7 Układy równań różniczkowych zwyczajnych liniowych. Równania różniczkowe zwyczajne liniowe wyższych rzędów

7.1 Nierówność Gronwalla

W bieżącym podrozdziale udowodnimy nierówność Gronwalla, znajdującą szerokie zastosowanie w teorii równań różniczkowych.

Lemat 7.1 (Nierówność Gronwalla[1])**.** *Załóżmy, że I jest przedziałem (niezdegenerowanym), $t_0 \in I$, oraz $g\colon I \to [0, \infty)$ jest funkcją ciągłą spełniającą, dla pewnych $C \geqslant 0$ i $D \geqslant 0$, nierówność*

$$g(t) \leqslant C + D\Big|\int_{t_0}^{t} g(s)\,ds\Big| \qquad \forall t \in I.$$

Wówczas zachodzi nierówność

$$g(t) \leqslant Ce^{D|t-t_0|} \qquad \forall t \in I.$$

Dowód. Wykażemy nierówność tylko dla $t \geqslant t_0$. Połóżmy

$$q(t) := C + D\int_{t_0}^{t} g(s)\,ds, \qquad t \in I,\ t \geqslant t_0.$$

Funkcja q jest funkcją klasy C^1 spełniającą

$$q'(t) - Dq(t) \leqslant q'(t) - Dg(t) = 0, \qquad t \in I,\ t \geqslant t_0.$$

Mnożąc skrajne strony powyższej nierówności przez e^{-Dt} otrzymujemy

$$e^{-Dt}q'(t) - De^{-Dt}q(t) \leqslant 0, \qquad t \in I,\ t \geqslant t_0,$$

czyli

$$(e^{-Dt}q(t))' \leqslant 0, \qquad t \in I,\ t \geqslant t_0.$$

Całkując powyższą nierówność od t_0 do t dostajemy

$$q(t) \leqslant Ce^{D(t-t_0)}, \qquad t \in I,\ t \geqslant t_0.$$

Lecz $g(t) \leqslant q(t)$ dla wszystkich $t \in I$, $t \geqslant t_0$, co daje żądany wynik. □

[1] Thomas Hakon Gronwall (właśc. Grönwall, 1877 – 1932), matematyk amerykański pochodzenia szwedzkiego

Podamy teraz przykład zastosowania nierówności Gronwalla.

Twierdzenie 7.2. *Załóżmy, że ciągła funkcja wektorowa* $\mathbf{f}\colon (a,b) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *ma następującą własność: Istnieją ciągłe funkcje rzeczywiste* $M_1\colon (a,b) \to [0,\infty)$ *i* $M_2\colon (a,b) \to [0,\infty)$ *takie, że*

$$\|\mathbf{f}(t,\mathbf{x})\| \leqslant M_1(t)\|\mathbf{x}\| + M_2(t) \qquad \forall t \in (a,b).$$

Wówczas każde nieprzedłużalne rozwiązanie układu równań różniczkowych $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t,\mathbf{x})$ *jest określone na całym przedziale* (a,b).

Dowód. Załóżmy *nie wprost*, że dla pewnego rozwiązania nieprzedłużalnego $\boldsymbol{\varphi}\colon (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}^n$ układu $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t,\mathbf{x})$ zachodzi $a < \alpha$. Z twierdzenia o przedłużaniu rozwiązań (Tw. 6.4) wynika, że dla każdego zbioru zwartego $K \subset \mathbb{R}^n$ istnieje $\tau \in (\alpha,\beta)$ takie, że $\boldsymbol{\varphi}(t) \notin K$ dla wszystkich $t \in (\alpha,\tau)$. Ustalmy $t_0 \in (\alpha,\beta)$. Dojdziemy do sprzeczności, jeśli znajdziemy zbiór zwarty $\tilde{K} \subset \mathbb{R}^n$ taki, że $\boldsymbol{\varphi}(t) \in \tilde{K}$ dla wszystkich $t \in (\alpha, t_0]$. Wykorzystamy do tego nierówność Gronwalla.
Funkcja wektorowa $\boldsymbol{\varphi}(\cdot)$ spełnia równanie całkowe

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s,\boldsymbol{\varphi}(s))\,ds \qquad \forall t \in (\alpha,\beta).$$

