania (RRZn) takie, że $t_0 \in I$ oraz $\varphi(t_0) = x_0$, $\varphi'(t_0) = x_1, \ldots, \varphi^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$.

Równanie różniczkowe zwyczajne n-tego rzędu (RRZn) sprowadza się do układu n równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu

(6.2) $$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \vdots \\ x_n' = f(t, x_1, \ldots, x_n), \end{cases}$$

gdzie $x_1 := x$, $x_2 := x'$, $\ldots$, $x_n := x^{(n-1)}$. Istotnie, jeśli $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ jest rozwiązaniem równania (RRZn), to funkcja wektorowa $(\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(n-1)})\colon I \to \mathbb{R}$ jest rozwiązaniem układu (6.2). Na odwrót, jeśli funkcja wektorowa $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)\colon I \to \mathbb{R}^n$ jest rozwiązaniem układu (6.2), to jej pierwsza współrzędna $\varphi_1\colon I \to \mathbb{R}$ jest rozwiązaniem równania (RRZn)

Odtąd, przez P będziemy (w tym podrozdziale) oznaczać prostopadłościan $[x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0] \times [x_1 - \varepsilon_1, x_1 + \varepsilon_1] \cdots \times [x_{n-1} - \varepsilon_{n-1}, x_{n-1} + \varepsilon_{n-1}]$, gdzie $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{n-1} > 0$.

Definicja. Funkcja $f = f(t, p_1, \ldots, p_n)\colon [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times P \to \mathbb{R}$, gdzie $\delta > 0$, spełnia na $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times P$ *warunek Lipschitza względem* $(p_1, \ldots, p_n)$, jeżeli istnieje $L > 0$ takie, że

$$|f(t, \tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_n) - f(t, \bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_n)| \leqslant L\|(\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_n) - (\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_n)\|$$

dla wszystkich $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ i wszystkich $(\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_n), (\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_n) \in P$.

Twierdzenie 6.9 (Twierdzenie Picarda(–Lindelöfa))**.** *Niech $f\colon [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times P \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą spełniającą na $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times P$ warunek Lipschitza względem $(p_1, \ldots, p_n)$ ze stałą L. Wówczas istnieje jednoznaczne rozwiązanie $\varphi\colon [t_0 - \eta, t_0 + \eta] \to \mathbb{R}$ zagadnienia początkowego*

(RRZn-ZP) $$\begin{cases} x^{(n)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}), \\ x(t_0) = x_0, \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \end{cases}$$

gdzie $\eta \in (0, \delta]$.

Twierdzenie 6.10 (Twierdzenie Peano). *Niech* $f\colon [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times P \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją ciągłą. Wówczas istnieje rozwiązanie* $\varphi\colon [t_0 - \eta, t_0 + \eta] \to \mathbb{R}$ *zagadnienia początkowego*

$$\text{(RRZ}n\text{-ZP)}\qquad \begin{cases} x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}), \\ x(t_0) = x_0, \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}, \end{cases}$$

gdzie $\eta \in (0, \delta]$.

6.5 Praktyczne metody rozwiązywania równań drugiego rzędu i układów równań

1) Równanie postaci

$$x'' = f(t, x')$$

sprowadzamy do równania rzędu pierwszego przy pomocy podstawienia

$$u = x'$$

2) Rozwiązywanie równania postaci

$$x'' = f(x, x')$$

można sprowadzić do rozwiązywania dwóch równań rzędu pierwszego w następujący sposób: traktujemy x jako nową zmienną niezależną, i podstawiamy

$$u(x) = x'(x).$$

Mamy

$$x'' = \frac{du}{dt} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dx}u.$$

Podstawiamy powyższą równość do wyjściowego równania, otrzymując

$$\frac{du}{dx} = \frac{f(x, u)}{u}$$

Rozwiązując powyższe równanie pierwszego rzędu, otrzymujemy „rozwiązanie ogólne” $u = g(x; C)$ (nie zawsze można podać takie rozwiązanie w postaci

„gotowego” wzoru). Lecz $u = x'$, zatem mamy teraz rodzinę równań różniczkowych pierwszego rzędu (zależną od parametru C):

$$x' = g(x; C),$$

którą rozwiązujemy (to znów nie zawsze musi się udać).

