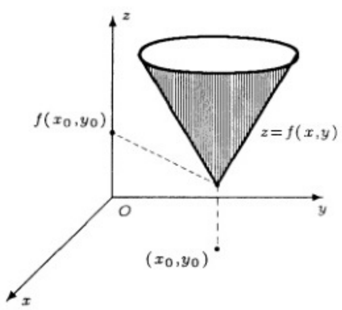
Wykład jest prowadzony w oparciu o podręcznik „Analiza matematyczna 2. Definicje, twierdzenia, wzory" M. Gewerta i Z. Skoczylasa.

Wykład 7. Ekstrema lokalne funkcji dwóch zmiennych.

Definicja Mówimy, że funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) *minimum lokalne właściwe*, gdy istnieje sąsiedztwo $S(x_0, y_0)$ takie, że dla dowolnego punktu $(x, y) \in S(x_0, y_0)$ zachodzi nierówność

$$f(x, y) > f(x_0, y_0).$$

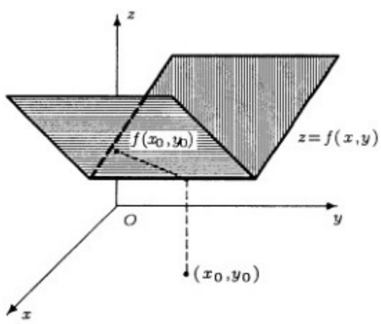


Analogicznie, mówimy, że funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) *maksimum lokalne właściwe*, gdy istnieje sąsiedztwo $S(x_0, y_0)$ takie, że dla dowolnego punktu $(x, y) \in S(x_0, y_0)$ zachodzi nierówność

$$f(x, y) < f(x_0, y_0).$$

Uwaga 1. Jeśli w powyższej definicji zastąpimy ostre nierówności przez słabe (tzn. $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ lub $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$), to mówimy, że funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) *minimum lokalne* lub *maksimum lokalne*.

2. Maksima i minima lokalne funkcji (właściwe lub niewłaściwe) nazywamy *ekstremami lokalnymi*.



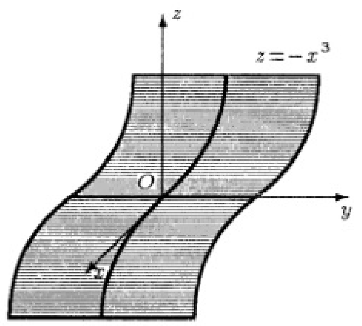
Przykłady Korzystając z definicji zbadać, czy podane funkcje mają ekstrema lokalne we wskazanych punktach.

1. $f(x,y) = 5|x| + |y+1|$ w punkcie $(0,-1)$,
2. $f(x,y) = x^2 - 2y^2$ w punkcie $(0,0)$.

Twierdzenie (warunek konieczny istnienia ekstremum)
Jeśli funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) ekstremum lokalne i istnieją pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ oraz $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$, to

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0, \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0. \end{cases}$$

Uwaga
1. Punkty, w których obie pochodne cząstkowe się zerują nazywamy *stacjonarnymi (krytycznymi)*.
2. W powyższym twierdzeniu implikacja odwrotna nie jest prawdziwa. Zerowanie się obu pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu funkcji nie gwarantuje istnienia ekstremum lokalnego! Przykładowo, funkcja $f(x,y) = -x^3$ spełnia warunki $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, ale nie ma w punkcie $(0,0)$ ekstremum lokalnego.



Fakt Funkcja może mieć ekstreum lokalne tylko w punkcie stacjonarnym lub w punkcie, w którym przynajmniej jedna pochodna nie istnieje.

Twierdzenie (warunek wystarczający istnienia ekstremum)
Niech funkcja f ma ciągłe pochodne cząstkowe drugiego rzędu na otoczeniu punktu (x_0,y_0) oraz niech

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0.$$

Jeśli wyznacznik, zwany *hessjanem*,

$$H(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \\ & \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0,$$

to funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) ekstremum lokalne właściwe.
Jeśli $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$, to w punkcie (x_0, y_0) funkcja ma minimum lokalne właściwe.
Jeśli $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$, to w punkcie (x_0, y_0) funkcja ma maksimum lokalne właściwe.