Oznaczmy $g(t) := \|\boldsymbol{\varphi}(t)\|$, $t \in (\alpha, t_0] =: I$. Standardowe oszacowania dla całek oznaczonych z (ciągłych) funkcji wektorowych dają

$$g(t) \leqslant C + D\Big|\int_{t_0}^{t} g(s)\,ds\Big| \qquad \forall t \in I,$$

gdzie

$$C := \|\boldsymbol{\varphi}(t_0)\| + (t_0 - \alpha) \cdot \sup\{\, M_2(s) : s \in [\alpha, t_0]\,\}(< \infty),$$
$$D := \sup\{\, M_2(s) : s \in [\alpha, t_0]\,\}(< \infty).$$

Z nierówności Gronwalla (Lemat 7.1) wynika, że

$$\|\boldsymbol{\varphi}(t)\| \leqslant Ce^{D|t-t_0|} \leqslant Ce^{D(t_0-\alpha)} \qquad \forall t \in I.$$

Za zbiór zwarty $\tilde{K}$ bierzemy kulę domkniętą o środku w $\mathbf{0}$ i promieniu $Ce^{D(t_0-\alpha)}$.
Przypadek $\beta < b$ wykluczamy w analogiczny sposób. $\square$

7.2 Układy równań różniczkowych zwyczajnych liniowych: Podstawowe pojęcia i właściwości

Dla macierzy $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n}$ (być może o wyrazach zespolonych!), symbol $\|A\|$ oznacza $(\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2)^{1/2}$.
Definicja. Układem n równań różniczkowych zwyczajnych liniowych nazywamy układ

$$(\mathrm{UL}n) \qquad \mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{h}(t),$$

gdzie $A\colon (a,b) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ jest funkcją macierzową i $\mathbf{h}\colon (a,b) \to \mathbb{R}^n$ jest funkcją wektorową. Funkcję $A(\cdot)$ nazywamy *macierzą układu* (ULn).

Definicja. Układ (ULn) nazywamy *układem równań różniczkowych liniowych jednorodnych* gdy $\mathbf{h} \equiv \mathbf{0}$. W przeciwnym przypadku układ nazywamy *układem równań różniczkowych liniowych niejednorodnych*.

Twierdzenie 7.3. *Załóżmy, że funkcje $A\colon (a,b) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ i $\mathbf{h}\colon (a,b) \to \mathbb{R}^n$ są ciągłe. Wówczas dla każdego $(t_0, \mathbf{x}_0) \in (a,b) \times \mathbb{R}^n$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie nieprzedłużalne $\boldsymbol{\varphi}\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ zagadnienia początkowego*

$$(\mathrm{UL}n\text{-ZP}) \qquad \begin{cases} \mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{h}(t) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases}$$

Dowód. Funkcja wektorowa $(t, \mathbf{x}) \mapsto A(t)\mathbf{x} + \mathbf{h}(t)$ jest ciągła. Ponadto, dla każdego przedziału zwartego $[c,d] \subset (a,b)$ mamy

$$\|A(t)\mathbf{x}_1 + \mathbf{h}(t) - (A(t)\mathbf{x}_2 + \mathbf{h}(t))\| = \|A(t)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)\| \leqslant L\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|,$$

gdzie $L := \sup\{\, \|A(t)\| : t \in [c,d] \,\} < \infty$. Na podstawie Faktu 6.6 istnieje dokładnie jedno nieprzedłużalne rozwiązanie $\boldsymbol{\varphi}\colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ zagadnienia (ULn-ZP).
Aby wykazać, że $(\alpha, \beta) = (a, b)$, wystarczy zauważyć, że dla wszystkich $t \in (a,b)$ i wszystkich $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ spełniona jest nierówność

$$\|A(t)\mathbf{x} + \mathbf{h}(t)\| \leqslant M_1(t)\|x\| + M_2(t),$$

gdzie

$$M_1(t) := \|A(t)\|, \qquad M_2(t) := \|\mathbf{h}(t)\|,$$

i zastosować Tw. 7.2. $\square$

7.3 Układy równań różniczkowych liniowych jednorodnych

W bieżącym podrozdziale rozpatrujemy układ n równań różniczkowych liniowych jednorodnych

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}, \tag{ULJn}$$

gdzie $A\colon (a,b) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ jest ciągłą funkcją macierzową.
Jest niemal oczywiste, że zbiór wszystkich rozwiązań układu (ULJn) tworzy przestrzeń liniową nad ciałem $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych.

