LISTY ZADAŃ DO KURSU ANALIZA MATEMATYCZNA 2

(MAT1422, MAT1738, MAT1741)

LISTA 1. *(na 1 ćwiczenia)*

Całki niewłaściwe

Część A. Zadania do samodzielnego rozwiązania, czyli to, co należy umieć z poprzedniego semestru.

1.1. Podać funkcje pierwotne funkcji f:

(a) $f(x) = e^{-3x}$, (b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$, (c) $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$, (d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4x+5}$.

1.2. Napisać wzór na całkowanie przez części i obliczyć całki:

(a) $\displaystyle\int x \cdot \sin 2x \, dx$, (b) $\displaystyle\int x \cdot 2^{-x} \, dx$, (c) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^3} \, dx$, (d) $\displaystyle\int e^{-x} \sin x \, dx$.

1.3. Obliczyć całki, stosując odpowiednie podstawienie:

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+1} \, dx$, (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-8x+25}$, (c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$, (d) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+2}}$.

1.4. Naszkicować krzywe o równaniach:

(a) $y = e^{-3x}$, (b) $y = \dfrac{1}{(x-2)^2}$, (c) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$, (d) $y = \dfrac{1}{(x+2)^2+1}$.

1.5. Obliczyć granice funkcji:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \operatorname{arc\,tg} \frac{x-1}{5}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arc\,tg}(2x+5)$, (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \ln \frac{x+2}{x+4}$, (d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (x+3) \cdot e^{-2x}$.

Część B. Zadania na ćwiczenia i do samodzielnego rozwiązania.

1.1. Obliczyć całkę niewłaściwą. Podać jej interpretację geometryczną, wykonując odpowiedni rysunek.

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x+1}$, (b) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x^2-x}$, (c) $\displaystyle\int_e^\infty \frac{dx}{x\ln x}$, (d) $\displaystyle\int_0^\infty x \cdot e^{-x} \, dx$, (e) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2-6x+10}$,

(f) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$, (g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2}$, (h) $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$, (i) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}$, (j) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

1.2. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej. Sformułować wykorzystane kryterium.

(a) $\int\limits_1^\infty \frac{x+1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx$, (b) $\int\limits_0^\infty \frac{1+\sin x}{(x+2)^3}\,dx$, (c) $\int\limits_0^\infty \frac{e^x}{2e^{3x}+3}\,dx$, (d) $\int\limits_\pi^\infty \sin\frac{1}{x}\,dx$,

(e) $\int\limits_0^1 \frac{x+1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx$, (f) $\int\limits_1^5 \frac{dx}{x^3\sqrt{x-1}}$, (g) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin^3 x}\,dx$, (h) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$.

1.3.

(a) Zbadać, czy pole obszaru $D = \left\{(x,y) \in R^2 : 1 \leqslant x < \infty,\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right\}$ jest skończone. Czy objętość bryły powstającej przez obrót obszaru D wokół osi OX jest skończona?

(b) Wyznaczyć wartości parametru α, dla których pole obszaru

$$D = \left\{(x,y) \in R^2 : 1 \leqslant x < \infty,\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{x^\alpha}\right\}$$

jest nieskończone i jednocześnie objętość bryły powstającej przez obrót obszaru D wokół osi OX jest skończona.

(c) Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresem funkcji $f(x) = \frac{x^3+2x+1}{x^2+2}$ i jego asymptotą. Wykonać rysunek.

Podobne zadania (z rozwiązaniami lub odpowiedziami) można znaleźć w skrypcie: M. Gewert, Z. Skoczylas, Analiza matematyczna 2. Przykłady i zadania, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2019, rozdział 1.

Jolanta Sulkowska

LISTA 2. *(na 2,5 ćwiczeń)*

Szeregi liczbowe i potęgowe

Część A. Zadania do samodzielnego rozwiązania, czyli to, co należy umieć z poprzedniego semestru.

2.1. Obliczyć granice ciągów liczbowych o wyrazach:

(a) $a_n = \cos \frac{1}{n^3}$, (b) $b_n = \sin \frac{1}{2^n}$, (c) $c_n = \frac{4^{n+1}}{2^{2n} + 3^n}$, (d) $d_n = \frac{n^{19}}{(n+1)^{19} + 5}$.

2.2. Dla podanych par ciągów liczbowych obliczyć granicę ilorazu $\frac{a_n}{b_n}$:

(a) $a_n = 2^n$, $b_n = 2^n + 3^n$; (b) $a_n = 3^n$, $b_n = 2^n + 3^n$;

(c) $a_n = n$, $b_n = \sqrt{n^2 + 2n + 3}$; (d) $a_n = n^2$, $b_n = \sqrt{n^2 + 2n + 3}$;

(e) $a_n = \sin^2 \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$; (f) $a_n = \sin^2 \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$.

2.3. Dla danego ciągu (a_n) dobrać ciąg (b_n) postaci $b_n = n^p$ lub $b_n = \alpha^n$ tak, aby $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$, $0 < k < \infty$:

(a) $a_n = \frac{n}{n^3 + 4}$, (b) $a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n+7}$, (c) $a_n = \frac{9}{3^n + 5^n}$, (d) $a_n = \frac{2^{2n+1}}{1 + 3^n}$.

2.4. Dla podanych ciągów liczbowych obliczyć granicę ilorazu $\frac{a_{n+1}}{a_n}$:

(a) $a_n = \frac{n^2}{n^3 + 1}$, (b) $a_n = \sin \frac{1}{n}$, (c) $a_n = 2^n + 3^n$, (d) $a_n = \frac{4^{2n}}{n^4}$.

Część B. Zadania na ćwiczenia i do samodzielnego rozwiązywania.

2.1. Wyznaczyć sumy częściowe podanych szeregów i zbadać ich zbieżność:

(a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$, (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$, (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

2.2. Zbadać zbieżność szeregów liczbowych. Sformułować wykorzystywane kryteria.

(a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$, (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + 1}$, (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n + 2}$, (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}$,

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n + 3^{n+1}}$, (f) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{2^{2n}}{2^n + 3^n}$, (g) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{5^{3n+1}}{(n+1)!}$, (h) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$,

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^2}$, (j) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (\operatorname{arcctg} \cos \frac{1}{n})^n$, (k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{2^n}$, (l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n^3}$.

