8 Układy i równania liniowe o stałych współczynnikach

8.1 Definicja układu równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach.

Definicja. Układem n równań różniczkowych zwyczajnych liniowych jednorodnych o stałych współczynnikach nazywamy układ

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \tag{ULSn}$$

gdzie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

8.2 Podstawowe własności macierzy e^{tA}

Niech $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n}$ będzie macierzą o wyrazach zespolonych. W niniejszym rozdziale $\|A\|$ oznaczać będzie normę

$$\|A\| := (\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2)^{1/2}.$$

Lemat 8.1. *Dla dowolnych macierzy $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ zachodzi*

$$\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|. \tag{8.1}$$

(Normę na przestrzeni $\mathbb{C}^{n\times n}$ spełniającą własność (8.1) nazywamy *normą macierzową*.)

Dla $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ i $t \in \mathbb{R}$ oznaczmy

$$e^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = I + \frac{tA}{1!} + \frac{t^2A^2}{2!} + \frac{t^3A^3}{3!} + \dots$$

(zauważmy że macierz zerowa podniesiona do potęgi zero to I). e^{tA} będziemy czasem oznaczali $\exp(tA)$. Niekiedy spotyka się też zapis e^{At}, $\exp(At)$.

Jak na razie, w powyższej definicji mamy tylko formalny zapis. Należy udowodnić, że powyższy szereg jest zbieżny. Będzie to treścią pierwszej części poniższego twierdzenia.

Twierdzenie 8.2. a) *Dla każdego $M > 0$, szereg funkcji macierzowych $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$ jest zbieżny jednostajnie na przedziale $[-M, M]$.*

b) *Funkcja $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{tA} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ jest różniczkowalna, oraz*

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Szkic dowodu. a) Zbieżność jednostajna oznacza, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $k_0 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\left\| e^{tA} - \sum_{j=0}^{k} \frac{(tA)^j}{j!} \right\| < \varepsilon$$

dla wszystkich $k \geqslant k_0$ i wszystkich $t \in [-M, M]$. Jednak wciąż jeszcze nie wiemy, czy e^{tA} istnieje. Lecz powyższe stwierdzenie możemy zastąpić równoważnym (odnoszącym się do ciągów podstawowych): dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $k_1 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\left\| \sum_{j=k+1}^{l} \frac{(tA)^j}{j!} \right\| < \varepsilon$$

dla wszystkich $k, l \geqslant k_1$ i wszystkich $t \in [-M, M]$. Powyższa nierówność wynika z następujących oszacowań

$$\left\| \sum_{j=k+1}^{l} \frac{(tA)^j}{j!} \right\| \leqslant \sum_{j=k+1}^{l} \frac{\|(tA)^j\|}{j!} \leqslant \sum_{j=k+1}^{l} \frac{M^j \|A\|^j}{j!}$$

i ze zbieżności szeregu liczbowego $\sum_{j=0}^{\infty} \xi^j / j!$, jednostajnie i bezwzględnie dla ξ z przedziału zwartego.

b) Różniczkując formalnie szereg

$$I + \frac{tA}{1!} + \frac{t^2 A^2}{2!} + \frac{t^3 A^3}{3!} + \dots$$

wyraz po wyrazie otrzymujemy

$$\frac{A}{1!} + \frac{2tA^2}{2!} + \frac{3t^2 A^3}{3!} + \dots = A \left(I + \frac{tA}{1!} + \frac{t^2 A^2}{2!} + \dots \right).$$

Z części a) wynika, że szereg $I + \frac{tI}{1!} + \dots$ jest zbieżny jednostajnie na $[-M, M]$ do e^{tA}, zatem szereg $A(I + \frac{tI}{1!} + \dots)$ jest zbieżny jednostajnie na $[-M, M]$ do Ae^{tA}. Kopiując dowód twierdzenia o różniczkowalności ciągu funkcji rzeczywistych wyraz po wyrazie otrzymujemy, że jeżeli szereg pochodnych jest zbieżny jednostajnie (co właśnie udowodniliśmy) i szereg wyjściowy jest zbieżny choć w jednym punkcie, to suma wyjściowego szeregu jest różniczkowalna i jej pochodna jest równa sumie szeregu pochodnych. □

Z powyższego twierdzenia wynika, że dla $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ funkcja macierzowa $t \mapsto e^{tA}$ jest rozwiązaniem macierzowego równania różniczkowego

$$X' = AX.$$

Lemat 8.3.

$$Ae^{tA} = e^{tA}A.$$

Dowód. Każda suma częściowa szeregu definiującego e^{tA} komutuje z A. □

Twierdzenie 8.4. a) $e^{0\cdot A} = I$,

b) $e^{(s+t)A} = e^{sA}e^{tA}$ *dla wszystkich* $s, t \in \mathbb{R}$,

c) $e^{-tA} = (e^{tA})^{-1}$ *dla wszystkich* $t \in \mathbb{R}$.

