Równania różniczkowe w technice

Lista 2: Równania zwyczajne pierwszego rzędu

1. Rozwiąż następujące zagadnienia początkowe oraz narysuj wykres rozwiązania. Dla jakich x-ów rozwiązanie jest określone?

   (a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2+4x+2}{2(y-1)}$, $y(0)=1$; (b) $\dfrac{dy}{dx} = (1-2x)y^2$, $y(0) = -\dfrac{1}{6}$;

   (c) $\sin 2x \; dx + \cos 3y \; dy = 0$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3}$; (d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x(x^2+1)}{4y^3}$, $y(0) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

2. Znajdź równanie różniczkowe, którego rozwiązaniem jest dana rodzina krzywych.

   (a) $y = C\cos x + x$; (b) $x^2 + y^2 = C^2$.

3. (*Datowanie izotopem węgla* ^{14}C) W archeologii stosuje się metodę wyznaczania wieku próbki za pomocą pomiaru zawartości izotopu węgla ^{14}C. Jest to metoda opracowana przez Willarda Libbiego w latach czterdziestych. Stosunek izotopu węgla ^{14}C do węgla ^{12}C utrzymuje się na stałym i znanym poziomie przez całe życie organizmu. Z momentem śmierci węgiel zaczyna się rozpadać z czasem półżycia równym 5568 lat (czyli okresem po jakim rozpadła się połowa próbki). Niech $Q(t)$ oznacza stosunek ilości węgla ^{14}C do węgla ^{12}C w chwili t. Załóżmy, że w chwili śmierci stosunek ten wynosił Q_0.

   (a) Wyjaśnij dlaczego rozpad promieniotwórczy może być opisany równaniem $Q' = -rQ$. Znajdź $Q = Q(t)$ oraz ustal ile wynosi r.

   (b) Przypuśćmy, że znajdujemy próbkę, która zawiera 20% początkowej zawartości węgla ^{14}C względem ^{12}C. Znajdź wiek próbki.

   (c) (*Jaskinie w Lascaux*) W tych francuskich jaskiniach znaleziono słynne malowidła naskalne wykonane węglem drzewnym. Kiedy przeprowadzono badania okazało się, że stosunek węgla ^{14}C do ^{12}C w tych malowidłach jest 8 razy mniejszy niż w przypadku organizmów żywych. Korzystając z równania rozpadu oszacuj wiek malowideł.

   (d) (*Stonehenge*) Próbka pochodząca ze Stonehenge wykazała stosunek izotopów równy w przybliżeniu $(1.65)^{-1}$ początkowej wartości. Oszacuj wiek tej konstrukcji.

4. (*Naiwny model liczności populacji ludzkiej*) Załóżmy, że ludzie rozmnażają się z szybkością proporcjonalną do ich liczności. Szacuje się, że w czasie $t = 0$ (A.D. 1650) na świecie było 600 milionów ludzi a w czasie $t = 300$ (A.D. 1950) ich liczba wzrosła do 2.8 miliardów. Znajdź wyrażenie określające liczność populacji w dowolnym czasie. Załóżmy, że Ziemia może utrzymać maksymalnie 25 miliardów ludzi. Kiedy ta granica zostanie osiągnięta?

5. (*Lepszy model demograficzny*) Zastosuj model logistyczny do opisu liczby mieszkańców Wrocławia podanej w tabelce. Dlaczego nie działa tutaj model wykładniczy?

rok	1950	1960	1970	1978	1988	2002
ludność	309	430	526	598	639	639

Tablica 1: Liczba ludności Wrocławia (w tyś). Dane pochodzą ze spisu powszechnego.

6. (*Model Gompertza*) Benjamin Gompertz zaproponował model opisujący rozwój guzów w ciele człowieka. Wyraża się on za pomocą równania

$$y' = ry \ln\left(\frac{K}{y}\right),$$

gdzie $y = y(t)$ określa rozmiar guza.

   (a) Porównaj model Gompertza z modelem Malthusa (wykładniczym) oraz Verhulsta (logistycznym).
   (b) Rozwiąż to równanie z warunkiem początkowym $y(0) = y_0$.
   (c) Zastosuj powyższy model do danych opisujących ludność Wrocławia.