2.3. Uzasadnić, że szereg jest zbieżny i obliczyć przybliżoną sumę z błędem nie większym niż $0,01$:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3n+1}$, (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2^n+3}$, (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}$.

2.4. Zbadać zbieżność oraz zbieżność bezwzględną szeregów:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{1}{n+1}$, (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cos\frac{1}{n}$, (c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\ln n}{n}$,

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+2}$, (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos n}{n^3+5}$, (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{2^n+3^n}$.

2.5. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego. W przykładach (e), (f) wykorzystać warunek zbieżności szeregu geometrycznego.

(a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^n}{n^2}$, (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n!}$, (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n+1}}{n\cdot 3^n}(x-5)^n$,

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{4^{n+1}}(2x+1)^n$, (e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(3x+2)^n}{2^{n+3}}$, (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^n\cdot(x+1)^{2n}$.

2.6. Wykorzystując szeregi Maclaurina funkcji e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\frac{1}{1-x}$, wyznaczyć szeregi Maclaurina podanych funkcji. Podać przedziały zbieżności otrzymanych szeregów. Obliczyć $f^{(33)}(0)$ oraz $f^{(34)}(0)$.

(a) $f(x)=xe^{-2x}$, (b) $h(x)=\cos(\pi x)$, (c) $g(x)=\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}$,

(d) $f(x)=\frac{x}{1+3x}$, (e) $f(x)=\frac{x}{4+x^2}$, (f) $f(x)=\frac{x^2}{x-2}$.

2.7. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcje $f(x)$, $f'(x)$, $\int\limits_0^x f(t)\mathrm{d}t$. Podać promienie zbieżności otrzymanych szeregów.

(a) $f(x)=\frac{1}{2x-1}$, (b) $f(x)=e^{x^2}$, (c) $f(x)=x\sin x$, (d) $f(x)=x^2\cos\frac{x}{5}$.

2.8. Korzystając z sumy szeregu geometrycznego oraz wyprowadzonych na wykładzie wzorów: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1} = \ ?$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} = \ ?$ dla $|x|<?$, obliczyć sumy szeregów:

(a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(n+1)2^n}{3^{n+1}}$, (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{2^n}$, (c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+2)\cdot 2^{2n}}$, (d) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(n+1)\cdot 3^n}$.

Podobne zadania (z rozwiązaniami lub odpowiedziami) można znaleźć w skrypcie:
M.Gewert, Z.Skoczylas, Analiza matematyczna 2. Przykłady i zadania, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2019, rozdział 2.

Jolanta Sulkowska

LISTA 3 *(na 4,5 ćwiczeń)*

Rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych

Część A. Zadania do samodzielnego rozwiązania, czyli to, co należy umieć z poprzedniego semestru.

3.1. Wyznaczyć dziedzinę naturalną funkcji

a) $f(x) = \sqrt{x \sin x}$, b) $f(x) = \ln \dfrac{x^2 - 4}{9 - x^2}$, c) $f(x) = \dfrac{1}{2 + \ln x}$, d) $f(x) = \arccos(2x + 5)$.

3.2. Narysować wykres funkcji

a) $f(x) = x^2 + 2x + 3$, b) $f(x) = -\sqrt{x^2}$, c) $f(x) = 2 + \sqrt{x}$, d) $f(x) = 1 - \sin x$.

3.3. Narysować wykres funkcji $y = f(x)$. Podać, posługując się wykresem, zbiór punktów ciągłości funkcji.

a) $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla} \quad x \geqslant 0 \\ \sin 2x & \text{dla} \quad x < 0 \end{cases}$, b) $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{dla} \quad x > \pi \\ \cos \dfrac{x}{2} & \text{dla} \quad x \leqslant \pi \end{cases}$.

3.4. Obliczyć pochodną funkcji

a) $f(x) = x \cdot e^{3x}$, b) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{3x + 4}}$, c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 8}$,

d) $f(x) = \dfrac{\cos^2(4x - 1)}{x + 1}$, e) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{5}{x}$, f) $f(x) = x \ln \dfrac{x}{8}$.

3.5. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $y = f(x)$ w podanym punkcie

a) $f(x) = \sqrt{3} \cdot x - e^{-x}$, $(0, y_0)$; b) $f(x) = \sin^2 \dfrac{x}{4}$, (π, y_0).

3.6. Funkcja f ma ciągłą pochodną. Obliczyć $g'(x)$.

a) $g(x) = x \cdot f(x)$, b) $g(x) = f(\sin x)$, c) $g(x) = \dfrac{f(x)}{x^2 + 8}$.

3.7. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji. Wykorzystać II warunek wystarczający istnienia ekstremum.

a) $f(x) = x^2 \cdot e^{-2x}$, b) $f(x) = \dfrac{1 - 2 \ln x}{x}$, c) $f(x) = x^2 - \dfrac{8}{x}$.

3.8. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji na wskazanym przedziale

a) $f(x) = \dfrac{e^x}{1 + x^2}$, $[-2, 2]$; b) $f(x) = x \cdot \sqrt{4 - x^2}$, D_f;

c) $f(x) = 0,5 \cos 4x - \cos 2x$, $[0, \frac{3}{2}\pi]$; d) $f(x) = x - 2\sqrt{x}$, $[0, 5]$.

3.9. Wyznaczyć punkt krzywej $y = x^2$ leżący najbliżej punktu $(0, 5)$.

Część B. Zadania na ćwiczenia i do samodzielnego rozwiązywania.

3.1. Wyznaczyć i narysować dziedzinę naturalną funkcji

a) $f(x,y)) = \sqrt{y \cdot \cos x}$, b) $f(x,y) = \arcsin(2x - y + 3)$, c) $f(x,y) = \ln \dfrac{x^2+y^2-4}{9-x^2-y^2}$,

d) $g(x,y,z) = \dfrac{y^2-z^2}{x}$, e) $g(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2)$, f) $g(x,y,z) = \sqrt{xy} + \sqrt{z-1}$.