Dowód. Część a) jest oczywista. Aby udowodnić b), ustalmy $s \in \mathbb{R}$ i oznaczmy $C(t) := e^{(s+t)A}$. Korzystając ze wzoru na różniczkowanie funkcji złożonej łatwo sprawdzić, że $C'(t) = Ae^{(s+t)A}$. Zatem funkcja $C(\cdot)$ jest rozwiązaniem zagadnienia początkowego dla macierzowego równania różniczkowego liniowego jednorodnego

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = e^{sA}. \end{cases}$$

Lecz funkcja macierzowa $D(t) := e^{sA}e^{tA}$ też spełnia powyższe zagadnienie początkowe (zauważmy, że $D'(t) = e^{sA}Ae^{tA} = Ae^{sA}e^{tA} = AD(t)$). Ponieważ zagadnienie początkowego dla liniowego macierzowego równania różniczkowego ma dokładnie jedno rozwiązanie nieprzedłużalne, wynika stąd teza.

Aby wykazać c), korzystamy z równości

$$e^{tA}e^{-tA} = e^{(t-t)A} = e^{0\cdot A} = I.$$

□

Z powyższych twierdzeń wynika, że gdy A jest macierzą rzeczywistą, to funkcja $t \mapsto e^{tA}$ jest macierzą fundamentalną, zaś $\Phi(t; s) = e^{(t-s)A}$ macierzą Cauchy'ego dla układu równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach (ULSn). Rozwiązaniem zagadnienia początkowego

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = A\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

jest funkcja wektorowa $t \mapsto e^{(t-t_0)A}\mathbf{x}_0$.

Wzór na uzmiennianie stałych przyjmuje postać: rozwiązaniem zagadnienia początkowego

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{h}(t) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

jest funkcja wektorowa

$$e^{(t-t_0)A}\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}\,\mathbf{h}(s)\,ds.$$

8.3 Dalsze własności $\exp(tA)$

Lemat 8.5. *Jeżeli macierze A i B komutują, to*

$$e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dowód. Ponieważ $\sum_{j=0}^{k} \frac{(tA)^j}{j!}$ komutuje z B, przechodząc z k do ∞ otrzymujemy

$$e^{tA}B = Be^{tA}.$$

Mamy

$$\frac{d}{dt}e^{t(A+B)} = (A+B)e^{t(A+B)}$$

oraz

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}e^{tB}) = Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tB} = Ae^{tA}e^{tB} + Be^{tA}e^{tB} = (A+B)e^{t(A+B)}.$$

Obie funkcje $e^{t(A+B)}$ i $e^{tA}e^{tB}$ są rozwiązaniami zagadnienia początkowego

$$\begin{cases} X' = (A+B)X \\ X(0) = I, \end{cases}$$

zatem są identyczne. □

Gdy macierze A i B nie komutują, może zachodzić

$$e^{t(A+B)} \neq e^{tA}e^{tB}.$$

Podobnie, dla układu

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x},$$

gdzie $A\colon (a,b) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ jest ciągłą funkcją macierzową, wzór na macierz Cauchy'ego:

$$\Phi(t;s) = \exp \int_s^t A(\tau)\,d\tau, \text{ dla dowolnych } s,t \in (a,b),$$

nie musi zachodzić. Wzór ten jest prawdziwy na przykład, gdy dla dowolnych $t_1, t_2 \in (a,b)$ macierze $A(t_1)$ i $A(t_2)$ komutują.

Lemat 8.6. *Niech $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ będzie dowolną macierzą i $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ będzie macierzą nieosobliwą. Wówczas*

$$\exp(t(BAB^{-1})) = Be^{tA}B^{-1} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dowód. Sprawdzamy, że równość zachodzi dla sum częściowych, i przechodzimy do granicy. □

Fakt 8.7. *Niech A będzie macierzą blokową,*

$$A = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix},$$

gdzie $B \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $C \in \mathbb{C}^{(n-m)\times(n-m)}$. Wówczas

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{tB} & 0 \\ 0 & e^{tC} \end{bmatrix}.$$

Wniosek.

$$\exp(t\,\mathrm{diag}(a_1,\dots,a_n)) = \mathrm{diag}(e^{a_1 t},\dots,e^{a_n t}).$$

Twierdzenie 8.8. *Niech $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ będzie klatką Jordana,*

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \dots\dots & & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Wówczas

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & e^{\lambda t}\frac{t}{1!} & e^{\lambda t}\frac{t^2}{2!} & \dots & e^{\lambda t}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & e^{\lambda t} & e^{\lambda t}\frac{t}{1!} & \dots & e^{\lambda t}\frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda t} & e^{\lambda t}\frac{t}{1!} \\ 0 & \dots\dots & & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}.$$