7. (*Model populacji ze zmienną szybkością wzrostu*) Wyobraźmy sobie, że pewien gatunek insekta rozmnaża się z okresowo zmiennym tempem opisanym równaniem

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{5}(0.5 + \sin t)y.$$

   (a) Jeśli $y(0) = 1$, znajdź czas τ w którym liczność populacja się podwoiła. Sprawdź jak ten czas zależy od dowolnego warunku początkowego $y(0) = y_0$.
   (b) Załóżmy, że współczynnik wzrostu (w tym przypadku jest to współczynnik proporcjonalności między pochodną a funkcją) zastąpiony jest jego wartością średnią (ile ona wynosi?). Wyznacz czas podwojenia τ dla tego przypadku.
   (c) Jeśli zmienimy $\sin t$ na $\sin 2\pi t$ (czyli zwiększymy częstotliwość zmian) to jak zmieni się czas τ?
   (d) Narysuj wykresy rozwiązań $(a), (b), (c)$ na jednym rysunku i porównaj je.

8. (*Reakcje chemiczne*) Wyobraźmy sobie sytuację, w której pewna substancja C jest tworzona z połączenia się dwóch innych substancji A i B. Przez s_A oraz s_B oznaczmy początkową ilość A i B oraz zauważmy, że utworzenie się substancji C wymaga zredukowania s_A oraz s_B o pewną wielkość proporcjonalną do ilości C. Załóżmy również, że zmiana C w czasie jest proporcjonalna do pozostałej ilości substancji A oraz B. Ostatecznie, niech $y = y(t)$ oznacza ilość substancji C w czasie t.

   (a) Wyjaśnij dlaczego y spełnia następujące równanie

   $$y' = r(s_A - ny)(s_B - my),$$

   gdzie n i m są stałymi zależnymi od przyjętych jednostek. Dlaczego prawa strona powyższego równania zawsze musi być dodatnia?
   (b) Znajdź y.

9. (*Kropla*) Kulista kropla wody paruje z prędkością proporcjonalną do jej powierzchni. Jeśli jej promień początkowy wynosi 3mm, a po pół godziny zmniejszył się do 2mm, wyznacz jej promień w dowolnym czasie.
Uwaga: możesz zaproponować tutaj wiele modeli, z których nie wszystkie muszą być poprawne. Ostateczna weryfikacja teorii zawsze pochodzi z eksperymentu.

10. (*Gorące kakao*) Temperatura kubka z gorącym kakao zmniejsza się zgodnie z prawem Newtona. Załóżmy, że zalewamy kakao mlekiem w temperaturze 93°C, a po minucie chłodzi się ono do 88°C. Kiedy kakao będzie odpowiednie do picia (ok. 65°C)?

11. (*Kubki termiczne*) Kubków termicznych używamy po to, żeby zminimalizować straty ciepła naszej herbaty.

   (a) W naszym prostym modelu załóżmy, że kubek doskonale chroni przed czynnikami zewnętrznymi. Herbata oddaje ciepło i przekazuje je kubkowi zgodnie z prawem Newtona. Napisz równania na zmianę temperatury herbaty H' oraz kubka K'.

   (b) Rozwiąż te równania i opisz rozwiązania.

   (c) Rzeczywiste kubki nie są doskonale szczelne termicznie - oddają ciepło na zewnątrz. Popraw swoje równania tak, aby model brał pod uwagę wymianę ciepła z otoczeniem o temperaturze A.

12. (*Smakosz*) Załóżmy, że pewien dociekliwy smakosz zamówił w restauracji odpowiednio wysmażony stek. Kelner przyniósł mu danie, ale po zasmakowaniu gość pozostał nieufny co do odpowiedniej temperatury smażenia mięsa. Pomóż smakoszowi dowiedzieć się, czy temperatura podczas smażenia nie była zbyt wysoka lub za niska.

   (a) Na podstawie prawa Newtona napisz równanie opisujące stygnięcie steka oraz rozwiąż je dla zadanej temperatury początkowej T_0 (czyli temperatury smażenia). Załóż, że temperatura otoczenia oraz stała charakteryzująca stygnięcie mięsa są znane oraz niezmienne w czasie.

   (b) Od czasu zdjęcia mięsa z patelni do dostarczenia dania smakoszowi minął czas τ. Gość zmierzył wtedy temperaturę steka i wynosiła ona θ (każdy smakosz zawsze ma przy sobie termometr spożywczy). Na podstawie tego pomiaru znajdź temperaturę smażenia.