Uwaga Jeśli hessjan $H(x_0, y_0)$ jest ujemny, to funkcja f nie ma ekstremum lokalnego w punkcie (x_0, y_0). Jeśli hessjan $H(x_0, y_0) = 0$, to badanie istnienia ekstremum w punkcie (x_0, y_0) musimy przeprowadzić innymi metodami (np. z definicji).

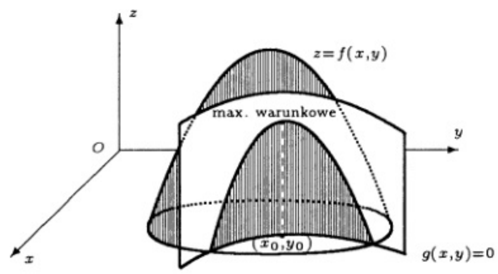
Przykłady Znaleźć wszystkie ekstrema lokalne funkcji dwóch zmiennych:
1. $f(x, y) = xe^{-y} + \dfrac{1}{x} + e^y$, 2. $f(x, y) = xy + \ln y + x^2$, 3. $f(x, y) = \dfrac{8}{x} + \dfrac{x}{y} + y$.

Ekstremum warunkowe funkcji $f(x, y)$ przy warunku $g(x, y) = 0$ to lokalnie największa lub najmniejsza wartość tej funkcji na zbiorze punktów spełniających ten warunek. Formalnie zapiszemy to następująco:

Definicja (*ekstrema warunkowe*)
Mówimy, że funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) *minimum lokalne właściwe z warunkiem* $g(x, y) = 0$, gdy $g(x_0, y_0) = 0$ oraz istnieje sąsiedztwo $S(x_0, y_0)$ takie, że dla dowolnego punktu $(x, y) \in S(x_0, y_0)$ spełniającego warunek $g(x, y) = 0$ zachodzi nierówność

$$f(x, y) > f(x_0, y_0).$$

Analogicznie, funkcja f ma *maksimum warunkowe*, gdy zachodzi odwrotna nierówność, tzn. $f(x, y) < f(x_0, y_0)$.



Ekstremów lokalnych funkcji f dwóch zmiennych z warunkiem $g(x,y)=0$ można szukać następująco:
1. Krzywą $\Gamma : g(x,y)=0$ dzielimy na łuki, które są wykresami funkcji postaci $y=h(x)$, gdzie $x\in I$ lub postaci $x=p(y)$, gdzie $y\in J$.
2. Szukamy ekstremów funkcji jednej zmiennej $f(x,h(x))$ na przedziale I lub funkcji $f(p(y),y)$ na przedziale J.

Przykłady Wyznaczyć ekstrema podanych funkcji, których argumenty spełniają podane warunki:
1. $f(x,y)=x^2+y^2,\ xy=4$, 2. $f(x,y)=x^2-2xy,\ x-y^2=0$, 3. $f(x,y)=2x+3y,\ x^2+y^2=1$.

Do wyznaczenia ekstremum warunkowego można też użyć *metody współczynników (mnożników) Lagrange'a*. Przedstawimy ją tutaj dla funkcji dwóch zmiennych.

Metoda mnożników Lagrange'a
Definiujemy funkcję $F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\, g(x,y)$ i rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} F_x(x,y,\lambda)=0\\ F_y(x,y,\lambda)=0\\ g(x,y)=0\end{cases}$$

Każdy punkt spełniający ten układ równań jest punktem, w którym może, ale nie musi, istnieć lokalne ekstremum warunkowe. Sprawdzenie warunku koniecznego polega na obliczeniu w każdym punkcie stacjonarnym *hessjanu obrzeżonego* czyli:

$$\bar{H}=\det\begin{bmatrix} 0 & g_x & g_y\\ g_x & F_{xx} & F_{xy}\\ g_y & F_{yx} & F_{yy}\end{bmatrix}$$

Jeśli ten wyznacznik jest dodatni, to w danym punkcie stacjonarnym jest *lokalne maksimum warunkowe*, a jeśli ujemny to *lokalne minimum warunkowe*.

Przykłady Korzystając z metody mnożników Lagrange'a wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y)=x^2+y^2$ przy warunku $3x+2y=6$.