Dowód. Macierz A można zapisać jako $\lambda I + B$, gdzie

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Macierze λI i B komutują, zatem $e^{tA} = e^{t\lambda I} e^{tB} = e^{\lambda t} e^{tB}$ (Lemat 8.5). Wystarczy teraz zauważyć, że

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots\dots & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots\dots\dots & & & 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots, B^{n-1} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$B^j = 0$ dla $j = n, n+1, \dots,$ i zastosować definicję e^{tB}. □

Powróćmy do układu równań różniczkowych liniowych jednorodnych o stałych współczynnikach

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \tag{ULSn}$$

gdzie A jest macierzą o wyrazach *rzeczywistych.* Jak wiadomo, przy pomocy odpowiedniej zmiany bazy macierz A można doprowadzić do postaci Jordana. Jako że wiemy już jak wygląda exp dla macierzy w postaci Jordana, (teoretycznie) znamy rozwiązanie ogólne powyższego układu. Jednak rozwiązanie to może wyrażać się w postaci zespolonej kombinacji liniowej funkcji wektorowych o składowych zespolonych, podczas gdy interesują nas rozwiązania o składowych rzeczywistych.

W istocie nie jest to zbyt wielkim utrudnieniem, gdyż, jak łatwo sprawdzić, jeśli $\boldsymbol{\varphi}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ jest rozwiązaniem układu (ULSn), to sprzężenie $\bar{\boldsymbol{\varphi}}$ też jest rozwiązaniem układu (ULSn). Wynika z tego natychmiast, że $\operatorname{Re}\boldsymbol{\varphi}$ i $\operatorname{Im}\boldsymbol{\varphi}$ są też rozwiązaniami układu.

Lemat 8.9. *Załóżmy, że n rozwiązań $(\boldsymbol{\varphi}_1, \dots, \boldsymbol{\varphi}_j, \boldsymbol{\psi}_1, \bar{\boldsymbol{\psi}}_1, \dots, \boldsymbol{\psi}_s, \bar{\boldsymbol{\psi}}_s)$ układu* (ULSn)*, gdzie $\boldsymbol{\varphi}_1, \dots, \boldsymbol{\varphi}_j$ są rzeczywiste, jest liniowo niezależnych nad ciałem liczb zespolonych. Wówczas n rozwiązań rzeczywistych $\boldsymbol{\varphi}_1, \dots, \boldsymbol{\varphi}_j, \operatorname{Re}\boldsymbol{\psi}_1, \operatorname{Im}\boldsymbol{\psi}_1, \dots, \operatorname{Re}\boldsymbol{\psi}$ jest liniowo niezależnych nad ciałem liczb zespolonych, czyli tym bardziej nad ciałem liczb rzeczywistych.*

Dowód. Zauważmy, że złożenie odwzorowań liniowych z (zespolonej) przestrzeni liniowej wszystkich zespolonych rozwiązań układu w siebie, zadanych na bazach wzorami:

$$\operatorname{Re}\boldsymbol{\psi} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\psi} + \bar{\boldsymbol{\psi}}), \quad \operatorname{Im}\boldsymbol{\psi} = \frac{1}{2i}(\boldsymbol{\psi} - \bar{\boldsymbol{\psi}}),$$

oraz

$$\boldsymbol{\psi} = \operatorname{Re}\boldsymbol{\psi} + i \operatorname{Im}\boldsymbol{\psi}, \quad \bar{\boldsymbol{\psi}} = \operatorname{Re}\boldsymbol{\psi} - i \operatorname{Im}\boldsymbol{\psi},$$

jest identycznością. Zatem oba te odwzorowania, w szczególności pierwsze z nich, są izomorfizmami liniowymi, więc zachowują liniowe niezależności. □

Twierdzenie 8.10. *Załóżmy, że macierz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ma rzeczywiste wartości własne $\lambda_1, \dots, \lambda_j$, którym odpowiadają klatki Jordana wymiaru odpowiednio $k_1, \dots, k_j$, oraz zespolone (nierzeczywiste) wartości własne $\alpha_1 + i\beta_1, \alpha_1 - i\beta_1, l, \alpha_s + i\beta_s, \alpha_s - i\beta_s$, gdzie $\beta_1 > 0, \dots, \beta_s > 0$, którym odpowiadają klatki Jordana wymiaru odpowiednio $l_1, l_1, \dots, l_s, l_s$, przy czym $k_1 + \dots + k_j + 2(l_1 + \dots + l_s) = n$. Wówczas elementy macierzy fundamentalnej układu $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ są kombinacjami liniowymi funkcji*

