Zastosowania równań różniczkowych cząstkowych

Lista 1: Równania pierwszego rzędu i metoda charakterystyk

1. (*Zachowanie*) Niech $u = u(x,t)$ będzie gęstością (na jednostkę długości) pewnej substancji spełniającej prawo zachowania bez źródeł. Zakładając, że u jest x-całkowalna na $\mathbb{R}$ a strumień znika w nieskończoności pokaż, że całkowita ilość u nie zmienia się w czasie.

2. Rozwiąż podane zagadnienia. Naszkicuj rodzinę charakterystyk oraz rozwiązanie $u(x,t)$ dla kilku czasów t (wspomóż się komputerem, gdy nie da się inaczej). Sprawdź ręcznie, czy otrzymana funkcja jest rzeczywiście rozwiązaniem danego zagadnienia.

$$a)\begin{cases} u_t + 10u_x = 0, \quad t>0, \quad x \in \mathbb{R}; \\ u(x,0) = \frac{1}{1+x^2} \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases} \qquad b)\begin{cases} u_t + 2tu_x = -u, \quad t>0, \quad x \in \mathbb{R}; \\ u(x,0) = e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} u_t - x^2u_x = \sin u, \quad t>0, \quad x>0; \\ u(x,0) = 2\arctan x, \quad x \geq 0, \end{cases} \qquad d)\begin{cases} u_t + 2tu_x = xtu, \quad t>0, \quad x \in \mathbb{R}; \\ u(x,0) = x, \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

3. (*Latarnia morska*) Latarnia znajduje się w $x = 0$ oraz przez cały czas wysyła sygnał o natężeniu $\psi(t)$.

   (a) Przez $u = u(x,t)$ oznaczmy natężenie światła w dowolnym punkcie (x,t). Wiedząc, że światło rozchodzi się ze stałą prędkością c znajdź $u(x,t)$ dla $x > 0$.

   (b) Rozwiąż to samo zagadnienie zakładając, że światło jest tłumione przez chmury i inne cząsteczki zawieszone w powietrzu proporcjonalnie do jego natężenia.

4. (*Zagadnienia początkowo-brzegowe*) Czasami musimy rozwiązać zagadnienia, w których podany jest zarówno warunek początkowy oraz brzegowy. Rozwiąż następujące problemy.

$$a)\begin{cases} u_t + c\,u_x = 0, \quad t>0, \quad x>0, \quad c>0; \\ u(x,0) = \phi(x), \quad x>0; \\ u(0,t) = \psi(t), \quad t>0, \quad \phi(0) = \psi(0), \end{cases} \qquad b)\begin{cases} u_t + tu_x = -u^2, \quad t>0, \quad x>0; \\ u(x,0) = x, \quad x>0; \\ u(0,t) = \sin t, \quad t>0, \end{cases}$$

   Jakie warunki muszą być spełnione aby zagadnienie $a)$ miało rozwiązanie dla $c < 0$?

5. (*Dane na dowolnej krzywej*) Niech warunek dla równania $u_t + cu_x = 0$ będzie zadany na dowolnej krzywej $t = \tau(x)$ to znaczy

$$u(x, \tau(x)) = \phi(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

   Na przykład, zwykły warunek początkowy to $\tau(x) \equiv 0$. Przeprowadź analizę następujących zagadnień

$$a)\begin{cases} u_t + cu_x = 0, \quad t>0, \quad x \in \mathbb{R}; \\ u(x,kx) = x^2, \quad kc \neq 1, \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases} \qquad b)\begin{cases} u_t + cu_x = 0, \quad t>0, \quad x \in \mathbb{R}; \\ u(x,cx) = x^3, \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

   Wyprowadź ogólny warunek konieczny dla istnienia rozwiązania zagadnienia

$$\begin{cases} u_t + c(x,t)u_x = g(x,t,u), \quad t>0, \quad x \in \mathbb{R}; \\ u(x,\tau(x)) = \phi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

6. (*Równania quasi-liniowe*) Rozwiąż podane zagadnienia oraz naszkicuj charakterystyki.

$$a)\begin{cases} u_t + \ln u\, u_x = 0, \quad t>0, \quad x \in \mathbb{R}; \\ u(x,0) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases} \qquad b)\begin{cases} u_t + u_x = u^2, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x>0; \\ u(0,t) = \psi(t), \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} u_t + u^2u_x = 0, \quad t>0, \quad x \in \mathbb{R}; \\ u(x,0) = x, \quad x \geq 0, \end{cases} \qquad d)\begin{cases} u_t + u^{-1}u_x = 0, \quad t>0, \quad x>-1; \\ u(x,0) = \frac{1}{1+x}, \quad x>-1. \end{cases}$$

7. Znajdź rozwiązanie następującego zagadnienia quasi-liniowego

$$\begin{cases} u_t + uu_x = -u, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}; \\ u(x,0) = -x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

8. (*Problem nielokalny*) Kiedy szybkość propagacji jest zależna od wartości funkcji na pewnym nietrywialnym podzbiorze dziedziny to mówimy o *zagadnieniu nielokalnym*. Poniższe zagadnienie opisuje zjawisko konwekcji, której prędkość zależy od tego ile substancji już znajduje się w obszarze. Takie równanie modeluje wchłanianie się pokarmu w jelicie - pokarm dobrej jakości wchłania się powoli a fast-food przelatuje bardzo szybko.

$$\begin{cases} u_t + \left(\int_0^1 F(u(y,t))dy\right) u_x = 0, & t > 0, \quad 0 < x < 1; \\ u(x,0) = \phi(x), & 0 < x < 1; \\ u(0,t) = 0, & t > 0, \end{cases}$$

dla pewnej funkcji F klasy C^1. Rozwiąż to zagadnienie najpierw dla ogólnego przypadku a później połóż $\phi(x) = x$ oraz $F(u) = u$. Sprawdź, czy otrzymana funkcja jest rzeczywiście rozwiązaniem równania.