Twierdzenie 7.4. *Wymiar przestrzeni liniowej rozwiązań układu* (ULJn) *równań różniczkowych liniowych jednorodnych wynosi n.*

Dowód. Oznaczmy przestrzeń liniową rozwiązań układu (ULJn) przez $\mathbb{S}$.
Ustalmy $t_0 \in (a,b)$, i oznaczmy przez $\mathcal{R}$ odwzorowanie liniowe przyporządkowujące rozwiązaniu $\boldsymbol{\varphi}(\cdot)$ układu (ULJn) jego wartość w t_0. Z Twierdzenia 7.3 wynika, że $\mathcal{R}$ jest różnowartościowe i „na”, zatem jest izomorfizmem przestrzeni liniowych $\mathbb{S}$ i $\mathbb{R}^n$. □

Udowodnimy teraz pomocniczy lemat.

Lemat 7.5. *Niech* $(\boldsymbol{\varphi}_1, \dots, \boldsymbol{\varphi}_n)$ *będzie układem rozwiązań układu* (ULJn). *Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(i) *Układ funkcji* $(\boldsymbol{\varphi}_1, \dots, \boldsymbol{\varphi}_n)$ *jest liniowo niezależny.*

(ii) *Istnieje* $t_0 \in (a,b)$ *takie, że układ wektorów* $(\boldsymbol{\varphi}_1(t_0), \dots, \boldsymbol{\varphi}_n(t_0))$ *jest liniowo niezależny.*

(iii) *Dla każdego* $t \in (a,b)$ *układ wektorów* $(\boldsymbol{\varphi}_1(t), \dots, \boldsymbol{\varphi}_n(t))$ *jest liniowo niezależny.*

Dowód. Udowodnimy równoważność zaprzeczeń powyższych warunków, tzn.

(i)′ *Układ funkcji* $(\boldsymbol{\varphi}_1, \dots, \boldsymbol{\varphi}_n)$ *jest liniowo zależny.*

(ii)′ *Dla każdego* $t \in (a,b)$ *układ wektorów* $(\boldsymbol{\varphi}_1(t), \dots, \boldsymbol{\varphi}_n(t))$ *jest liniowo zależny.*

(iii)′ *Istnieje* $t_0 \in (a,b)$ *takie, że układ wektorów* $(\boldsymbol{\varphi}_1(t_0), \dots, \boldsymbol{\varphi}_n(t_0))$ *jest liniowo zależny.*

Implikacje (i)′ $\implies$ (ii)′ $\implies$ (iii)′ są oczywiste. Załóżmy (iii)′. Zatem co najmniej jeden z wektorów $(\boldsymbol{\varphi}_1(t_0), \dots, \boldsymbol{\varphi}_n(t_0))$ jest kombinacją liniową pozostałych. Dla ustalenia uwagi załóżmy, że $\boldsymbol{\varphi}_1(t_0) = c_2\boldsymbol{\varphi}_2(t_0) + \dots + c_n\boldsymbol{\varphi}_n(t_0)$. Zauważmy, że zarówno funkcja $\boldsymbol{\varphi}_1$ jak i $c_2\boldsymbol{\varphi}_2 + \dots + c_n\boldsymbol{\varphi}_n$ spełniają zagadnienie początkowe $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\varphi}_1(t_0)$. Z Tw. 7.3 wynika, że $\boldsymbol{\varphi}_1 = c_2\boldsymbol{\varphi}_2 + \dots + c_n\boldsymbol{\varphi}_n$, stąd układ funkcji $(\boldsymbol{\varphi}_1, \dots, \boldsymbol{\varphi}_n)$ jest liniowo zależny. □

Niech $(\boldsymbol{\varphi}_1, \dots, \boldsymbol{\varphi}_n)$ będzie układem rozwiązań układu (ULJn). Oznaczmy $\boldsymbol{\varphi}_i = \operatorname{col}(\varphi_{1i}, \dots, \varphi_{ni})$. Łatwo zauważyć, że funkcja macierzowa $\Phi(\cdot) := [\varphi_{ij}(\cdot)]_{i,j=1}^n$ (czyli macierz otrzymana przez ustawienie obok siebie wektorów kolumnowych $\boldsymbol{\varphi}_1, \dots, \boldsymbol{\varphi}_n$) jest rozwiązaniem następującego *macierzowego liniowego równania różniczkowego*

$$X' = A(t)X. \tag{7.1}$$

Definicja. Układ $(\boldsymbol{\varphi}_1, \dots, \boldsymbol{\varphi}_n)$ nazywamy *układem fundamentalnym* (lub *podstawowym*) układu równań różniczkowych liniowych jednorodnych (ULJn) gdy funkcje wektorowe $\boldsymbol{\varphi}_1, \dots, \boldsymbol{\varphi}_n$ tworzą bazę przestrzeni liniowej rozwiązań układu (ULJn).
Z Lematu 7.5 (niemal) bezpośrednio wynika