$$
\begin{gathered}
e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \dots, t^{k_1-1}e^{\lambda_1 t},\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
e^{\lambda_j t}, te^{\lambda_j t}, \dots, t^{k_j-1}e^{\lambda_j t},\\
e^{\alpha_1 t}\cos(\beta_1 t), te^{\alpha_1 t}\cos(\beta_1 t), \dots, t^{l_1-1}e^{\alpha_1 t}\cos(\beta_1 t),\\
e^{\alpha_1 t}\sin(\beta_1 t), te^{\alpha_1 t}\sin(\beta_1 t), \dots, t^{l_1-1}e^{\alpha_1 t}\sin(\beta_1 t),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
e^{\alpha_s t}\cos(\beta_s t), te^{\alpha_s t}\cos(\beta_s t), \dots, t^{l_s-1}e^{\alpha_s t}\cos(\beta_s t),\\
e^{\alpha_s t}\sin(\beta_s t), te^{\alpha_s t}\sin(\beta_s t), \dots, t^{l_s-1}e^{\alpha_s t}\sin(\beta_s t),
\end{gathered}
$$

i każda z powyższych funkcji występuje w macierzy fundamentalnej.

8.4 Definicja równania różniczkowego liniowego o stałych współczynnikach.

Definicja. Równaniem różniczkowym zwyczajnym n-tego rzędu liniowym jednorodnym o stałych współczynnikach nazywamy równanie różniczkowe

$$
\text{(RLSJ}n\text{)} \qquad x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}x' + a_n x = 0,
$$

gdzie $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

8.5 Podstawowe własności równań liniowych jednorodnych o stałych współczynnikach

Przez $C^\infty = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ będziemy oznaczali przestrzeń liniową (nad ciałem liczb zespolonych) funkcji zespolonych klasy C^∞ określonych na $(-\infty, \infty)$.

Oznaczmy przez $\mathcal{L}$ operator różniczkowy działający z C^∞ w C^∞:

$$
\mathcal{L}\varphi := \varphi^{(n)} + a_1\varphi^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}\varphi' + a_n\varphi.
$$

Łatwo sprawdzić, że $\mathcal{L}$ jest odwzorowaniem liniowym.

Od tej chwili do odwołania będziemy dopuszczali też rozwiązania równania (RLSJn) będące funkcjami zespolonymi. Kopiując dowody odpowiednich faktów dla rozwiązań rzeczywistych można się przekonać, że zbiór wszystkich zespolonych rozwiązań równania różniczkowego (RLSJn) tworzy przestrzeń liniową nad ciałem liczb zespolonych wymiaru n.

Funkcja φ jest rozwiązaniem równania różniczkowego (RLSJn) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathcal{L}\varphi = 0,$$

czyli, innymi słowy, gdy

$$\varphi \in \ker \mathcal{L}.$$

Powyższy wynik nie jest tak oczywisty, jak by się wydawał na pierwszy rzut oka: jeśli φ jest rozwiązaniem równania (RLSJn), to z definicji jest to funkcja n-krotnie różniczkowalna i taka, że $\varphi^{(n)}(t) = -a_1\varphi^{(n-1)}(t) - \ldots - a_n\varphi(t)$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$. Skoro prawa strona jest w oczywisty sposób funkcją różniczkowalną, $\varphi^{(n)}$ jest też funkcją różniczkowalną, i zachodzi $\varphi^{(n+1)}(t) = -a_1\varphi^{(n)}(t) - \ldots - a_0\varphi'(t)$. Prawa strona jest różniczkowalna, zatem φ jest $(n+2)$-krotnie różniczkowalna. Przez indukcję dowodzimy, że φ jest klasy C^∞, zatem musi należeć do jądra operatora $\mathcal{L}$.

Niech D oznacza operator różniczkowania,

$$D\varphi := \varphi', \qquad \varphi \in C^{\infty.}$$

Zachodzi

$$\mathcal{L} = D^n + a_1D^{n-1} + \ldots + a_{n-1}D + a_n\mathrm{Id}.$$

(Tutaj i poniżej, dla odwzorowania liniowego L z przestrzeni liniowej w tę samą przestrzeń, L^k, $k \in \mathbb{N}$, oznacza k-krotne złożenie odwzorowania L. Podobnie, dla operatorów liniowych L i M, dla których złożenie $L \circ M$ jest określone, będziemy pisali LM zamiast $L \circ M$.)