Przykład. Rozważmy równanie różniczkowe

$$x'' = \frac{(x')^2}{x}, \qquad x > 0. \tag{6.3}$$

Podstawienie $u(x) = x'(x)$ daje po przekształceniach równanie

$$\frac{du}{dx} = \frac{u}{x}$$

Rozdzielając zmienne dostajemy

$$\frac{du}{u} = \frac{dx}{x}$$

(Na marginesie należy zauważyć, że podczas tych przekształceń podzieliliśmy obie strony równania przez u; trzeba będzie później sprawdzić, czy równość $u \equiv 0$ nie odpowiada czasem jakiemuś rozwiązaniu.) Nakładając na obie strony całkę nieoznaczoną otrzymujemy

$$\ln |u| = \ln x + \tilde{C},$$

gdzie $\tilde{C}$ jest stałą dowolną. Dalej dostajemy

$$u = Cx,$$

czyli

$$x' = Cx,$$

gdzie $C = \pm e^{\tilde{C}}$ jest dowolną stałą niezerową. Powyższe równanie liniowe można łatwo rozwiązać, otrzymując

$$x = De^{Ct},$$

gdzie D jest dowolną stałą dodatnią. Przypominamy sobie teraz, że dzieliliśmy obie strony przez u. Lecz $u \equiv 0$ oznacza $x' \equiv 0$, czyli $x = \text{const}$. Łatwo zauważyć, że funkcje stałe (oczywiście przyjmujące wartości dodatnie) są rozwiązaniami równania (6.3). Reasumując, możemy zapisać

$$x = De^{Ct}, \tag{6.4}$$

gdzie C jest stałą dowolną, zaś D jest dowolną stałą dodatnią.

Wzór (6.4) nazywa się w klasycznych podręcznikach równań różniczkowych zwyczajnych „rozwiązaniem ogólnym” równania (6.3). Istotnie, wyczerpuje on wszystkie możliwe rozwiązania równania (6.3). Aby to udowodnić, weźmy dowolne rozwiązanie φ naszego równania. Ustalmy t_0 z dziedziny funkcji φ, i oznaczmy $x_0 := \varphi(t_0)$, $x_1 := \varphi'(t_0)$. Funkcja φ jest rozwiązaniem zagadnienia początkowego

$$\begin{cases} x'' = \frac{(x')^2}{x} \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1. \end{cases}$$

Z drugiej strony, łatwo sprawdzić, że funkcja $\psi(t) = De^{Ct}$, gdzie

$$C = \frac{x_1}{x_0}, \ D = x_0 e^{-\frac{t_0 x_1}{x_0}}$$

też jest rozwiązaniem (nieprzedłużalnym) tego zagadnienia początkowego. Z twierdzenia Picarda dla równań wyższych rzędów (Twierdzenie 6.9) wynika, że φ jest obcięciem funkcji ψ.

3) Układ dwóch równań różniczkowych pierwszego rzędu można spróbować sprowadzić do jednego równania różniczkowego drugiego rzędu różniczkując jedno z równań względem t i eliminując jedną ze zmiennych. Jest to tak zwana *metoda eliminacji.*

6.6 Przykład: równanie różniczkowe $x'' + x^3 = 0$

Sprowadźmy równanie różniczkowe drugiego rzędu

$$x'' + x^3 = 0 \tag{6.5}$$

do układu dwóch równań różniczkowych pierwszego rzędu

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x^3. \end{cases} \tag{6.6}$$

Dalej, otrzymujemy równanie w postaci Leibniza

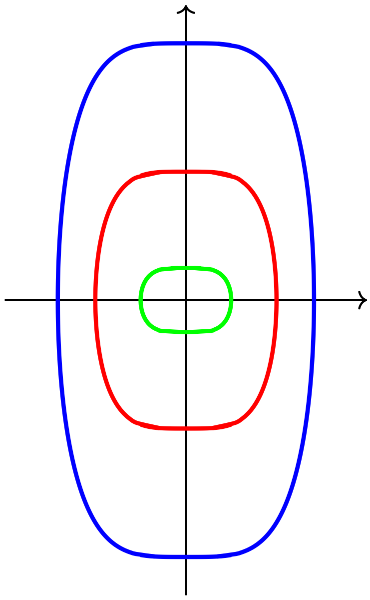
$$x^3\,dx + y\,dy = 0,$$

którego całką jest funkcja $\Phi(x, y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}y^2$.