Lemat 7.6. *Układy fundamentalne układu równań różniczkowych liniowych jednorodnych* (ULJn) *odpowiadają tym rozwiązaniom* $\Phi(\cdot)$ *równania macierzowego* (7.1) *dla których* $\det \Phi(t) \neq 0$ *dla każdego* $t \in (a, b)$ (*lub* $\det \Phi(t_0) \neq 0$ *dla pewnego* $t_0 \in (a, b)$).

Definicja. Rozwiązanie $\Phi(\cdot)$ równania macierzowego (7.1) nazywamy *macierzą fundamentalną* (lub *podstawową*) układu (ULJn) gdy $\det \Phi(t) \neq 0$ dla każdego $t \in (a, b)$ (alternatywnie, gdy $\det \Phi(t_0) \neq 0$ dla pewnego $t_0 \in (a, b)$).

Definicja. Wyznacznikiem Wrońskiego (lub *wrońskianem*) układu $(\boldsymbol{\varphi}_1, \dots, \boldsymbol{\varphi}_n)$ rozwiązań układu (ULJn) nazywamy wyznacznik $\det \Phi(\cdot)$ (oznaczamy go przez $W(\boldsymbol{\varphi}_1, \dots, \boldsymbol{\varphi}_n)(\cdot)$).

Twierdzenie 7.7 (Wzór Liouville'a[2])**.** *Niech* $(\boldsymbol{\varphi}_1, \dots, \boldsymbol{\varphi}_n)$ *będzie układem rozwiązań układu* (ULJn). *Wówczas wrońskian* $W(\cdot) := W(\boldsymbol{\varphi}_1, \dots, \boldsymbol{\varphi}_n)(\cdot)$ *spełnia równanie różniczkowe*

$$W' = \operatorname{tr} A(t) \cdot W.$$

[2] Joseph Liouville (1809 – 1882), matematyk francuski

Wynika stąd, że

$$W(t) = W(s) \exp\left(\int_s^t \operatorname{tr} A(\tau)\, d\tau\right) \ \textit{dla } s, t \in (a, b).$$

Przypominam, że $\operatorname{tr} A$, *ślad* macierzy A, oznacza sumę elementów na głównej przekątnej A, $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Lemat 7.8. (i) *Jeżeli* $\Phi(\cdot)$ *jest macierzą fundamentalną układu* (ULJn) *i* B *jest stałą macierzą nieosobliwą, to* $\Phi(\cdot)B$ *jest macierzą fundamentalną układu* (ULJn).
(ii) *Jeżeli* $\Phi(\cdot)$ *i* $\Psi(\cdot)$ *są macierzami fundamentalnymi układu* (ULJn), *to istnieje stała macierz nieosobliwa* B *taka, że* $\Psi(t) = \Phi(t)B$ *dla każdego* $t \in (a, b)$.

Dowód. (i) Na przedziale (a, b) zachodzi

$$(\Phi B)' = \Phi' B = (A(t)\Phi)B = A(t)(\Phi B),$$

zatem funkcja macierzowa $\Phi(\cdot)B$ jest rozwiązaniem macierzowego równania różniczkowego $X' = A(t)X$. Ponadto $\det(\Phi B)(t) \neq 0$ dla każdego $t \in (a, b)$.
(ii) Oznaczmy $\Xi(t) := \Phi^{-1}(t)\Psi(t)$. Zachodzą następujące równości

$$\begin{aligned} \Xi'(t) &= (\Phi^{-1}(t))'\Psi(t) + \Phi^{-1}(t)\Psi(t)' = (-\Phi^{-1}(t)\Phi'(t)\Phi^{-1}(t))\Psi(t) + \Phi^{-1}(t)\Psi'(t) = \\ &= \Phi^{-1}(t)(\Psi'(t) - \Phi'(t)\Phi^{-1}(t)\Psi(t)) = \Phi^{-1}(t)(A(t)\Psi(t) - A(t)\Phi(t)\Phi^{-1}(t)\Psi(t)) \equiv 0, \end{aligned}$$