Definicja. Wielomianem charakterystycznym równania różniczkowego (RLSJn) nazywamy wielomian (zmiennej zespolonej)

$$w(\lambda) := \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

Równanie charakterystyczne równania (RLSJn) to

$$w(\lambda) = 0.$$

Można formalnie zapisać

$$\mathcal{L} = w(D).$$

Niech
$$w(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \dots (\lambda - \lambda_m)^{k_m}$$
będzie rozkładem wielomianu charakterystycznego na czynniki liniowe. Zakładamy, że pierwiastki $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ są parami różne. Zapiszmy
$$\mathcal{L} = (D - \lambda_1 \mathrm{Id})^{k_1} \dots (D - \lambda_m \mathrm{Id})^{k_m}$$

Lemat 8.11. $\ker (D - \lambda\,\mathrm{Id})^k$ *jest k-wymiarową przestrzenią liniową rozpiętą przez funkcje $e^{\lambda t}$, $te^{\lambda t}$, $t^2 e^{\lambda t}$, ..., $t^{k-1}e^{\lambda t}$.*

Dowód. Oznaczmy przez $\mathcal{M}\colon C^\infty \to C^\infty$ operator mnożenia przez funkcję $e^{-\lambda t}$, $(\mathcal{M}\varphi)(t) := e^{-\lambda t}\varphi(t)$. $\mathcal{M}$ jest izomorfizmem liniowym. Zachodzi
$$\mathcal{M}(D - \lambda\,\mathrm{Id}) = D\mathcal{M},$$
co pociąga
$$\mathcal{M}(D - \lambda\,\mathrm{Id})^k = D^k\mathcal{M}.$$
Teza lematu wynika z następującego ciągu (niemal) oczywistych równoważności:
$$\begin{aligned} \varphi \in \ker (D - \lambda\,\mathrm{Id})^k \iff \varphi \in \ker (\mathcal{M}(D - \lambda\,\mathrm{Id})^k) \iff \varphi \in \ker (D^k\mathcal{M}) \iff \\ \iff \mathcal{M}\varphi \in \ker D^k \iff \mathcal{M}\varphi \in \mathrm{lin}_{\mathbb{C}}\,\{1, t, t^2, \dots, t^{k-1}\} \iff \\ \iff \varphi \in \mathrm{lin}_{\mathbb{C}}\,\{e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}, \dots, t^{k-1}e^{\lambda t}\}. \end{aligned}$$
Liniowa niezależność jest natychmiastowa. □

Dla $j = 1, \dots, m$ oznaczmy
$$E_j := \mathrm{lin}_{\mathbb{C}}\,\{e^{\lambda_j t}, te^{\lambda_j t}, t^2 e^{\lambda_j t}, \dots, t^{k_j - 1}e^{\lambda_j t}\}.$$

Twierdzenie 8.12. *Zbiór zespolonych rozwiązań równania liniowego jednorodnego n-tego rzędu o stałych współczynnikach* (RLSJn) *jest przestrzenią liniową generowaną przez funkcje*
$$\begin{gathered} e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \dots, t^{k_1 - 1}e^{\lambda_1 t}, \\ \vdots \\ e^{\lambda_m t}, te^{\lambda_m t}, \dots, t^{k_m - 1}e^{\lambda_m t}. \end{gathered}$$

Dowód. Ustalmy na moment $j \in \{1, \dots, m\}$. Ponieważ $\mathcal{L}$ można zapisać w postaci $\mathcal{L}_{(j)}(D - \lambda_j \mathrm{Id})^{k_j}$, gdzie
$$\mathcal{L}_{(j)} = (D - \lambda_1 \mathrm{Id})^{k_1} \dots (D - \lambda_{k_{j-1}} \mathrm{Id})^{k_{j-1}} (D - \lambda_{k_{j+1}} \mathrm{Id})^{k_{j+1}} \dots (D - \lambda_m \mathrm{Id})^{k_m},$$

zachodzi $E_j \subset \ker \mathcal{L}$. Daje to $E_1 + \ldots + E_m \subset \ker \mathcal{L}$. Oczywiście $E_j \cap E_l = \{0\}$ dla $j \neq l$, co daje

$$E_1 \oplus \ldots \oplus E_m \subset \ker \mathcal{L}.$$

Ale

$$\dim_{\mathbb{C}} (E_1 \oplus \ldots \oplus E_m) = \dim_{\mathbb{C}} E_1 + \ldots + \dim_{\mathbb{C}} E_m = k_1 + \ldots + k_m = n,$$

oraz $\dim_{\mathbb{C}} (\ker \mathcal{L}) = n$, zatem $E_1 \oplus \ldots \oplus E_m = \ker \mathcal{L}$. □