3.2. Narysować poziomicę funkcji odpowiadającą danemu poziomowi h lub przechodzącą przez dany punkt (x_0, y_0)

a) $f(x,y) = \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}$, $h = \dfrac{\pi}{4}$; b) $f(x,y) = 2\,|x| + |y|$, $h = 0, 1, 2, 3, \ldots$;

c) $f(x,y) = e^{x^2+y^2+2x-1}$, $(x_0, y_0) = (0,1)$; d) $f(x,y) = \sqrt{y^4 - x^2}$, $(x_0, y_0) = (0,0)$.

3.3. Naszkicować wykres funkcji

a) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{2}$, b) $f(x,y) = -2\sqrt{x^2+y^2}$, c) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2+1}$,

d) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{2}$, e) $f(x,y) = -2\sqrt{x^2}$, f) $f(x,y) = \dfrac{1}{y^2+1}$,

g) $f(x,y) = 1 + \cos y$, h) $f(x,y) = 4 - 2x$, i) $f(x,y) = 6 - 2x + 3y$.

3.4. Naszkicować wykres funkcji. Posługując się wykresem podać zbiór punktów ciągłości funkcji.

a) $f(x,y) = \begin{cases} y+1 & \text{dla} \quad y \leqslant 2 \\ -2y+7 & \text{dla} \quad y > 2 \end{cases}$, b) $f(x,y) = \begin{cases} y+1 & \text{dla} \quad x \geqslant 0 \\ -2y+7 & \text{dla} \quad x < 0 \end{cases}$,

c) $f(x,y) = \begin{cases} \sin x & \text{dla} \quad y \geqslant 0 \\ 0,5 & \text{dla} \quad y < 0 \end{cases}$, d) $f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & \text{dla} \quad x^2+y^2 \leqslant 2 \\ 2 & \text{dla} \quad x^2+y^2 > 2 \end{cases}$.

3.5. Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu podanej funkcji

a) $f(x,y) = x^2 + 3xy^3 - y + 5$, b) $g(x,y,z) = x \cdot \exp\dfrac{z}{y}$, c) $f(x,y) = x^2 y \cdot \cos(x + \pi y)$,

d) $g(x,y,z) = \dfrac{xz}{x^2+3y^2}$, e) $f(x,y) = \dfrac{\sin^2(x-y)}{x^2+y^2}$, f) $f(x,y) = \ln\left(\mathrm{arc\,tg}\dfrac{y}{x}\right)$.

3.6. Napisać równanie płaszczyzny stycznej

a) w punkcie $(1,1,z_0)$ do wykresu funkcji $z = x\sqrt{y} - e^x \ln y$,

b) w punkcie $(x_0, 2, 1)$ do powierzchni $x^2 + y^2 + z^2 = 7$,

c) do wykresu funkcji $z = x^2 + y^2$. Płaszczyzna styczna jest równoległa do płaszczyzny $3x - 6y + 2z - 17 = 0$.

3.7.

a) Krawędzie prostopadłościanu mają długości $a = 3$ m, $b = 4$ m, $c = 12$ m. Obliczyć, stosując różniczkę funkcji, jak w przybliżeniu zmieni się długość przekątnej prostopadłościanu, gdy długości wszystkich krawędzi zwiększymy o 2 cm.

b) Masa ciała zważonego z dokładnością 20g wynosi M=4000g, a jego objętość zmierzona z dokładnością 1cm^3 wynosi V=800cm^3. Z jakim błędem bezwzględnym i względnym można obliczyć gęstość tego ciała?

c) Ciało rozpoczęło ruch jednostajnie przyspieszony. Czas ruchu $t = 4,000 \pm 0,002$ s, natomiast przyspieszenie wynosi $a = 8,0 \pm 0,1 \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Z jakim błędem bezwzględnym i względnym można obliczyć drogę przebytą przez to ciało?

3.8.
a) Obliczyć pochodne kierunkowe funkcji $f(x,y) = |x| + |y|$ w punkcie $(0,1)$ w kierunku wersorów $\vec{v}_1 = [0,1]$, $\vec{v}_2 = [0,-1]$, $\vec{v}_3 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. Dla jakich wersorów $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,1) = 0$? Naszkicować wykres funkcji $z = |x| + |y|$ i zinterpretować wyniki obliczeń.
b) Wyznaczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y) = \sqrt{x(y-1)^2}$ w punkcie (1,1) w kierunku wersora $\vec{v} = [v_x, v_y]$. W jakim kierunku pochodna ta ma wartość największą, a w jakim jest równa zeru?

3.9.
a) Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y) = \frac{\arcsin y}{\arccos x}$ w punkcie $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ w kierunku wersora $\vec{v} = \left[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right]$.
b) Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2 + xy^2}$ w punkcie $(2,4)$ w kierunku wersora tworzącego kąt $\frac{\pi}{6}$ z dodatnią częścią osi OX.
c) Wyznaczyć wersor $\vec{v} = [v_x, v_y]$ wskazujący kierunek, w którym $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(3,4) = 0$, jeśli $f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.
d) Wyznaczyć taki wersor $\vec{v} = [v_x, v_y]$, aby $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,-1) = 1$ dla funkcji $f(x,y) = x^2 + y^2$. Dla jakiego wersora pochodna kierunkowa $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,-1)$ przyjmuje wartość największą? Jaka jest to wartość?

3.10. Sprawdzić, czy
a) funkcja $u(x,t) = e^{-\lambda t}\sin x$ spełnia równanie przewodnictwa: $\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$;
b) funkcja $v(x,t) = \sin(ant)\sin(nx)$, $n \in \mathbf{N}$, spełnia równanie falowe: $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$;
c) funkcja $U(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ spełnia równanie Laplace'a: $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$;
d) funkcja $U(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ spełnia równanie Laplace'a: $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$.