zatem $\Xi(t) = \text{const}$. □

Wniosek. *Dla macierzy fundamentalnych* Φ *i* Ψ *układu* (ULJn) *mamy*

$$\Phi(t)\Phi^{-1}(s) = \Psi(t)\Psi^{-1}(s) \quad \forall t, s \in (a, b).$$

Definicja. Macierzą Cauchy'ego układu równań różniczkowych liniowych jednorodnych (ULJn) nazywamy funkcję macierzową dwóch zmiennych $\Phi(t; s) := \Phi(t)\Phi^{-1}(s)$, $s, t \in (a, b)$, gdzie $\Phi(\cdot)$ jest macierzą fundamentalną układu (ULJn).
Z powyższego wniosku wynika, że (w odróżnieniu od macierzy fundamentalnej) macierz Cauchy'ego jest jednoznacznie określona.
Poniższe własności macierzy Cauchy'ego są łatwe do sprawdzenia:
1) $\Phi(t; t) = I \quad \forall t \in (a, b)$,
2) $\Phi(u; t)\Phi(t; s) = \Phi(u; s) \quad \forall s, t, u \in (a, b)$.

Twierdzenie 7.9. *Rozwiązanie zagadnienia początkowego*

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

wyraża się wzorem

$$\Phi(t; t_0)\mathbf{x}_0,$$

gdzie $\Phi(\cdot;\cdot)$ *jest macierzą Cauchy'ego układu* $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$*.*

Dowód.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi(t; t_0)\mathbf{x}_0) = \frac{\partial}{\partial t}(\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0) = \\ = \Phi'(t)\Phi^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0 = A(t)\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0 = A(t)\Phi(t; t_0)\mathbf{x}_0,$$

zatem $t \mapsto \Phi(t; t_0)\mathbf{x}_0$ jest rozwiązaniem układu. Zauważmy ponadto, że $\Phi(t_0; t_0)\mathbf{x}_0 = \Phi(t_0)\Phi^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$. □

7.4 Układy równań różniczkowych liniowych niejednorodnych. Uzmiennianie stałych

W bieżącym podrozdziale rozpatrujemy układ n równań różniczkowych liniowych niejednorodnych

(ULNn) $$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{h}(t),$$

gdzie $A\colon (a, b) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ jest ciągłą funkcją macierzową i $\mathbf{h}\colon (a, b) \to \mathbb{R}^n$ jest ciągłą funkcją wektorową.
Dla układu równań różniczkowych liniowych niejednorodnych (ULNn) układ równań różniczkowych liniowych jednorodnych

(ULJn) $$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$$

nazywamy *układem stowarzyszonym* z (ULNn).
W świetle Tw. 7.4 i definicji układu fundamentalnego poniższy wynik jest oczywisty.

Twierdzenie 7.10. *Niech* $(\boldsymbol{\varphi}_1(\cdot), \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n(\cdot))$ *będzie ustalonym układem fundamentalnym układu równań liniowych jednorodnych* $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$*, i niech* $\boldsymbol{\psi}(\cdot)$ *będzie ustalonym rozwiązaniem układu* (ULNn)*. Każde rozwiązanie układu* (ULNn) *równań różniczkowych liniowych niejednorodnych można jednoznacznie zapisać w postaci*

(7.2) $$C_1\boldsymbol{\varphi}_1(\cdot) + \cdots + C_n\boldsymbol{\varphi}_n(\cdot) + \boldsymbol{\psi}(\cdot),$$

gdzie $C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$ *są stałymi,* Wzór (7.2), gdzie $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}$ są dowolne, nazywamy *rozwiązaniem ogólnym układu równań różniczkowych liniowych niejednorodnych*. Stosując terminologię z algebry liniowej, można powiedzieć, że *zbiór rozwiązań układu równań różniczkowych liniowych niejednorodnych jest przestrzenią afiniczną (nad ciałem liczb rzeczywistych) wymiaru n.*

Twierdzenie 7.11 (Wzór na uzmiennianie stałych)**.** *Rozwiązanie zagadnienia początkowego*

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{h}(t) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

jest równe

$$\Phi(t; t_0)\mathbf{x}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t; s)\mathbf{h}(s)\, ds,$$

gdzie $\Phi(\cdot;\cdot)$ jest macierzą Cauchy'ego układu stowarzyszonego $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$.