Twierdzenie 8.13. *Załóżmy, że wielomian charakterystyczny równania* (RLSJn) *ma pierwiastki rzeczywiste $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, krotności odpowiednio $k_1, \ldots, k_s$, oraz pierwiastki zespolone $\alpha_1 + i\beta_1, \alpha_1 - i\beta_1, \ldots, \alpha_r + i\beta_r, \alpha_r - i\beta_r$, krotności odpowiednio $k_{s+1}, k_{s+1}, \ldots, k_{s+r}, k_{s+r}$, gdzie $\beta_1 > 0, \ldots, \beta_r > 0$, oraz $k_1 + \ldots + k_s + 2(k_{s+1} + \ldots + k_{s+r}) = n$. Wówczas zbiór* (*rzeczywistych*) *rozwiązań równania* (RLSJn) *jest przestrzenią liniową generowaną przez funkcje*

$$\begin{gathered}
e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \ldots, t^{k_1 - 1} e^{\lambda_1 t}, \\
\vdots \\
e^{\lambda_s t}, te^{\lambda_s t}, \ldots, t^{k_s - 1} e^{\lambda_s t}, \\
e^{\alpha_1 t} \cos(\beta_1 t), te^{\alpha_1 t} \cos(\beta_1 t), \ldots, t^{k_{s+1} - 1} e^{\alpha_1 t} \cos(\beta_1 t), \\
e^{\alpha_1 t} \sin(\beta_1 t), te^{\alpha_1 t} \sin(\beta_1 t), \ldots, t^{k_{s+1} - 1} e^{\alpha_1 t} \sin(\beta_1 t), \\
\vdots \\
e^{\alpha_r t} \cos(\beta_r t), te^{\alpha_r t} \cos(\beta_r t), \ldots, t^{k_{s+r} - 1} e^{\alpha_r t} \cos(\beta_r t), \\
e^{\alpha_r t} \sin(\beta_r t), te^{\alpha_r t} \sin(\beta_r t), \ldots, t^{k_{s+r} - 1} e^{\alpha_r t} \sin(\beta_r t).
\end{gathered}$$

Dowód. Zauważmy, że gdy $\varphi(t) = t^l e^{\lambda_j} t$ jest rozwiązaniem równania (RLSJn), to sprzężenie $\bar{\varphi}(t) = t^l e^{\bar{\lambda}_j} t$ też jest rozwiązaniem. Wynika stąd, że $\operatorname{Re} \varphi = \frac{1}{2}(\varphi + \bar{\varphi})$ oraz $\operatorname{Im} \varphi = \frac{1}{2i}(\varphi - \bar{\varphi})$ są rozwiązaniami. Widzimy zatem, że funkcje z tezy bieżącego twierdzenia są rozwiązaniami równania (RLSJn). Oczywiście, są to rozwiązania rzeczywiste.

Dalej, skoro $\varphi = \operatorname{Re} \varphi + i \operatorname{Im} \varphi$, $\bar{\varphi} = \operatorname{Re} \varphi - i \operatorname{Im} \varphi$, każde rozwiązanie z tezy Tw. 8.12 można zapisać jako kombinację liniową (o współczynnikach z $\mathbb{C}$) funkcji z tezy bieżącego twierdzenia. Zatem bazą (zespolonej) przestrzeni liniowej rozwiązań równania (RLSJn) jest zarówno rodzina n funkcji z tezy Tw. 8.12, jak i rodzina n funkcji z tezy bieżącego twierdzenia. Wynika stąd, że ta ostatnia jest liniowo niezależna nad ciałem liczb zespolonych, tym bardziej zatem nad ciałem liczb rzeczywistych. □

8.6 Zastosowanie do obliczania $\exp(tA)$

Twierdzenie 8.14. *Niech $\lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \ldots + d_{n-1}\lambda + d_n$ będzie wielomianem charakterystycznym macierzy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Oznaczmy przez φ_j, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, rozwiązanie równania różniczkowego*

$$x^{(n)} + d_1 x^{(n-1)} + \ldots + d_{n-1}x' + d_n x = 0$$

spełniające warunki początkowe

$$\varphi_j^{(l)}(0) = \delta_{jl} \text{ dla } j, l \in \{0, \ldots, n-1\}.$$

Wówczas

$$e^{tA} = \varphi_{n-1}(t)A^{n-1} + \varphi_{n-2}(t)A^{n-2} + \ldots + \varphi_1(t)A + \varphi_0(t)I.$$

(Zawarte w pracy: I. E. Leonard, *The matrix exponential*, SIAM Rev. **38**(3) (1996), 507–512.)

Dowód. Rozważmy macierzowe równanie różniczkowe liniowe jednorodne n--tego rzędu

$$X^{(n)} + d_1 X^{(n-1)} + \ldots + d_{n-1}X' + d_n X = 0 \tag{8.2}$$

z warunkami początkowymi

$$\begin{cases} X(0) = I \\ X'(0) = A \\ X''(0) = A^2 \\ \vdots \\ X^{(n-1)}(0) = A^{n-1} \end{cases} \tag{8.3}$$

Powyższe zagadnienie początkowe ma jednoznaczne rozwiązanie określone na $(-\infty, \infty)$.

Funkcja macierzowa

$$t \mapsto e^{tA}$$

spełnia równanie (8.2) na podstawie twierdzenia Cayleya–Hamiltona.