   (c) Ale chwileczkę! Każdy pomiar obarczony jest niepewnością (zwłaszcza ten dokonywany na poczekaniu w restauracji). Załóż, że rzeczywista wartość temperatury steka różni się od zmierzonej θ o nie więcej niż niepewność pomiarowa ϵ. Określ przedział, w którym w tej sytuacji musi się znajdować temperatura smażenia T_0.

   (d) Powiedz co działoby się, gdyby smakosz czekał długo na swój posiłek (docelowo $\tau \to \infty$). Czy istnieje wtedy szansa na znalezienie temperatury smażenia?

13. (*Prosty model zanieczyszczonego jeziora*) Rozważmy jezioro o objętości $V = V(t)$ zawierające objętość $Q(t)$ zanieczyszczeń w chwili t. Oznaczmy przez $c(t) := Q(t)/V(t)$ stężenie zanieczyszczenia w jeziorze. Załóżmy, że z prędkością r do jeziora wpływa woda zawierająca zanieczyszczenia o stężeniu k. W takim samym tempie woda jest usuwana z jeziora. Dodatkowo, pobliska fabryka zanieczyszcza jezioro w stałym tempie P.

   (a) Niech $c(0) = c_0$ oraz $V(0) = V_0$. Ile wynosi $V(t)$? Rozwiąż napisane równanie i znajdź postać $c(t)$ oraz zanieczyszczenie graniczne, gdy $t \to \infty$.

   (b) Załóżmy, że nagle zanieczyszczanie jeziora ustaje ($k = 0$ oraz $P = 0$ dla $t > 0$). Wyznacz czas T, po którym zanieczyszczenie zmaleje do połowy oraz do jednej dziesiątej.

   (c) Korzystając z tabelki zawierającej dane dotyczące Wielkich Jezior w USA oraz z części (b) zadania, znajdź czas T potrzebny na zmniejszenie zanieczyszczenia do 10%.

14. (*Model logistyczny ze zmienną pojemnością środowiska*) Jeśli pojemność środowiska zmienia się w czasie, czyli $K = K(t)$, to równanie logistyczne przyjmuje postać

$$y' = ry\left(1 - \frac{y}{K(t)}\right).$$

Jezioro	V ($km^3 \times 10^3$)	r (km^3/rok)
Górne	12.2	65.2
Michigan	4.9	158
Erie	0.46	175
Ontario	1.6	209

Tablica 2: Objętość oraz przepływy dla Wielkich Jezior. Dane wzięte z [1].

(a) Rozwiąż powyższe równanie.
Wskazówka. Jest to szczególny przypadek *równania Bernoulliego*, które można sprowadzić do równania liniowego poprzez podstawienie $u(t) = (y(t))^{-1}$.

(b) W ogólności równanie Bernoulliego ma postać

$$y' + p(t)y = q(t)y^n, \quad n \neq 0, 1.$$

Znajdź odpowiednie podstawienie i zastosuj je, aby otrzymać rozwiązanie.

15. (*Połów ryb*) Rozpatrzmy populację ryb. Załóżmy, że rozmnażają się one zgodnie z modelem logistycznym. Dodatkowo ryby są łowione, a szybkość łowienia jest proporcjonalna do ilości ryb: im więcej ich jest tym łatwiej jest złowić. Wyjaśnij, że jeśli liczność populacji w czasie t wynosi $y(t)$, to prawdziwe jest równanie

$$\frac{dy}{dt} = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y - Ey.$$

Jest to tak zwany model Schaefera.

(a) Znajdź liczność populacji w czasie t wiedząc, że na początku w akwenie żyło y_0 ryb.

(b) Pokaż, że dla $E < r$ istnieją dwa rozwiązania (punkty) stacjonarne: $y_1 = 0$ iraz $y_2 = K(1 - E/r) > 0$.

(c) Wyjaśnij, dlaczego y_1 jest niestabilny a y_2 asymptotycznie stabilny. (Niestabilność - małe wychylenie z punktu powoduje, że rozwiązanie nigdy już nie wraca na swoje miejsce).

