Zastosowania równań różniczkowych cząstkowych
Lista 3: Fale uderzeniowe

1. (*Fale uderzeniowe*) Rozwiąż podane zagadnienia, narysuj charakterystyki oraz trajektorię fali uderzeniowej.

$$a)\begin{cases} u_t + u^2 u_x = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}; \\ u(x,0) = \begin{cases} 2, & x < 0; \\ 1, & 0 > 0, \end{cases} \end{cases} \qquad b)\begin{cases} u_t + 2uu_x = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}; \\ u(x,0) = \begin{cases} 3, & x < 0; \\ 2, & x > 0, \end{cases} \end{cases}$$

2. (*Dopasowywanie fali*) Przeprowadź analizę podanych zagadnień oraz postaraj się naszkicować rozwiązanie $u = u(x,t)$ dla kilku czasów.

$$a)\begin{cases} u_t + uu_x = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}; \\ u(x,0) = \begin{cases} 1, & x < 0; \\ -1, & 0 < x < 1; \\ 0, & x > 1, \end{cases} \end{cases} \qquad b)\begin{cases} u_t + uu_x = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}; \\ u(x,0) = \begin{cases} 1, & x < 0; \\ 1-x, & 0 < x < 1; \\ 0, & x < 1. \end{cases} \end{cases}$$

3. (*Farba*) Warstwa farby o grubości $u(x,t)$ spływa po ścianie. Jak zostało pokazane na wykładzie, równanie ewolucyjne ma postać

$$u_t + u^2 u_x = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Rozwiąż je dla warunku początkowego

$$u(x,0) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ or } x > 1; \\ 1, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

4. (*Ruch uliczny*) Niech $u = u(x,t)$ będzie gęstością liniową samochodów na drodze (ilość samochodów/kilometr). Przez $q(x,t)$ oznaczmy strumień, czyli ilość samochodów na jednostkę czasu, które przejeżdżają przez x w prawą stronę w czasie t.

   (a) Pokaż, że przy braku źródeł spełnione musi być równanie zachowania

   $$u_t + q_x = 0.$$

   (b) Poprzez $v = q/u$ zdefiniujmy średnią prędkość samochodów (dokładnie tak jak w przypadku konwekcji). Prostym i dosyć dokładnym modelem jest przyjęcie, że prędkość zeruje się gdy ilość pojazdów osiągnie pewną krytyczną wartość (korek).

   $$v(u) = v_m \left(1 - \frac{u}{u_c}\right).$$

   Znajdź strumień i wyprowadź równanie ewolucji ruchu ulicznego.

   (c) (*Światło zielone*) Rozwiąż zagadnienie ruchu ulicznego w przypadku, kiedy nagle w czasie $t = 0$ światło czerwone zmienia się na zielone w $x = 0$

   $$u(x,0) = \begin{cases} u_c, & x < 0; \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

   (d) (*Światło czerwone*) Teraz, sygnallizacja w $x = 0$ przełącza się na światło czerwone i wszystkie samochody muszą się zatrzymać

   $$u(x,0) = u_0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad u(0,t) = u_c, \quad t > 0.$$

(e) (*Ciężarówka*) W czasie $t = 0$ samochody poruszają się wzdłuż drogi ze stałą prędkością równą $\frac{2}{3}v_m$. W tej samej chwili ciężarówka wkracza na drogę w $x = 0$ i jedzie z prędkością $\frac{1}{3}v_m$. Kiedy dojedzie do $x = L$ zjeżdża z autostrady.

5. (*Przedłużanie nieciągłości*) Nieciągłe warunki początkowe mogą być rozumiane jako granica gładkich przybliżeń. W tym zadaniu rozważmy jedynie ich ciągłe przybliżenia. Rozwiąż

$$u_t + uu_x = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

dla każdego z dwóch warunków początkowych

$$a)\ u(x,0) = \phi_1(x) := \begin{cases} 1, & x \le 0; \\ 1 - \frac{x}{\epsilon}, & 0 < x < \epsilon; \\ 0, & x \ge \epsilon, \end{cases} \quad b)\ u(x,0) = \phi_2(x) := \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \frac{x}{\epsilon}, & 0 < x < \epsilon; \\ 1, & x \ge \epsilon. \end{cases}$$

W każdym przypadku rozważ granicę $\epsilon \to 0$ oraz porównaj z analogicznymi zagadnieniami dla nieciągłych warunków początkowych.