3.11. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji

a) $f(x,y) = (2x - y^2)\cdot e^{-x}$, b) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y$,
c) $f(x,y) = xy(12 - x - y)$, d) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 6xy$,
e) $f(x,y) = e^{2+x} + e^{y-x} + e^{1-y}$, f) $f(x,y) = x^2 + xy + \ln y$.

3.12. Wyznaczyć ekstrema funkcji dla argumentów spełniających podany warunek

a) $f(x,y) = x^2 + y^2,\ 3x + 2y = 6$; b) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 8x + 10,\ x - y^2 + 1 = 0$;
c) $f(x,y) = x^2 y - \ln x,\ 8x - 3y = 0$; d) $f(x,y) = e^{-y}(x^2 + 2y),\ y = x^2$.

Podać geometryczną interpretację przykładu a) oraz b).

3.13. Wyznaczyć najmniejsze i największe wartości funkcji na wskazanym zbiorze

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $|x| + |y| \leqslant 2$;

b) $f(x,y) = x^4 + y^4$, $x^2 + y^2 \leqslant 9$;

c) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 6x + 4y$ na trójkącie ograniczonym osiami układu współrzędnych i prostą $3x - 4y - 12 = 0$;

d) $f(x,y) = xe^y - x^2 - e^y$ na prostokącie ograniczonym osiami układu współrzędnych i prostymi $x = 2$, $y = 1$.

3.14.

a) W trójkącie o wierzchołkach $A = (-1,5)$, $B = (1,4)$, $C = (2,-3)$ znaleźć punkt, dla którego suma kwadratów jego odległości od wierzchołków jest najmniejsza.

b) Wyznaczyć wymiary prostopadłościennej otwartej wanny o pojemności V i najmniejszym polu powierzchni.

c) Znaleźć odległość między prostymi skośnymi

$$l_1 : \begin{cases} x = 2t \\ y = -2t \\ z = -t \end{cases}, \quad t \in R; \quad l_2 : \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 2s \\ z = 2 - 2s \end{cases}, \quad s \in R.$$

d) Wyznaczyć punkt płaszczyzny $\pi : 4x + y - z - 8 = 0$ leżący najbliżej punktu $A = (5,3,-3)$.

Przykłady c) i d) rozwiązać również metodami geometrii analitycznej.

Podobne zadania (z rozwiązaniami lub odpowiedziami) można znaleźć w skrypcie: M.Gewert, Z.Skoczylas, Analiza matematyczna 2. Przykłady i zadania, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2019, rozdziały 3-4.

Jolanta Sulkowska

LISTA 4. *(na 4 ćwiczenia)*

Całki podwójne i potrójne

4.1. Obliczyć całki iterowane. Narysować obszar całkowania.

(a) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 12(x+y+1)^2\,dy$, (b) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-1}^0 e^{2x-y}\,dx$, (c) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_\pi^{2\pi} x\sin(xy)\,dy$,

(d) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{x^2} x^2y\,dy$, (e) $\int\limits_0^3 dy \int\limits_0^y \sqrt{y^2+16}\,dx$, (f) $\int\limits_{-2}^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} (x+2y)\,dy$.

4.2. Całkę podwójną $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ zamienić na całkę iterowaną lub sumę takich całek dla dwóch kolejności całkowania, jeżeli obszar D jest ograniczony podanymi krzywymi.

(a) $x^2+y=2,\quad y=|x|$; (b) $y-x=0,\quad y-2x=0,\quad y=4$;

(c) $y=x-1,\quad x=5-4y+y^2$; (d) $y=2x-x^2,\quad y=\sqrt{4-x^2},\quad x=0$.

4.3. Dla podanych całek iterowanych narysować obszar całkowania, a następnie zmienić kolejność całkowania.

(a) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_1^{e^y} f(x,y)\,dx$, (b) $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{-1}^{|x|} f(x,y)\,dy$,

(c) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\,dx$, (d) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x,y)\,dy$.

4.4. Obliczyć całkę podwójną wprowadzając współrzędne biegunowe.

(a) $\iint\limits_D xy\,dxdy,\quad D=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\right\}$;

(b) $\iint\limits_D y^2e^{x^2+y^2}\,dxdy,\quad D=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : y\geqslant \sqrt{3}x,\ x^2+y^2\leqslant 3\right\}$;

(c) $\iint\limits_D y\,dxdy,\quad D=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : y\leqslant 0,\ (x+1)^2+y^2\leqslant 1\right\}$;

(d) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dxdy,\quad D=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : y\geqslant 0,\ y\leqslant x^2+y^2\leqslant x\right\}$.

4.5. Obliczyć pola obszarów ogrniczonych podanymi krzywymi lub opisanych podanymi nierównościami.

(a) $y=x-2,\quad x=2-2y+y^2$; (b) $xy=2,\quad x+y=3$;

(c) $x^2+y^2-2y\leqslant 0,\quad x^2+y^2\geqslant 2$; (d) $x^2+y^2-4x\leqslant 0,\quad y\geqslant x$.

4.6. Obliczyć, stosując całkę podwójną, objętości brył ograniczonych podanymi powierzchniami.

(a) $x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad 2x-y+z=4$; (b) $z=0,\quad z=2-x^2-y^2,\quad |x|+|y|\leqslant 1$;

(c) $z=2\sqrt{x^2+y^2},\quad z=3-x^2-y^2$; (d) $z=\sqrt{x^2+y^2},\quad x^2+y^2+y=0,\quad z=0$.