16. (*Epidemia*) Niektóre choroby, takie jak na przykład dur brzuszny mogą, rozprzestrzeniać się przez nosicieli, czyli osoby, które pomimo zainfekowania nie odczuwają negatywnych skutków choroby. Oznaczmy przez x liczbę zdrowych ludzi podatnych na chorobę oraz przez y liczbę nosicieli. Załóżmy, że nosiciele są identyfikowani i usuwani z populacji zgodnie z prawem

$$\frac{dy}{dt} = -\beta y.$$

Załóżmy również, że choroba rozprzestrzenia się proporcjonalnie do ilości nosicieli oraz ludzi podatnych na chorobę

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha xy.$$

(a) Znajdź y z pierwszego równania jako funkcję t przy warunku początkowym $y(0) = y_0$.

(b) Następnie znajdź $x = x(t)$ z warunkiem $x(0) = x_0$.

(c) Znajdź ułamek populacji, której uda się pozostać zdrową dla długiego czasu trwania epidemii.

[1] R.H.Rainey, Natural Displacement of Pollution from the Great Lakes, Science 155 (1967), 1242–1243.

17. (*Równania jednorodne*) Równanie różniczkowe nazywamy jednorodnym, jeśli jest postaci

$$y' = f\left(\frac{x}{y}\right).$$

Zastosuj podstawienie $y(x) = xu(x)$ i sprowadź dane równanie do równania o zmiennych rozdzielonych. Sprawdź swoją metodę rozwiązując

(a) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$; (b) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - xy - y^2}{xy}$;
(c) $\frac{dy}{dx} = -e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$; (d) $(xy + y^2)\frac{dy}{dx} = y^2$.

18. (*Jazda na rowerze 1*) Załóżmy, że typowa wartość (kwadratowego) współczynnika oporu powietrza dla rowerzysty wynosi $c = 0.2$ N·s/m^2. Całkowita masa rowerzysty wraz z rowerem wynosi 80kg. W chwili $t = 0$ rowerzysta ma prędkość $v_0 = 20$m/s, przestaje pedałować i jedzie aż do całkowitego zatrzymania. Znajdź charakterystyczny czas $\tau = m/(cv_0)$. Po jakim czasie jego prędkość zmniejszy się do 15m/s, 10m/s, 5m/s? (Uwaga: milczące założenie o pomijalności tarcia jest sensowne dla rozważanych prędkości).

19. (*Jazda na rowerze 2*) W tym zadaniu uwzględnimy tarcie przy opisie ruchu rowerzysty. Szacuje się, że siła tarcia dynamicznego F_t wynosi 3N. Napisz równanie rowerzysty, który jedzie bez pedałowania. Następnie rozwiąż je i policz ile czasu upłynie, zanim prędkość zmniejszy się z 20m/s do 10m/s. Po jakim czasie rowerzysta całkowicie się zatrzyma?

20. (*Ogólniejsza postać siły oporu ośrodka*) Ciało porusza się w poziomie i działa na nie siła oporu ośrodka $F_{op} = -bv - cv^2$. Napisz równanie Newtona dla rozważanej sytuacji i je rozwiąż. Narysuj wykres zależności v od czasu t.

21. (*Swobodny spadek*) Przy rozpatrywaniu zagadnień związanych z rzutami, bardzo często zakładamy, że przyspieszenie ziemskie jest stałe. Jest to oczywiście bardzo dobre założenie przy założeniu niezbyt dużej wysokości rzutu (Czy potrafisz podać dokładniejsze oszacowania?). W sytuacjach, w których ruch obiektu odbywa się w znacznej odległości od Ziemi, konieczne jest wzięcie pod uwagę zmieniającej się siły grawitacji.

    (a) Niech $r = r(t)$ oznacza odległość ciała od środka Ziemi, a $v = v(t)$ jego prędkość. Wyjaśnij, dlaczego z prawa Newtona wynika następujące równanie różniczkowe

    $$\frac{dv}{dt} = -\frac{GM}{r^2},$$

    gdzie G jest stałą grawitacji, a M masą Ziemi. Zakładamy również, że opór powietrza jest znikomy (to założenie jest na pewno prawdziwe w przestrzeni kosmicznej).

    (b) Znajdź zależność prędkości ciała od przebytej drogi, to jest napisz $v = v(r)$ i skorzystaj z reguły łańcuchowej, aby otrzymać pochodną $\frac{dv}{dt}$ w terminach v oraz $\frac{dv}{dr}$. Przyjmij, że $v(0) = v_0$ oraz, że Ciało leci centralnie w dół.

Łukasz Płociniczak