9 Równania różniczkowe zwyczajne o prawych stronach analitycznych

Definicja. Mówimy, że funkcja $f\colon E \to \mathbb{R}$, gdzie $E \subset \mathbb{R}^m$ jest obszarem, jest *analityczna w punkcie* $(y_1, \dots, y_m) \in E$, jeżeli istnieją $r_1 > 0$, …, $r_n > 0$, takie, że

- $(y_1 - r_1, y_1 + r_1) \times \dots \times (y_m - r_m, y_m + r_m) \subset E$,
- f obcięta do zbioru $(y_1 - r_1, y_1 + r_1) \times \dots \times (y_m - r_m, y_m + r_m)$ jest sumą szeregu potęgowego m zmiennych zbieżnego w każdym punkcie tego zbioru.

Funkcja $f\colon E \to \mathbb{R}$, gdzie $E \subset \mathbb{R}^m$ jest obszarem, jest *analityczna na* E, gdy jest analityczna w każdym punkcie tego obszaru.

Funkcja wektorowa określona na obszarze $E \subset \mathbb{R}^m$ jest *analityczna na* E, gdy każda z jej współrzędnych jest analityczna na$E$.

Twierdzenie 9.1 (Twierdzenie Cauchy'ego)**.** *Niech* $\mathbf{f}\colon (a,b) \times D \to \mathbb{R}^n$, *gdzie* $D \subset \mathbb{R}^n$ *jest obszarem, będzie funkcją analityczną na* $(a,b) \times D$. *Wówczas dla każdego* $t_0 \in (a,b)$ *i każdego* $\mathbf{x}_0 \in D$ *istnieje dokładnie jedno rozwiązanie nieprzedłużalne* $\boldsymbol{\varphi}\colon (\alpha, \beta) \to D$ *zagadnienia początkowego*

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases}$$

Rozwiązanie to jest funkcją analityczną na (α, β).

9.1 Równania różniczkowe zwyczajne liniowe jednorodne o współczynnikach analitycznych

Twierdzenie 9.2. *Załóżmy, że w równaniu różniczkowym liniowym jednorodnym*

$$\text{(RLJA}n\text{)} \qquad x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(t)x' + p_n(t)x = 0$$

każda z funkcji $p_1, \dots, p_n$ *jest sumą szeregu potęgowego zbieżnego na przedziale* $(t_0 - r_0, t_0 + r_0)$, *gdzie* $r_0 > 0$. *Wówczas dla każdego*

$(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ *rozwiązanie zagadnienia początkowego*

$$\begin{cases} x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(t)x' + p_n(t)x = h(t) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}. \end{cases}$$

jest sumą szeregu potęgowego zbieżnego na przedziale $(t_0 - r_0, t_0 + r_0)$. *Współczynniki tego szeregu potęgowego można wyliczyć przez podstawienie odpowiednich danych do równania.*

9.2 Równania różniczkowe Legendre'a

Definicja. Równaniem różniczkowym Legendre'a [1] nazywamy równanie różniczkowe zwyczajne liniowe jednorodne

$$(1 - t^2)x'' - 2tx' + \alpha(\alpha + 1)x = 0, \tag{RLeg$_\alpha$}$$

gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$, rozpatrywane na przedziale $(-1, 1)$.

Łatwo zauważyć, że po przekształceniu

$$x'' - \frac{2t}{1 - t^2}x' + \frac{\alpha(\alpha + 1)}{1 - t^2}x = 0$$

funkcje $p_1(t) = -2t/(1 - t^2)$ i $p_2(t) = \alpha(\alpha + 1)/(1 - t^2)$ można wyrazić jako sumy szeregów potęgowych zbieżnych na $(-1, 1)$. Z Twierdzenia 9.2 wynika, że każde rozwiązanie równania Legendre'a (RLeg$_\alpha$) jest funkcją będącą sumą szeregu potęgowego zbieżnego na $(-1, 1)$.
Oznaczmy przez φ_1 rozwiązanie równania Legendre'a (RLeg$_\alpha$) z warunkami początkowymi $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$, i przez φ_2 rozwiązanie równania (RLeg$_\alpha$) z warunkami początkowymi $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$. Rozwiązania φ_1 i φ_2 można zapisać w postaci sum następujących szeregów potęgowych (o przedziałach zbieżności zawierających, na podstawie Twierdzenia 9.2, przedział $(-1, 1)$):

$$\varphi_1(t) = 1 + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{(\alpha + 2m - 1)(\alpha + 2m - 3)\dots(\alpha + 1)\alpha(\alpha - 2)\dots(\alpha - 2m + 2)}{(2m)!} t^{2m},$$

[1] Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833), matematyk francuski

$$\varphi_2(t) = t + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{(\alpha+2m)(\alpha+2m-2)\dots(\alpha+2)(\alpha-1)(\alpha-3)\dots(\alpha-2m+1)}{(2m)!} t^{2m+1}.$$

Zakładamy odtąd, że α jest liczbą całkowitą nieujemną n.
Jeśli n jest parzyste, wówczas we wzorze na φ_1 tylko skończenie wiele współczynników jest różnych od zera (zatem φ_1 jest wielomianem), zaś we wzorze na φ_2 wszystkie współczynniki są niezerowe (zatem φ_2 nie jest wielomianem).
Jeśli n jest nieparzyste, wówczas we wzorze na φ_1 wszystkie współczynniki są niezerowe (zatem φ_1 nie jest wielomianem, zaś we wzorze na φ_2 tylko skończenie wiele współczynników jest różnych od zera (zatem φ_2 jest wielomianem).
W obu przypadkach, zbiór rozwiązań równania różniczkowego Legendre'a będących wielomianami tworzy przestrzeń liniową wymiaru jeden.

Definicja. n-tym wielomianem Legendre'a, gdzie $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, nazywamy rozwiązanie $P_n(\cdot)$ równania różniczkowego Legendre'a

$$(\mathrm{RLeg}_n) \qquad (1-t^2)x'' - 2tx' + n(n+1)x = 0$$

będące wielomianem, znormalizowane tak, że dla $t = 1$ przyjmuje wartość 1.
Niech

$$\varphi(t) := ((t^2-1)^n)^{(n)}.$$

Oznaczmy $u(t) := (t^2-1)^n$. Różniczkując tę funkcję $n+2$ razy, otrzymujemy

$$(t^2-1)u^{(n+2)}(t) + 2t(n+1)u^{(n+1)}(t) + (n+1)nu^{(n)}(t) \\ - 2ntu^{(n+1)}(t) - 2n(n+1)u^{(n)}(t) = 0.$$

Ponieważ $\varphi(t) = u^{(n)}(t)$, funkcja φ spełnia zatem równanie Legendre'a (RLeg_n).
Dalej, zauważmy że

$$\varphi(t) = ((t-1)^n(t+1)^n)^{(n)} = ((t-1)^n)^{(n)}(t+1)^n + v(t) = n!(t+1)^n + v(t),$$

gdzie $v(1) = 0$. Zatem $\varphi(1) = n!2^n$.
Z powyższych rozumowań wynika, że

$$P_n(t) = \frac{1}{n!2^n}((t^2-1)^n)^{(n)}$$

(jest to tzw. *wzór Rodriguesa* [2]). W szczególności, n-ty wielomian Legendre'a to wielomian stopnia n, o współczynniku przy najwyższej potędze równym $(2n)!/(2^n(n!)^2)$.

[2] Benjamin Olinde Rodrigues (1795 – 1851), matematyk francuski