Oznaczmy

$$\Phi(t) := \varphi_{n-1}(t)A^{n-1} + \varphi_{n-2}(t)A^{n-2} + \ldots + \varphi_1(t)A + \varphi_0(t)I.$$

Liczymy:

$$\begin{aligned} &\Phi^{(n)}(t) + d_1\Phi^{(n-1)}(t) + \ldots + d_{n-1}\Phi'(t) + d_n\Phi(t) = \\ = &\left(\varphi_0^{(n)}(t) + d_1\varphi_0^{(n-1)}(t) + \ldots + d_{n-1}\varphi_0'(t) + d_n\varphi_0(t)\right) I + \\ + &\left(\varphi_1^{(n)}(t) + d_1\varphi_1^{(n-1)}(t) + \ldots + d_{n-1}\varphi_1'(t) + d_n\varphi_1(t)\right) A + \\ &\vdots \\ + &\left(\varphi_{n-1}^{(n)}(t) + d_1\varphi_{n-1}^{(n-1)}(t) + \ldots + d_{n-1}\varphi_{n-1}'(t) + d_n\varphi_{n-1}(t)\right) A^{n-1}, \end{aligned}$$

co jest równe 0. Obie funkcje macierzowe spełniają ponadto warunki początkowe, zatem, na podstawie twierdzenia o jednoznaczności rozwiązania zagadnienia początkowego, muszą być sobie równe. □

Alternatywną metodę obliczania $\exp(tA)$ daje następujące:

Twierdzenie 8.15 (Algorytm Putzera[1]). *Niech $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ będą (niekoniecznie różnymi) wartościami własnymi macierzy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Oznaczmy $M_0 := I$ oraz*

$$M_k := \prod_{j=1}^{k} (A - \lambda_j I),$$

dla $1 \leqslant k \leqslant n$. Dalej, niech $\boldsymbol{\psi} = \mathrm{col}(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ spełnia

$$\boldsymbol{\psi}' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \lambda_n \end{bmatrix} \boldsymbol{\psi}, \quad \boldsymbol{\psi}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Wówczas

$$e^{tA} = \psi_1(t)M_0 + \psi_2(t)M_1 + \ldots + \psi_n(t)M_{n-1}.$$

Dowód. Oznaczmy

$$\Phi(t) := \psi_1(t)M_0 + \psi_2(t)M_1 + \ldots + \psi_n(t)M_{n-1}.$$

Z uwag poniżej Twierdzenia 8.2 oraz z jednoznaczności rozwiązania zagadnienia początkowego wynika, że wystarczy wykazać, iż $\Phi(\cdot)$ spełnia zagadnienie początkowe

$$X' = AX, \quad X(0) = I.$$

[1] Eugene James Putzer, matematyk amerykański, aktywny w latach 50-tych i 60-tych XX wieku

Warunek początkowy jest spełniony. Aby wykazać, ze spełnione jest macierzowe równanie różniczkowe, zauważmy, że

$$\begin{aligned}\psi_1'(t) &= \lambda_1\psi_1(t),\\ \psi_j'(t) &= \psi_{j-1}(t) + \lambda_j\psi_j(t)\end{aligned}$$

dla $2 \leqslant j \leqslant n$. Liczymy dalej

$$\begin{aligned}
&\Phi'(t) - A\Phi(t) =\\
=&\sum_{k=0}^{n-1}\psi_{k+1}'(t)M_k - A\sum_{k=0}^{n-1}\psi_{k+1}(t)M_k =\\
=&\lambda_1 p_1(t)M_0 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\lambda_{k+1}\psi_{k+1}(t) + \psi_k(t)\right)M_k - \sum_{k=0}^{n-1}\psi_{k+1}(t)AM_k =\\
=&\lambda_1 p_1(t)M_0 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\lambda_{k+1}\psi_{k+1}(t) + \psi_k(t)\right)M_k - \sum_{k=0}^{n-1}\psi_{k+1}(t)\left(M_{k+1} + \lambda_{k+1}M_k\right) =\\
=&\sum_{k=1}^{n-1}\psi_k(t)M_k - \sum_{k=0}^{n-1}\psi_{k+1}(t)M_{k+1} =\\
=&-p_n(t)M_n,
\end{aligned}$$

zaś $M_n = 0$ na podstawie twierdzenia Cayleya–Hamiltona. □

8.7 Metoda współczynników nieoznaczonych

W niniejszym podrozdziale będziemy rozpatrywali równania różniczkowe liniowe niejednorodne o stałych współczynnikach, których niejednorodności są specjalnej postaci.

Twierdzenie 8.16. *Dla równania liniowego niejednorodnego o stałych współczynnikach*

$$x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}x' + a_nx = P(t)e^{\mu t}, \tag{8.4}$$

gdzie $P(\cdot)$ jest wielomianem stopnia l o współczynnikach zespolonych, $\mu \in \mathbb{C}$, istnieje rozwiązanie postaci $t^sQ(t)e^{\mu t}$, gdzie s jest krotnością μ jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego, zaś Q jest wielomianem o współczynnikach zespolonych stopnia co najwyżej l.