4.7. Obliczyć pola podanych płatów powierzchniowych.

(a) $x + 2y + 2z = 2, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad x + y \leqslant 1;$

(b) $z = xy, \quad x^2 + y^2 \leqslant 9;$

(c) $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 \leqslant 1;$

(d) $z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z \geqslant 0.$

4.8. Obliczyć podane całki potrójne.

(a) $\displaystyle\iiint\limits_U 24(x + y + z)dxdydz, \quad U = [0, 1] \times [1, 2] \times [0, 2];$

(b) $\displaystyle\iiint\limits_U \frac{x}{yz}dxdydz, \quad U = [1, 2] \times [1, e] \times [e, e^2];$

(c) $\displaystyle\iiint\limits_U e^{x+y+z}dxdydz, \quad U = \Big\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : -x \leqslant y \leqslant 1,\, 0 \leqslant z \leqslant -x\Big\};$

(d) $\displaystyle\iiint\limits_U \frac{2}{(x + y + z + 1)^3}dxdydz, \quad U = \Big\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x \geqslant 0,\, y \geqslant 0,\, 0 \leqslant z \leqslant 1 - x - y\Big\}.$

4.9. W całce iterowanej zmienić kolejność całkowania wg podanego schematu

(a) $\displaystyle\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2-2x} dy \int\limits_0^{3-3x-1,5y} f(x, y, z)\, dz = \int\limits_?^? dy \int\limits_?^? dz \int\limits_?^? f(x, y, z)\, dx;$

(b) $\displaystyle\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f(x, y, z)\, dz = \int\limits_?^? dz \int\limits_?^? dx \int\limits_?^? f(x, y, z)\, dy;$

(c) $\displaystyle\int\limits_0^3 dz \int\limits_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} dx \int\limits_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} f(x, y, z)\, dy = \int\limits_?^? dx \int\limits_?^? dy \int\limits_?^? f(x, y, z)\, dz\ .$

4.10. Obliczyć całki wprowadzając współrzędne walcowe

(a) $\displaystyle\iiint\limits_U \Big(x^2 + y^2\Big)\, dxdydz, \quad U = \Big\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 \leqslant 4,\, 1 - x \leqslant z \leqslant 2 - x\Big\};$

(b) $\displaystyle\iiint\limits_U z^2dxdydz, \quad U = \Big\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x \geqslant 0, \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant 2\Big\}\ ;$

(c) $\displaystyle\iiint\limits_U xydxdydz, \quad U = \Big\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 2 + \sqrt{x^2 + y^2}\Big\};$

(d) $\displaystyle\iiint\limits_U dxdydz, \quad U = \Big\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 25, z \geqslant 4\Big\}.$

4.11. Obliczyć całki wprowadzając współrzędne sferyczne

(a) $\displaystyle\iiint\limits_U \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdydz, \quad U=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : 4\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 9,\ y\geqslant 0\right\};$

(b) $\displaystyle\iiint\limits_U \left(x^2+y^2\right)dxdydz, \quad U=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{1-x^2-y^2}\right\};$

(c) $\displaystyle\iiint\limits_U z^2dxdydz, \quad U=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : x^2+y^2+(z-2)^2\leqslant 4\right\};$

(d) $\displaystyle\iiint\limits_U dxdydz, \quad U=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : x^2+y^2+z^2\leqslant 25, z\geqslant 2{,}5\right\}.$

4.12. Obliczyć, stosując całkę potrójną, objętości brył ograniczonych podanymi powierzchniami.

(a) $z=4-y^2, \quad z=2+y^2, \quad x=-1, \quad x=2;$ (b) $z=\dfrac{1}{1+x^2+y^2}, \quad z=0, \quad x^2+y^2=1;$

(c) $z=\sqrt{x^2+y^2}, \quad z=\sqrt{2-x^2-y^2}, \quad x,y\geqslant 0;$ (d) $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}, \quad z=\sqrt{4-x^2-y^2}.$

4.13. Wyznaczyć współrzędne środka masy jednorodnego obszaru:

(a) trójkąta równoramiennego o podstawie a i wysokości h;

(b) ćwiartki koła o promieniu R;

(c) $U=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1,\ 0\leqslant z\leqslant 1-x\right\};$

(d) półkuli o promieniu R.

4.14. Obliczyć momenty bezwładności jednorodnych obszarów o masie M:

(a) trójkąta prostokątnego, względem jednej z przyprostokątnych;

(b) półkola o promieniu R, wzglądem osi symetrii;

(c) stożka o promieniu podstawy R i wysokości H, względem osi stożka;

(d) kuli o promieniu R, względem średnicy.

Podobne zadania (z rozwiązaniami lub odpowiedziami) można znaleźć w skrypcie: M.Gewert, Z.Skoczylas, Analiza matematyczna 2. Przykłady i zadania, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2019, rozdziały 4-5.

Jolanta Sulkowska

LISTA 5 *(na 2 ćwiczenia)*

Transformacje całkowe

5.1. Narysować wykres funkcji $y = f(t)$ i korzystając z definicji obliczyć jej transformatę Laplace'a

a) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad |t-2| > 1 \\ 1 & \text{dla} \quad |t-2| \leqslant 1 \end{cases}$, b) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad t < 0 \vee t > 1 \\ 1 - e^t & \text{dla} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$,

c) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad t < 0 \\ t & \text{dla} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 1 & \text{dla} \quad t > 1 \end{cases}$, d) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad t < 0 \vee t > 2 \\ t & \text{dla} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 2-t & \text{dla} \quad 1 < t \leqslant 2 \end{cases}$.

5.2. Korzystając ze wzorów podanych na wykładzie i własności przekształcenia Laplace'a napisać transformatę podanej funkcji

a) $f(t) = 2t - 1$, b) $f(t) = 4\cos 2t - 0{,}5 \sin 2t$, c) $f(t) = te^{-2t}$, d) $f(t) = e^{-2t}(\cos 3t + 4 \sin 3t)$.

5.3. Wyznaczyć funkcję ciągłą o podanej transformacie Laplace'a

a) $F(s) = \dfrac{3s-2}{s^2}$, b) $F(s) = \dfrac{1-s}{s^2+4s+3}$, c) $F(s) = \dfrac{s+1}{s^2(s+2)}$,

d) $F(s) = \dfrac{3s+10}{s^2+25}$, e) $F(s) = \dfrac{2s+3}{s^2+2s+10}$, f) $F(s) = \dfrac{e^{-3s}}{s+1}$.