6. (*Czas utworzenia się fali uderzeniowej*) Znajdź czas, w którym powstanie fala uderzeniowa dla następujących zagadnień. Ponadto, znajdź rozwiązanie każdego z zagadnień w tak prostej postaci jak tylko się da.

$$a) \begin{cases} u_t + uu_x = 0, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}; \\ u(x,0) = e^{-x^2} \end{cases} \quad b) \begin{cases} u_t + uu_x = 0, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}; \\ u(x,0) = \frac{1}{\cosh x^2}. \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} u_t + uu_x = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}; \\ u(x,0) = \begin{cases} 2 - x^2, & x < 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases} \end{cases} \quad d) \begin{cases} u_t + uu_x = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}; \\ u(x,0) = \begin{cases} 1, & x \le 0; \\ \cos x, & 0 < x \le \frac{\pi}{2}; \\ 0, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases} \end{cases}$$

7. (*Połączenie dwóch fal*) Rozwiąż podany problem, w którym dwie fale uderzeniowe łączą się w jedną

$$u_t + uu_x = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R};$$
$$u(x,0) = \begin{cases} 2, & x < 0; \\ 1, & 0 < x < 1; \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

8. (*Rozwiązania słabe oraz klasyczne*) Pokaż, że gładkie rozwiązanie słabe danego zagadnienia jest rozwiązaniem klasycznym.

9. Znajdź słabe rozwiązania następujących zagadnień

$$a) \begin{cases} u_t + (e^u)_x = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}; \\ u(x,0) = \begin{cases} 2, & x < 0; \\ 1, & x > 1, \end{cases} \end{cases} \quad b) \begin{cases} u_t + 2uu_x = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}; \\ u(x,0) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x < 0; \\ 0, & x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

10. (*Niejednoznaczność*) Niech u będzie rozwiązaniem

$$u_t + uu_x = 0.$$

Pokaż, że zachodzi wtedy

$$(f(u))_t + (g(u))_x = 0,$$

dla odpowiednio dobranych F i G. Znajdź warunki jakie muszą spełniać te funkcje.

11. (*Ogólny warunek R-H*) Niech u jest rozwiązaniem

$$(f(u))_t + (g(u))_x = 0,$$

zawierającym falę uderzeniową. Wyprowadź warunek Rankine'a-Hugoniota dla tak postawionego problemu.

12. (*Warunek entropii*) Rozważmy nasz zabawkowy problem

$$\begin{aligned} &u_t + uu_x = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}; \\ &u(x,0) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Niech v i w będą zdefiniowane poprzez

$$v(x,t) = \begin{cases} 0, & x < \frac{t}{2}; \\ 1, & x > \frac{t}{2}, \end{cases} \qquad w(x,t) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{x}{t}, & 0 < x < t; \\ 1, & x > t. \end{cases}$$

Naszkicuj te funkcje i sprawdź czy są rozwiązaniami danego zagadnienia początkowego. Co się stanie jeśli założysz warunek entropii?

13. (*Ośrodek porowaty*) Ośrodek porowaty jest to kolekcja bardzo skomplikowanej konfiguracji kapilar, kanalików oraz porów. Jednym z najważniejszych przykładów takiego ośrodka jest gleba. Rozpatrzmy jej warstwę nienasyconą czyli obszar, w którym nie wszystkie pory są wypełnione wodą (w rzeczywistości jest to warstwa do około 1m pod powierzchnią gruntu). Przez $u = u(x,t)$ oznaczmy stopień nasycenia gleby czyli *wilgotność objętościową* na głębokości x i w czasie t ($u = 1$ oznacza pełne nasycenie porów).

   (a) Krótko uzasadnij dlaczego spełnione jest prawo zachowania wody

   $$u_t + q(u)_x = 0.$$

   (b) W bardzo dużej ogólności dla przepływów zdominowanych przez grawitację[1] możemy założyć, że strumień ma postać potęgową, to jest $q(u) = ku^n$ dla pewnych stałych k (przewodności hydraulicznej) oraz n. Wyznacz równanie różniczkowe opisujące przepływ wody w strefie nienasyconej.

   (c) Połóżmy $k = 1$ (odpowiedni dobór jednostek) oraz $n = 2$ (typowa gleba). Rozwiąż zagadnienie z następującymi warunkami

   $$u(x,0) = \frac{1}{2}, \quad u(0,t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1; \\ \frac{1}{2}, & t > 1. \end{cases}$$

Łukasz Płociniczak

[1] Kiedy ciśnienie kapilarne jest dostatecznie silne występują również efekty dyfuzyjne.