Dowód. Oznaczmy przez E zespoloną przestrzeń liniową złożoną z funkcji $R(t)e^{\mu t}$, gdzie R jest wielomianem stopnia co najwyżej l. Niech $\mathcal{L}$ oznacza, jak poprzednio, operator $D^n + a_1D^{n-1} + \ldots + a_{n-1}D + a_n\mathrm{Id}$. Szukamy więc takiego $\varphi \in E$, że $\mathcal{L}\varphi = P(t)e^{\mu t}$.

- $s = 0$, czyli μ nie jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego. Wtedy $\ker(\mathcal{L}|_E) = \ker \mathcal{L} \cap E = \{0\}$ (na podstawie Tw. 8.12), zatem $\mathcal{L}|_E \colon E \to E$ jest izomorfizmem. Za $\varphi \in E$ bierzemy $(\mathcal{L}|_E)^{-1}(P(t)e^{\mu t})$.

- $s > 0$. Zapiszmy $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1(D - \mu\,\mathrm{Id})^s$. Podobnie jak w poprzednim przypadku dowodzimy, że $\mathcal{L}_1|_E \colon E \to E$ jest izomorfizmem. Zatem zagadnienie nasze sprowadza się do znalezienia ψ postaci $\psi(t) = t^s Q(t) e^{\mu t}$, takiego, że $(D - \mu\,\mathrm{Id})^s \psi = (\mathcal{L}_1|_E)^{-1}(P(t)e^{\mu t})$. Oczywiście funkcja po prawej stronie jest elementem E (oznaczmy tę funkcję przez χ). Oznaczmy przez $\mathcal{M} \colon C^\infty \to C^\infty$ operator mnożenia przez funkcję $e^{\mu t}$, $(\mathcal{M}\varphi)(t) := e^{\mu t}\varphi(t)$. $\mathcal{M}$ jest izomorfizmem liniowym. Analogicznie jak w dowodzie Lematu 8.11 wykazujemy, że $(D - \mu\,\mathrm{Id})^s \mathcal{M} = \mathcal{M} D^s$. Zagadnienie nasze sprowadza się do znalezienia wielomianu ψ_1 postaci $\psi_1(t) = t^s Q(t)$, gdzie Q jest wielomianem stopnia co najwyżej l, spełniającego

  $$(D - \mu\,\mathrm{Id})^s \mathcal{M} \psi_1 = \chi,$$

  czyli

  $$D^s \psi_1 = \mathcal{M}^{-1} \chi.$$

  Jest to możliwe, gdyż $\mathcal{M}^{-1}\chi$ jest wielomianem stopnia co najwyżej l.

$\square$

Twierdzenie powyższe ma odpowiednik dla rozwiązań rzeczywistych.

Twierdzenie 8.17. (a) *Dla równania liniowego niejednorodnego o stałych współczynnikach*

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x' + a_n x = P(t) e^{\mu t},$$

gdzie $P(\cdot)$ jest wielomianem stopnia l o współczynnikach rzeczywistych oraz $\mu \in \mathbb{R}$, istnieje rozwiązanie postaci $t^s Q(t) e^{\mu t}$, gdzie s jest krotnością μ jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego, zaś Q jest wielomianem stopnia co najwyżej l.

(b) *Dla równania liniowego niejednorodnego o stałych współczynnikach*

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x' + a_n x = e^{\alpha t}\left(P_1(t)\cos(\beta t) + P_2(t)\sin(\beta t)\right),$$

gdzie $P_1(\cdot)$, $P_2(\cdot)$ są wielomianami stopnia odpowiednio l_1, l_2 o współczynnikach rzeczywistych oraz $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, istnieje rozwiązanie postaci $t^s e^{\alpha t}\left(Q_1(t)\cos(\beta t) + Q_2(t)\sin(\beta t)\right)$, gdzie s jest krotnością $\alpha + i\beta$ jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego, zaś Q_1 i Q_2 są wielomianami stopnia co najwyżej $\max(l_1, l_2)$.

Twierdzenie to jest teoretyczną podstawą *metody współczynników nieoznaczonych* (zwanej też *metodą przewidywań*). Dowód jego przebiega analogicznie do dowodu Tw. 8.4, choć jest bardziej skomplikowany. Na przykład, w części (b) rolę przestrzeni E pełni $\mathrm{lin}_{\mathbb{R}} \{e^{\alpha t} \cos(\beta t), e^{\alpha t} \sin(\beta t), te^{\alpha t} \cos(\beta t), te^{\alpha t} \sin(\beta t), \dots, t^l e^{\alpha t} \cos(\beta$
gdzie $l = \max\{l_1, l_2\}$.