5.4. Rozwiązać zagadnienie początkowe

(a) $y' + y = e^t; \quad y(0) = 0{,}5;$ (b) $y' - 2y = 1; \quad y(0) = 2;$

(c) $y'' + y' - 12y = 0; \quad y(0) = 0, y'(0) = 7;$ (d) $y'' - 2y' + y = 1; \quad y(0) = 0, y'(0) = 1;$

(e) $4y'' + y = \sin t; \quad y(0) = 6, y'(0) = 0;$ (f) $y'' + 4y' + 13y = 13t + 4; \quad y(0) = 0, y'(0) = 2.$

5.5. Korzystając z definicji wyznaczyć transformatę Fouriera podanej funkcji

a) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad |t-1| > 1 \\ 1 & \text{dla} \quad |t-1| \leqslant 1 \end{cases}$, b) $f(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{dla} \quad |t| \leqslant 1 \\ 0 & \text{dla} \quad |t| > 1 \end{cases}$,

c) $f(t) = e^{-|t|}$, d) $f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{dla} \quad |t| \leqslant \pi \\ 0 & \text{dla} \quad |t| > \pi \end{cases}$.

5.6. Korzystając ze wzorów podanych na wykładzie, wyników poprzedniego zadania i własności przekształcenia Fouriera napisać $\mathcal{F}$-transformatę podanej funkcji

a) $f(t) = \begin{cases} 3 & \text{dla} \quad |t-2| \leqslant 1 \\ 0 & \text{dla} \quad |t-2| > 1 \end{cases}$, b) $f(t) = \begin{cases} e^{-3(t-1)} & \text{dla} \quad t - 1 \geqslant 0 \\ 0 & \text{dla} \quad t - 1 < 0 \end{cases}$,

c) $f(t) = e^{-2|t|}$, d) $f(t) = \mathbf{1}(t) \cdot t \cdot e^{-t}$,

e) $f(t) = \begin{cases} \sin \dfrac{t}{2} & \text{dla} \quad |t| \leqslant 2\pi \\ 0 & \text{dla} \quad |t| > 2\pi \end{cases}$, f) $f(t) = \begin{cases} \cos 2t & \text{dla} \quad |t| \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \text{dla} \quad |t| > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$,

g) $f(t) = \mathbf{1}(t) \cdot e^{-t} \cdot \cos t$, h) $f(t) = \mathbf{1}(t) \cdot e^{-t} \cdot \sin 2t$.

5.7. Podać funkcję o podanej transformacie Fouriera

a) $\hat{f}(\omega) = \dfrac{1}{1+4i\omega}$, b) $\hat{f}(\omega) = \dfrac{\sin(2\omega)}{\omega}$, c) $\hat{f}(\omega) = \dfrac{1}{2+\omega^2}$,

d) $\hat{f}(\omega) = \dfrac{e^{-i\omega}}{1+i\omega}$, e) $\hat{f}(\omega) = \dfrac{1}{\omega^2+4\omega+5}$, f) $\hat{f}(\omega) = \dfrac{e^{2i\omega}}{1+4\omega^2}$.

Podobne zadania (z rozwiązaniami lub odpowiedziami) można znaleźć w skryptach:
1.M.Gewert, Z.Skoczylas, Równania różniczkowe zwyczajne. Teoria, przykłady, zadania, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2016, rozdział 4.
2.Jolanta Długosz, Funkcje zespolone. Teoria, przykłady, zadania, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2005, rozdział 6.

Jolanta Sulkowska

LISTA POWTÓRKOWA 1

P1.1. Obliczyć całki niewłaściwe. Podać ich interpretację geometryczną, wykonując odpowiednie rysunki.

a) $\int\limits_3^\infty \frac{dx}{(x+3)(x+5)}$, b) $\int\limits_0^\infty \frac{x}{e^{3x}}dx$, c) $\int\limits_1^{e^2} \frac{dx}{x\ln^3 x}$, d) $\int\limits_{2{,}5}^5 \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$.

P1.2. Zbadać zbieżność całek niewłaściwych. Sformułować wykorzystywane kryteria.

a) $\int\limits_7^\infty \frac{x+2}{x^2+\sqrt{x}+1}\,dx$, b) $\int\limits_2^\infty \frac{e^x+2}{e^{3x}+e^x+1},dx$, c) $\int\limits_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x}}$, d) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2\frac{x}{3}}{x^3}\,dx$.

P1.3. Obliczyć pole obszaru

a) ograniczonego wykresem funkcji $f(x)=xe^{-2x}, x\geqslant 0$, i asymptotą tego wykresu;

b) ograniczonego wykresem funkcji $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+5}$ i asymptotą tego wykresu,

c) ograniczonego wykresem funkcji $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, osią OX i asymptotami tego wykresu.

Sporządzić rysunki obszarów.

P1.4. Zbadać zbieżność szeregów liczbowych. Sformułować wykorzystywane kryteria.

a) $\sum\limits_{n=2}^\infty \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$, b) $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{\sqrt{n}+4n\sqrt{n}}{n^3+7}$, c) $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}}$, d) $\sum\limits_{n=1}^\infty (-1)^n \sin\frac{1}{n^2}$,

e) $\sum\limits_{n=3}^\infty \frac{3^{2n+1}}{4^n+9^n}$, f) $\sum\limits_{n=0}^\infty \frac{4^{2n+1}}{(n+2)!}$, g) $\sum\limits_{n=0}^\infty \frac{n^{12}\cdot 2^n}{14+5^n}$, h) $\sum\limits_{n=2}^\infty \frac{(-1)^n}{n^{33}-n^2}$.

P1.5. Uzasadnić, że szereg jest zbieżny i obliczyć jego sumę z błędem nie większym niż 0,01.

a) $\sum\limits_{n=3}^\infty \frac{(-1)^n}{5n+1}$, b) $\sum\limits_{n=2}^\infty \frac{(-1)^n}{(n+1)\cdot 3^n}$, c) $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n)!}$.