9. (*Zagadnienie jednorodne*) Funkcję $f = f(x,t,u)$ nazywamy *jednorodną* jeśli dla dowolnej stałej λ istnieje liczba k taka, że zachodzi warunek

$$f(\lambda x, \lambda t, \lambda u) = \lambda^k f(x,t,u).$$

   (a) Podaj kilka przykładów funkcji jednorodnych.

   (b) Niech u spełnia równanie

$$u_t + c(x,t,u)u_x = f(x,t,u), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

   Załóżmy, że c i f są jednorodne z taką samą stałą k. Pokaż, że układ dwóch równań charakterystyk może być zredukowany do jednego równania rzędu pierwszego.
   Wskazówka. Napisz równanie na dU/dx i wprowadź nowe zmienne: niezależną i zależną.

10. (*Model populacji ze strukturą wieku*) Niech $u = u(a,t)$ oznacza gęstość rozkładu populacji w czasie t i wieku a. To znaczy $u(a,t)\Delta a$ określa w przybliżeniu ilość ludzi mających od a do $a + \Delta a$ lat. Dla badania ewolucji struktury demograficznej wystarczy skupić się na liczności kobiet tak, że ich całkowita liczba w chwili t wynosi (Dlaczego całkujemy do ∞?)

$$N(t) = \int_0^\infty u(a,t)da.$$

   (a) Motywując swoje rozważania prawem zachowania pokaż, że gęstość struktury populacji spełnia równanie

$$u_t + u_a = -m(a)u,$$

   gdzie $m(a)$ jest współczynnikiem śmiertelności na osobę. Jest to równanie *McKendricka-Von Foerstera*.

   (b) Niech $b = b(a,t)$ oznacza średnią liczbę dzieci, które rodzą kobiety w wieku a i czasie t. Jakie ogólne warunki musi spełniać b? Pokaż, że całkowita ilość porodów w chwili t wynosi

$$B(t) = \int_0^\infty b(a,t)u(a,t)da,$$

   a następnie uzasadnij równość $B(t) = u(0,t)$.

(c) Załóż, że $b = b(a)$ a m jest stałe. Ponadto przyjmij, że początkowy rozkład populacji wynosi $u(a, 0) = \phi(a)$. Sprowadź równanie McKendricka-Von Foerstera do równania całkowego na B zwanego *równaniem odnowienia*.

11. (*Rozwiązanie ogólne*) Pokaż, że jeśli F i G są całkami pierwszymi układu charakterystycznego dla $u_t + c(x, t, u)u_x = g(x, t, u)$ to $\Psi(F(x, t, u), G(x, t, u)) = 0$ określa rozwiązanie $u = u(x, t)$ tego równania. Jakie warunki muszą spełniać Ψ, F i G, żeby to zachodziło?

12. (*Równanie tylko z pochodnymi*) Załóżmy, że nieliniowe równanie różniczkowe pierwszego rzędu nie zawiera w sposób jawny zmiennych x, t oraz u, to znaczy ma postać $F(u_x, u_t) = 0$. Znajdź jego rozwiązanie z warunkiem początkowym $u(x, 0) = \phi(x)$.

13. Znajdź rozwiązania następujących równań nieliniowych

$$a) \begin{cases} u_t + u_x = u_t u_x, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}; \\ u(x, 0) = 2x, & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \qquad b) \begin{cases} u_t u_x = 1, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}; \\ u(x, 0) = x^2, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} u_x^2 + u_t = 0, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}; \\ u(x, 0) = x, & x \geq 0, \end{cases} \qquad d) \begin{cases} 4u_t - u_x^2 = 4x^2, & 0 < t < \frac{\pi}{2}, \quad x \in \mathbb{R}; \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

14. (*Równanie eikonału inaczej*) Okazuje się, że równanie eikonału występuje również w bardzo przyziemnych zastosowaniach - opisuje ono kształt usypanej pryzmy piasku lub innego sypkiego materiału. Zakładając, że $u = u(x, y)$ opisuje właśnie ten kształt a współczynnik tarcia[1] materiału wynosi $0 < \mu < 1$ wyprowadź równanie

$$u_x^2 + u_y^2 = \frac{1}{\mu^2} - 1.$$

15. (*Pryzma piasku*) Znajdź kształt pryzmy piasku, który został usypany tak, że jego podstawa jest okręgiem

$$u(x, y) = 0 \quad \text{dla} \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Wskazówka. Dane nie są typowym warunkiem początkowym. Jednak bez problemu można skorzystać z metody Charpita wprowadzając $X = X(s, t)$ oraz $Y = Y(s, t)$, gdzie t jest parametrem podstawy, to jest

$$X(0, t) = \cos t, \quad Y(0, t) = \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

16. (*Całki zupełne*) Znajdź całki zupełne dla następujących równań

$$a)\ u_x^2 u_t = 1; \quad b)\ u_x^2 + y u_y - u = 0; \quad c)\ u^2 = \frac{1}{1 + u_x^2 + u_y^2}; \quad d)\ u_x u_y = xy.$$

17. (*Równanie bez zmiennych niezależnych*) Pokaż, że całka zupełna dla równania $F(u, u_x, u_y) = 0$ ma postać

$$f(x, y, u, a, b) = x + ay + b - \int \frac{du}{g(u, a)},$$

gdzie funkcja $p = g(u, a)$ jest wyznaczona z równania różniczkowego.

Łukasz Płociniczak

[1] Siła tarcia jest proporcjonalna do składowej stycznej siły ciężkości.