Jak wiadomo z podrozdziału 6.3 każda krzywa całkowa układu (6.6) jest zawarta w poziomicy funkcji Φ. (Formalnie rzecz biorąc, w podrozdziale 6.3 całka jest określona na zbiorze punktów regularnych, podczas gdy w naszym przypadku $(0, 0)$ to punkt osobliwy. Rozumowanie tamto zachowuje jednak ważność i tutaj.)

Poziomica funkcji Φ odpowiadająca wartości zero to zbiór jednopunktowy $\{(0, 0)\}$. Oczywiście, jedynym rozwiązaniem układu (6.6), którego obraz jest zawarty w $\{(0, 0)\}$, jest $(\varphi, \psi) \equiv (0, 0)$, co odpowiada rozwiązaniu stale równemu zeru wyjściowego równania (6.5).

Niech teraz $C > 0$, i rozważmy poziomicę $H_C := \{ (x, y) : \Phi(x, y) = C \}$. Poziomica ta jest zbiorem zwartym homeomorficznym z okręgiem.



Na powyższym rysunku naszkicowano poziomice całki Φ odpowiadające $C = 1/4$ (zielona), $C = 4$ (czerwona), i $C = 16$ (niebieska).

Wybierzmy teraz chwilę początkową t_0 i wartości początkowe (x_0, y_0) położone na tej poziomicy. Niech $(\varphi, \psi) \colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^2$ będzie nieprzedłużalnym rozwiązaniem układu (6.6) odpowiadającym powyższym warunkom początkowym. Dla każdego $t \in (\alpha, \beta)$ punkt $(\varphi(t), \psi(t))$ należy do zbioru zwartego H_C. Z twierdzenia o przedłużaniu rozwiązań (Tw. 6.4) wynika, że $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$.

Spójrzmy na nasze rozwiązanie jak na parametryczny opis ruchu punktu na płaszczyźnie: czas t to parametr, $(\varphi(t), \psi(t))$ to położenie punktu w chwili t. Tor ruchu zawarty jest w zbiorze H_C. Dalej, w każdym momencie t *prędkość* $(\varphi'(t), \psi'(t))$ $(\neq \mathbf{0})$ jest styczna do owalu H_C. Co więcej, ruch odbywa się zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

Owal H_C ma skończoną długość, zaś szybkość (tzn. długość wektora prędkości) ruchu punktu jest zawsze niezerowa. Skoro H_C jest zbiorem zwartym, i szybkość zależy w sposób ciągły od położenia, minimalna szybkość jest dodatnia. Zatem istnieje takie $T > 0$, że $(\varphi(t_0{+}T), \psi(t_0{+}T)) = (\varphi(t_0), \psi(t_0)) = (x_0, y_0)$. Prostym wnioskiem z jednoznaczności rozwiązania zagadnienia początkowego jest to, że rozwiązanie jest funkcją okresową, o okresie T.

W konsekwencji, każde niezerowe rozwiązanie wyjściowego równania (6.5) jest (nietrywialną) funkcją okresową o okresie T.

Interpretacja fizyczna równania $x'' + x^3 = 0$ to ruch cząstki w polu potencjalnym. W definicji całki Φ, człon $\frac{1}{2}y^2$ to *energia kinetyczna*, zaś człon $\frac{1}{4}x^4$ to *energia potencjalna*. Fakt, że całka Φ zachowuje stałą wartość wzdłuż rozwiązań układu, to *zasada zachowania energii*.