P1.6. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

a) $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{2^{2n+1}}{n^4+1}(x+3)^n$, b) $\sum\limits_{n=0}^\infty \frac{(x-1)^n}{2^n+3^n}$, c) $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{(x+e)^n}{\sqrt{n+1}\cdot 5^n}$, d) $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{n(2x+1)^n}{n+10}$.

P1.7. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcje $f(x)$, $f'(x)$, $\int\limits_0^x f(t)\,dt$. Podać promienie zbieżności otrzymanych szeregów.

a) $f(x)=\frac{x^2}{x+3}$, b) $f(x)=xe^{x^2}$, c) $f(x)=x^2\sin\frac{x}{2}$, d) $f(x)=x\cos(2x^2)$.

P1.8. Wykorzystując szeregi Maclaurina funkcji $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{(1-x)^2}$, $\ln(1+x)$, obliczyć sumy szeregów liczbowych:

a) $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{n}{4^{n+1}}$, b) $\sum\limits_{n=2}^\infty \frac{2n+3}{3^n}$, c) $\sum\limits_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+2)(e-1)^n}$, d) $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{n}{(n+2)\cdot 2^n}$.

P1.9. Wyznaczyć i narysować dziedzinę naturalną funkcji oraz poziomicę dla poziomu $h = 0$

a) $f(x, y) = \arcsin(y - x^2)$, b) $f(x, y) = \ln \dfrac{x^2 + y^2 + 2y}{x + y}$, c) $f(x, y) = \sqrt{\dfrac{2x + y - 1}{y + 2}}$.

P1.10. Dana jest funkcja $f(x, y) = \sqrt{\ln \dfrac{x}{y} - 1}$. Wyznaczyć i narysować zbiór $\left\{(x, y) \in D_f : \dfrac{\partial f}{\partial y} < 0\right\}$.

P1.11. Napisać równanie płaszczyzny stycznej
a) w punkcie $(4, 2, z_0)$ do powierzchni $z = (\ln x - 2\ln y)^2$,
b) w punkcie $(3, y_0, -5)$ do powierzchni $x^2 + y^2 - z^2 = 0$,
c) do wykresu funkcji $f(x, y) = x^3 + 3xy - 10x + 2y$. Płaszczyzna styczna jest równoległa do płaszczyzny $\pi : 4x - 5y + z = 0$.

P1.12. Oszacować, stosując różniczkę, z jakim błędem bezwzględnym i względnym obliczona będzie wartość z, jeśli

a) $z = \sqrt{x^2 + y^3}$, $x = 1,00 \pm 0,02$, $y = 2,00 \pm 0,03$;
b) $z = x\sqrt{y} + \ln x^4$, $x = 1,00 \pm 0,01$, $y = 10000 \pm 10$.

P1.13. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji f w punkcie (x_0, y_0) w kierunku wersora $\vec{v}$. Dla jakiego wersora pochodna ta ma wartość największą, dla jakiego – najmniejszą, a dla jakiego jest równa zeru?

a) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^6 - 8y^3}$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$, b) $f(x, y) = |x| + |y|$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

P1.14. Dana jest funkcja $f(x, y) = e^{x^2+3y}$.

a) Obliczyć pochodną kierunkową funkcji f w punkcie $(2, -1)$ w kierunku wersora $\vec{v} = \left[\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}\right]$.
b) Dla jakiego wersora $\vec{v}$ pochodna kierunkowa $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(2, -1)$ ma wartość największą? Jaka jest to wartość?
c) Dla jakiego wersora $\vec{v}$ pochodna kierunkowa $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(2, -1)$ ma wartość najmniejszą? Jaka jest to wartość?
d) Wyznaczyć wersory $\vec{v}$, dla których $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(2, -1) = 0$.

P1.15. Wiadomo, że $\frac{\partial f}{\partial \vec{v_1}}(x_0, y_0) = 1$ dla wersora $\vec{v_1} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ i $\frac{\partial f}{\partial \vec{v_2}}(x_0, y_0) = 0$ dla wersora $\vec{v_2} = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji f w punkcie (x_0, y_0) w kierunku wersora $\vec{v} = \left[\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$. (Funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) ciągłe pochodne cząstkowe).

P1.16. Wyznaczyć $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ dla podanych funkcji

a) $f(x, y) = 2x - 5xy + \dfrac{1}{2}xy^2 - \dfrac{1}{6}y^3$, b) $f(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$, c) $f(x, y) = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}$.

Podobne zadania (z rozwiązaniami lub odpowiedziami) można znaleźć w skrypcie:

M. Gewert, Z. Skoczylas, Analiza matematyczna 2. Przykłady i zadania, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2019, rozdziały 1,2,3.

Jolanta Sulkowska

LISTA POWTÓRKOWA 2

P2.1. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji
a) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 54 \ln y$, b) $f(x,y) = x^3 - 4xy + 2y^2$, c) $f(x,y) = (x^2 - y^2) \cdot e^{-x}$.

P2.2. Wyznaczyć ekstrema funkcji dla argumentów spełniających podany warunek

a) $f(x,y) = x^2 + y^2,\ xy = 4;$ b) $f(x,y) = x^2 + xy - y^2 + y,\ 2x + 3y = 1;$
c) $f(x,y) = e^{-x}\left(2x + y^2\right),\ x - y = 0.$

P2.3. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji
a) $f(x,y) = xy^2$ na kole $x^2 + y^2 \leqslant 1$,
b) $f(x,y) = 2x^2+2y^2+(x-1)^2+(y-1)^2$ na obszarze trójkąta o wierzchołkach $(0,0),\ (1,0),\ (0,1)$,
c) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$ na obszarze określonym nierównościami: $x \leqslant 0,\ |x| + |y| \leqslant 1$.

P2.4.
a) Metodami rachunku różniczkowego wyznaczyć odległość płaszczyzny $2x - 2y + z = 5$ od początku układu współrzędnych.
b) Metodami rachunku różniczkowego wyznaczyć punkt osi OZ leżący najbliżej prostej

$$x = t + 1, \quad y = t, \quad z = t - 2, \quad t \in \mathbf{R}.$$

c) Koszt wykonania m^2 dna prostopadłościennego pojemnika jest dwukrotnie wyższy niż koszt wykonania m^2 ściany bocznej lub pokrywy. Jakie powinny być wymiary pojemnika o danej objętości V, aby koszt jego wykonania był najmniejszy?