Dowód. Niech $\boldsymbol{\varphi}(\cdot)$ będzie rozwiązaniem naszego zagadnienia początkowego, i niech Φ będzie pewną macierzą fundamentalną układu równań jednorodnych. Zachodzi następująca równość:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\Phi^{-1}(t)\boldsymbol{\varphi}(t)) &= (\Phi^{-1})'(t)\boldsymbol{\varphi}(t) + \Phi^{-1}(t)\boldsymbol{\varphi}'(t) = \\ &= -\Phi^{-1}(t)\Phi'(t)\Phi^{-1}(t)\boldsymbol{\varphi}(t) + \Phi^{-1}(t)(A(t)\boldsymbol{\varphi}(t) + \mathbf{h}(t)) = \\ &= -\Phi^{-1}(t)A(t)\Phi(t)\Phi^{-1}(t)\boldsymbol{\varphi}(t) + \Phi^{-1}(t)A(t)\boldsymbol{\varphi}(t) + \Phi^{-1}(t)\mathbf{h}(t). \end{aligned}$$

Całkując tę równość otrzymujemy

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{d}{ds}(\Phi^{-1}(s)\boldsymbol{\varphi}(s))\, ds = \int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\mathbf{h}(s)\, ds.$$

Lewa strona jest równa

$$\Phi^{-1}(t)\boldsymbol{\varphi}(t) - \Phi^{-1}(t_0)\boldsymbol{\varphi}(t_0).$$

Mamy zatem

$$\Phi^{-1}(t)\boldsymbol{\varphi}(t) = \Phi^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\mathbf{h}(s)\, ds.$$

Mnożąc obie strony powyższej równości przez $\Phi(t)$ (z lewej strony) otrzymujemy żądany wzór. $\square$

W praktyce powyższy wzór stosuje się w nieco innej wersji: szukamy rozwiązania ogólnego układu równań niejednorodnych (ULNn) w postaci

$$\Phi(\cdot)\mathbf{c}(\cdot),$$

gdzie $\Phi(\cdot)$ jest ustaloną macierzą fundamentalną układu stowarzyszonego, oraz $\mathbf{c}(\cdot) := \operatorname{col}(c_1(\cdot), \ldots, c_n(\cdot))$ jest pewną (jeszcze nie znaną) funkcją wektorową. Zachodzą następujące równości

$$(\Phi(t)\mathbf{c}(t))' = A(t)\Phi(t)\mathbf{c}(t) + \mathbf{h}(t) \quad \forall t \in (a, b).$$

Lecz lewa strona jest równa

$$\Phi'(t)\mathbf{c}(t) + \Phi(t)\mathbf{c}'(t) = A(t)\Phi(t)\mathbf{c}(t) + \Phi(t)\mathbf{c}'(t),$$

co daje

$$\Phi(t)\mathbf{c}'(t) = \mathbf{h}(t),$$

a po rozpisaniu

$$\begin{cases} \varphi_{11}(t)c_1'(t) + \varphi_{12}(t)c_2'(t) + \cdots + \varphi_{1n}(t)c_n'(t) = h_1(t) \\ \varphi_{21}(t)c_1'(t) + \varphi_{22}(t)c_2'(t) + \cdots + \varphi_{2n}(t)c_n'(t) = h_2(t) \\ \vdots \\ \varphi_{n1}(t)c_1'(t) + \varphi_{n2}(t)c_2'(t) + \cdots + \varphi_{nn}(t)c_n'(t) = h_n(t) \end{cases}$$

Powyższą metodę nazywamy *metodą uzmienniania stałych.*

7.5 Równania różniczkowe liniowe jednorodne wyższych rzędów: Podstawowe pojęcia i właściwości.

Definicja. Równaniem różniczkowym zwyczajnym liniowym n-tego rzędu nazywamy równanie

$$(\mathrm{RL}n) \qquad x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(t)x' + p_n(t)x = h(t),$$

gdzie $p_1, \ldots, p_n \colon (a, b) \to \mathbb{R}$ (*współczynniki* równania (RLn)), $h \colon (a, b) \to \mathbb{R}$ (*wyraz wolny* równania (RLn))).
Stosując metodę z Rozdziału 6 wykazujemy, że równanie (RLn) jest równoważne układowi równań różniczkowych liniowych

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -p_n(t) & \ldots & \ldots & \ldots & -p_1(t) \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h(t) \end{bmatrix}.$$

Definicja. Równanie (RLn) nazywamy *równaniem różniczkowym liniowym n-tego rzędu jednorodnym* gdy $h \equiv 0$. W przeciwnym przypadku równanie nazywamy *równaniem różniczkowym liniowym n-tego rzędu niejednorodnym.*