Przypomnijmy twierdzenie Weierstrassa:
Twierdzenie
Jeśli $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, to jej obraz jest zbiorem ograniczonym. Ponadto funkcja f *osiąga swoje kresy*, tzn. dla pewnych liczb $c,d\in[a,b]$ zachodzi $f(c)\le f(x)\le f(d)$ dla każdego $x\in[a,b]$.

Uwaga Również w przypadku funkcji dwóch zmiennych twierdzenie Weiestrassa zachodzi i każda ciągła funkcja określona na zbiorze domkniętym i ograniczonym w $\mathbb{R}^2$ przyjmuje wartości ekstremalne.

Definicja Niech A będzie niepustym podzbiorem dziedziny funkcji f.
1. Mówimy, że liczba m jest *najmniejszą wartością* funkcji f na zbiorze A, gdy istnieje punkt $(x_0, y_0) \in A$ taki, że $f(x_0, y_0) = m$ (czyli wartość m jest w tym punkcie realizowana) oraz dla każdego $(x, y) \in A$ zachodzi nierówność $f(x, y) \geq m$. Piszemy wtedy $f_{\min} = m$.
2. Mówimy, że liczba M jest *największą wartością* funkcji f na zbiorze A, gdy istnieje punkt $(x_0, y_0) \in A$ taki, że $f(x_0, y_0) = M$ (czyli wartość M jest w tym punkcie realizowana) oraz dla każdego $(x, y) \in A$ zachodzi nierówność $f(x, y) \leq M$. Piszemy wtedy $f_{\max} = M$.

Algorytm szukania ekstremów globalnych na obszarze domkniętym:
Wartość najmniejszą i największą funkcji f dwóch zmiennych na ograniczonym obszarze domkniętym znajdujemy, postępując według algorytmu:
1. Na obszarze otwartym szukamy punktów, w których funkcja **może mieć** ekstremum lokalne.
2. Na brzegu obszaru szukamy punktów, w których funkcja **może mieć** ekstremum warunkowe.
3. Porównujemy wartości funkcji w otrzymanych punktach i na tej podstawie ustalamy najmniejszą i największą wartość funkcji f na danym obszarze.

Przykłady Znaleźć najmniejsze i największe wartości podanych funkcji na wskazanych obszarach.
1. $f(x, y) = x^2 + y^2$, $D : |x| + |y| \leq 2$,
2. $f(x, y) = xy^2 + 4xy - 4x$, $D : -3 \leq x \leq 3, -3 \leq y \leq 0$.

Przykłady zagadnień ekstremalnych w geometrii, fizyce i technice:

1. W trójkącie o wierzchołkach $A = (-1, 5)$, $B = (1, 4)$, $C = (2, -3)$ znaleźć punkt $M = (x_0, y_0)$, dla którego suma kwadratów jego odległości od wierzchołków jest najmniejsza.
2. Jakie powinny być długość a, szerokość b i wysokość h prostopadłościennej otwartej wanny o pojemności V , aby ilość blachy zużytej do jej zrobienia była najmniejsza?
3. Znaleźć odległość między prostymi skośnymi:
$$k : \begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ z + 1 = 0. \end{cases} \quad \text{oraz} \quad l : \begin{cases} x - y + 3 = 0, \\ z - 2 = 0. \end{cases}$$
4. Prostopadłościenny magazyn ma mieć objętość $V = 216\ m^3$. Do budowy ścian magazynu używane są płyty w cenie 30 zł$/m^2$, do budowy podłogi w cenie 40 zł$/m^2$, a sufitu w cenie 20 zł$/m^2$. Znaleźć długość a, szerokość b i wysokość h magazynu, którego koszt budowy będzie najmniejszy.
5. Firma produkuje drzwi wewnętrzne i zewnętrzne w cenach zbytu odpowiednio 500 zł i 1500 zł za sztukę. Koszt wyprodukowania x sztuk drzwi wewnętrznych i y sztuk drzwi zewnętrznych

wynosi

$$K(x,y) = 100\left(\frac{1}{2}x^2 + 2xy + y^2\right) \text{ [zł]}.$$

Ile sztuk drzwi każdego rodzaju powinna wyprodukować firma, aby osiągnąć jak największy zysk?