P2.5. Całkę podwójną $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ zamienić na całki iterowane (dla dwóch kolejności całkowania), jeżeli obszar D jest ograniczony podanymi krzywymi.

(a) $x^2 + y = 2, \quad y = -\sqrt{2 - x^2};$ (b) $y = \ln x, \quad x + y = 1, \quad x - 2 = 0;$
(c) $y = 4x^2 - 2, \quad y = x^2 + 1;$ (d) $y = \arcsin x, \quad y = \arccos x, \quad x = 0.$

P2.6. Dla podanych całek iterowanych narysować obszar całkowania, a następnie zmienić kolejność całkowania.

(a) $\int\limits_{-\ln 2}^{0} dx \int\limits_{0}^{2e^x - 1} f(x,y)\,dy$, (b) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x-2}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy$, (c) $\int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{1-\sqrt{\frac{1-y}{2}}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx.$

P2.7. Narysować obszar całkowania i obliczyć całkę podwójną.

(a) $\iint\limits_D xy\,dxdy$, jeśli obszar D jest ograniczony krzywymi: $x = y^2, \quad x = 1 + \sqrt{1 - y^2};$

(b) $\iint\limits_D e^x\,dxdy$, jeśli obszar D jest ograniczony prostymi: $y = x, \quad y = x + 2, \quad y = 2, \quad y = 3;$

(c) $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\,dxdy$, jeśli obszar D jest ograniczony krzywymi: $y = x, \quad x = 2, \quad xy = 1.$

P2.8. Obliczyć całkę podwójną wprowadzając współrzędne biegunowe.

(a) $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\,dxdy, \quad D=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : y\geqslant |x|\,,\ x^2+y^2\leqslant 1\right\};$

(b) $\iint\limits_D x\,dxdy, \quad D=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : y\leqslant \frac{x}{\sqrt{3}},\ x^2+y^2-5y\leqslant 0\right\};$

(c) $\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dxdy, \quad D=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : y\geqslant x,\ x^2+y^2\leqslant x\right\}.$

P2.9. Obliczyć pola obszarów ograniczonych podanymi krzywymi lub opisanych podanymi nierównościami.

(a) $xy=4, \quad x+y+5=0$; (b) $x^2+y^2-2x-2y\leqslant 0, \quad x\geqslant 0, \quad y\geqslant 0.$

P2.10. Obliczyć pola podanych płatów powierzchniowych.

(a) $6x-3y+2z=6, \quad x\geqslant 0, \quad y\leqslant 0, \quad 2x-y\leqslant 2$; (b) $z=x^2+y^2, \quad x^2+y^2\leqslant 8.$

P2.11. Obliczyć całki potrójne:

(a) $\iiint\limits_U 2z\,dxdydz$, jeśli U jest czworościanem o wierzchołkach $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,1,1)$;

(b) $\iiint\limits_U \sqrt{x}\,dxdydz$, jeśli $U=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : 1\leqslant x\leqslant 4,\ 0\leqslant y\leqslant \pi,\ 0\leqslant z\leqslant \sin y\right\}$;

(c) $\iiint\limits_U x^2\sin(\pi y)\,dxdydz$, jeśli $U=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : 0\leqslant y\leqslant 1,\ 0\leqslant z\leqslant 1-x^2\right\}$.

P2.12. Obliczyć całki wprowadzając współrzędne walcowe lub sferyczne

(a) $\iiint\limits_U x^2\,dxdydz$, jeśli $U=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : x^2+y^2\leqslant 9,\ 1-y\leqslant z\leqslant 2-y\right\}$;

(b) $\iiint\limits_U y\,dxdydz$, jeśli $U=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : x^2+y^2\leqslant z\leqslant 2+\sqrt{x^2+y^2},\ x\geqslant 0,\ y\leqslant 0\right\}$;

(c) $\iiint\limits_U z\,dxdydz, \quad U=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : 1\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 5,\ z\geqslant 0\right\};$

(d) $\iiint\limits_U x^2 dxdydz, \quad U=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : \sqrt{3\left(x^2+y^2\right)}\leqslant z\leqslant \sqrt{1-x^2-y^2}\right\}.$

P2.13. Obliczyć objętości brył ograniczonych podanymi powierzchniami.

(a) $z = 0, \quad z = 1 - x^2, \quad x = y^2;$ (b) $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 3 - x^2 - y^2;$
(c) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \quad z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}.$

P2.14. Wyznaczyć współrzędne środka masy jednorodnego obszaru:

(a) półkola o promieniu R;

(b) $D = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 \leqslant y \leqslant 1\right\};$

(c) $U = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 \leqslant 4,\ 0 \leqslant z \leqslant 6,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\right\};$

(d) $U = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{9 - x^2 - y^2}\right\}.$

P2.15. Rozwiązać zagadnienie początkowe stosując transformację Laplace'a:

(a) $y' - 5y = 3e^{4t}, \quad y(0) = -1;$
(b) $y' - 3y = 6e^{3t}), \quad y(0) = 2;$
(c) $y' + y = 2t, \quad y(0) = 2;$
(d) $2y'' + 3y' - 2y = 0; \quad y(0) = 1, y'(0) = 0;$
(e) $y'' - y' = 2(1 - t); \quad y(0) = 1, y'(0) = 1;$
(f) $y'' + 2y' + 5y = 15; \quad y(0) = 5, y'(0) = 0.$

Podobne zadania (z rozwiązaniami lub odpowiedziami) można znaleźć w skryptach:
M. Gewert, Z. Skoczylas, Analiza matematyczna 2. Przykłady i zadania, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2019, rozdziały 3,4,5.
M. Gewert, Z. Skoczylas, Równania różniczkowe zwyczajne. Teoria, przykłady, zadania, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2016, rozdział 4.

Jolanta Sulkowska