Twierdzenie 7.12. *Załóżmy, że funkcje $p_1, \dots, p_n \colon (a,b) \to \mathbb{R}$ i $h \colon (a,b) \to \mathbb{R}$ są ciągłe. Wówczas dla każdego $(t_0, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \in (a,b) \times \mathbb{R}^n$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie nieprzedłużalne $\varphi \colon (a,b) \to \mathbb{R}$ zagadnienia początkowego*

$$\begin{cases} x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(t)x' + p_n(t)x = h(t) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}. \end{cases} \tag{7.3}$$

7.6 Równania różniczkowe liniowe jednorodne wyższych rzędów.

W bieżącym podrozdziale rozpatrujemy równanie różniczkowe liniowe jednorodne n-tego rzędu

$$x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(t)x' + p_n(t)x = 0, \tag{RLJn}$$

gdzie $p_0, \dots, p_n \colon (a,b) \to \mathbb{R}$ są funkcjami ciągłymi.

Twierdzenie 7.13. *Zbiór wszystkich rozwiązań równania* (RLJn) *liniowego jednorodnego n-tego rzędu tworzy przestrzeń liniową* (*nad ciałem liczb rzeczywistych*) *wymiaru n.*

Definicja. Wyznacznikiem Wrońskiego (lub *wrońskianem*) układu $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ rozwiązań równania (RLJn) nazywamy wyznacznik funkcyjny

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \dots & \varphi_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

(oznaczamy go przez $W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(\cdot)$.

Definicja. Układ $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ nazywamy *układem fundamentalnym* (lub *podstawowym*) równania różniczkowego liniowego jednorodnego n-tego rzędu (RLJn), gdy funkcje $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ tworzą bazę przestrzeni liniowej rozwiązań równania (RLJn).

Fakt 7.14. *Niech* $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ *będzie układem rozwiązań równania* (RLJn). *Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(i) $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ *jest układem fundamentalnym równania* (RLJn).

(ii) *Istnieje* $t_0 \in (a, b)$ *takie, że* $W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(t_0) \neq 0$.

(iii) $W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(t) \neq 0$ *dla każdego* $t \in (a, b)$.

Przykład. Przy ustalonym $t_0 \in (a, b)$, oznaczmy przez φ_j, $0 \leqslant j \leqslant n-1$, rozwiązanie równania (RLJn) spełniające warunki początkowe $x^{(k)}(t_0) = \delta_{jk}$, gdzie $0 \leqslant k \leqslant n-1$ (δ_{jk} oznacza deltę Kroneckera). Zachodzi $W(\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1})(t_0) = \det \mathrm{Id} = 1$, zatem, na podstawie powyższego faktu, układ $(\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1})$ jest układem fundamentalnym.

Twierdzenie 7.15 (Wzór Liouville'a, dla $n = 2$ zwany też wzorem Abela[3])**.** *Niech* $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ *będzie układem rozwiązań równania* (RLJn). *Wówczas wrońskian* $W(\cdot) := W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(\cdot)$ *spełnia równanie różniczkowe*

$$W' = -p_1(t)W.$$

Wynika stąd, że

$$W(t) = W(s) \exp\Big(-\int_s^t p_1(\tau)\,d\tau\Big) \ \textit{dla } t_0, t \in (a, b).$$

Nie ma ogólnego wzoru pozwalającego wyrazić rozwiązanie równania różniczkowego liniowego jednorodnego (rzędu wyższego niż 1) w postaci złożenia skończonej ilości operacji typu całkowania, nakładania funkcji wykładniczej itp. Niemniej jednak, gdy znamy jedno rozwiązanie $\eta\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ (nie przyjmujące nigdzie wartości 0) równania (RLJn), poprzez podstawienie

$$x = y\eta$$

równanie (RLJn) można sprowadzić do równania liniowego jednorodnego rzędu $n-1$. Istotnie, otrzymujemy wtedy

$$\begin{aligned}
y^{(n)}\eta + \binom{n}{1} y^{(n-1)}\eta' + \dots + \binom{n}{n-1} y'\eta^{(n-1)} + y\eta^{(n)} &+ \\
+ p_1(t)\Big(y^{(n-1)}\eta + \binom{n-1}{1} y^{(n-2)}\eta' + \dots + \binom{n-1}{n-2} y'\eta^{(n-2)} + y\eta^{(n-1)}\Big) &+ \\
+ \dots &+ \\
+ p_{n-1}(t)(y'\eta + y\eta') &+ \\
+ p_n(t)y\eta &= 0,
\end{aligned}$$

[3]Niels Henrik Abel (1802 – 1829), matematyk norweski

czyli
$$y^{(n)}\eta + \tilde{q}_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + \tilde{q}_{n-1}(t)y' = 0.$$
Dzielimy obie strony przez η:
$$y^{(n)} + q_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + q_{n-1}(t)y' = 0,$$
i podstawiamy $z = y'$:
$$z^{(n-1)} + q_1(t)z^{(n-1)} + \cdots + q_{n-1}(t)z = 0. \tag{7.4}$$
Niech $(\psi_1, \dots, \psi_{n-1})$ będzie układem fundamentalnym równania (7.4). Wówczas $(\eta\varphi_1, \dots, \eta\varphi_{n-1}, \eta)$, gdzie φ_j jest pewną funkcją pierwotną funkcji ψ_j, jest układem fundamentalnym równania (RLJn). Aby to sprawdzić, zauważmy, że wystarczy stwierdzić iż funkcje $\eta\varphi_1, \dots, \eta\varphi_{n-1}, \eta$ są liniowo niezależne. Niech $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ będą takie, że
$$c_1\eta\varphi_1 + \cdots + c_{n-1}\eta\varphi_{n-1} + c_n\eta \equiv 0.$$
Dzieląc obie strony przez η otrzymujemy
$$c_1\varphi_1 + \cdots + c_{n-1}\varphi_{n-1} + c_n \equiv 0. \tag{7.5}$$
Różniczkując powyższą równość dostajemy
$$c_1\psi_1 + \cdots + c_{n-1}\psi_{n-1} \equiv 0,$$
zatem $c_1 = \cdots = c_{n-1} = 0$. Z równości (7.5) otrzymujemy $c_n = 0$.

7.7 Równania różniczkowe liniowe niejednorodne wyższych rzędów.

W bieżącym podrozdziale rozpatrujemy równanie różniczkowe liniowe niejednorodne n-tego rzędu
$$x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(t)x' + p_n(t)x = h(t), \tag{RLNn}$$
gdzie $p_1, \dots, p_n, h\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ są funkcjami ciągłymi.
Dla równania różniczkowego liniowego niejednorodnego równanie różniczkowe liniowe jednorodne
$$x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(t)x' + p_n(t)x = 0 \tag{RLJn}$$
nazywamy *równaniem stowarzyszonym* z (RLNn).

Twierdzenie 7.16. *Niech* $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ *będzie ustalonym układem fundamentalnym równania liniowego jednorodnego* (RLJn)*, i niech* ψ *będzie ustalonym rozwiązaniem równania* (RLNn)*. Każde rozwiązanie równania różniczkowego liniowego niejednorodnego* (RLNn) *można jednoznacznie zapisać w postaci*

$$C_1\varphi_1(\cdot) + \dots + C_n\varphi_n(\cdot) + \psi(\cdot), \tag{7.6}$$

gdzie $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}$ *są stałymi.*

Wzór (7.6), gdzie $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}$ są dowolne, nazywamy *rozwiązaniem ogólnym równania różniczkowego liniowego niejednorodnego* n*-tego rzędu.*

Metoda uzmienniania stałych dla równania różniczkowego liniowego niejednorodnego n-tego rzędu polega na szukaniu rozwiązania ogólnego w postaci

$$c_1(\cdot)\varphi_1(\cdot) + \dots + c_n(\cdot)\varphi_n(\cdot),$$

gdzie $(\varphi_1(\cdot), \dots, \varphi_n(\cdot))$ jest układem fundamentalnym równania liniowego jednorodnego (RLJn) oraz $c_1(\cdot), \dots, c_1(\cdot)$ są (jeszcze nie znanymi) funkcjami. Układ (algebraicznych) równań liniowych przyjmuje postać:

$$\begin{cases} \varphi_1(t)c_1'(t) + \varphi_2(t)c_2'(t) + \dots + \varphi_n(t)c_n'(t) = 0 \\ \varphi_1'(t)c_1'(t) + \varphi_2'(t)c_2'(t) + \dots + \varphi_n'(t)c_n'(t) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_1^{(n-2)}(t)c_1'(t) + \varphi_2^{(n-2)}(t)c_2'(t) + \dots + \varphi_n^{(n-2)}(t)c_n'(t) = 0 \\ \varphi_1^{(n-1)}(t)c_1'(t) + \varphi_2^{(n-1)}(t)c_2'(t) + \dots + \varphi_n^{(n-1)}(t)c_n'(t) = h(t) \end{cases}$$