Równania różniczkowe w technice

Lista 5: Układy równań różniczkowych

1. Zamień poniższe równanie trzeciego rzędu na układ trzech równań oraz przetransformuj podany układ na równanie różniczkowe. Podaj rozwiązania tych zagadnień.

$$\text{a) } u''' - u = 0; \qquad \text{b) } \begin{cases} x_1' = 3x_1 - 2x_2, & x_1(0) = 3, \\ x_2' = 2x_1 - 2x_2, & x_2(0) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

2. (*Obwód elektryczny*) Rezystor, kondensator oraz cewka indukcyjna połączone są szeregowo do siły elektromotorycznej E. Korzystając z praw Kirchhoffa napisz układ równań różniczkowych opisujących spadek napięcia na kondensatorze oraz natężenie prądu.

3. (*Portrety fazowe*) Rozważmy układ równań

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by, \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy, \end{cases}$$

gdzie możemy założyć (dlaczego?), że $D := ad - bc \neq 0$. Dodatkowo, niech $ax + by \neq 0$ w pewnym otoczeniu początku układu płaszczyzny fazowej $x - y$. Pokaż, że każda trajektoria $(x(t), y(t))$ na płaszczyźnie fazowej spełnia

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by}.$$

Znajdź kształt trajektorii dla następujących przypadków.

(a) Na rozgrzewkę znajdź rodzinę rozwiązań dla $b = c = 0$ oraz $a = d$.

(b) Dla $d = -a$ pokaż, że trajektorie spełniają

$$cx^2 - 2axy + by^2 = C,$$

dla pewnej stałej C. Pokaż, że powyższe równanie opisuje rodzinę elips lub hiperbol w zależności od znaku D.

4. Rozwiąż następujące układy równań różniczkowych o stałych współczynnikach. Ponadto opisz zachowanie się rozwiązań dla $t \to \pm\infty$ oraz narysuj portrety fazowe.

$$\text{a) } \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}; \quad \text{b) } \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\mathbf{x}; \quad \text{c) } \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{x}; \quad \text{d) } \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x};$$

$$\text{e) } \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}; \quad \text{f) } \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ \frac{9}{2} & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}; \quad \text{g) } \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}; \quad \text{h) } \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}\mathbf{x};$$

5. (*Równanie o st. wsp. po raz kolejny*) Równanie

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

sprowadź do układu dwóch równań liniowych pierwszego rzędu. Znajdź wyrażenie określające wartości własne tak powstałej macierzy i wskaż jego związek z wielomianem charakterystycznym powyższego równania.

6. (*Bifurkacje*) Rozważ układ

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -\alpha & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Podaj jego rozwiązanie w zależności od parametru α a następnie znajdź krytyczną wartość α, dla której jeden rodzaj zachowania się rozwiązań zmienia się w inny (następuje zmiana stabilności). Zjawisko to nazywane jest *bifurkacją*.

7. Bez rozwiązywania układu sklasyfikuj jakiego typu jest jego portret fazowy.

$$\text{a) } \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}; \quad \text{b) } \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -15 & -5 \end{pmatrix} \mathbf{x}; \quad \text{c) } \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

8. (*Romeo i Julia*) Zastanówmy się nad alternatywnymi historiami Romea i Julii. Niech $R(t)$ oznaczają uczucia (mierzone w jakiejkolwiek jednostce jaką tylko zdołasz wymyślić) Romea względem Julii a $J(t)$ Julii względem Romea. Dodatnie wartości reprezentują miłość a ujemne niechęć. Możemy rozważyć układ równań

$$\begin{cases} R' = aR + bJ, \\ J' = cR + dJ, \end{cases}$$

który opisuje zmianę poziomu uczuć w zależności od poziomu w chwili bieżącej oraz uczuć drugiej osoby. Tutaj a, b, c i d mogą być dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

   (a) Rozważmy prosty przypadek, jeśli $a = d = 0$ oraz $b > 0$ i $c < 0$. Jak zinterpretujesz taką sytuację?
   (b) A co, jeśli $a = 0$, $b > 0$, $c < 0$ i $d > 0$?
   (c) Czy przeciwieństwa się przyciągają? Opisz przypadek $a, b > 0$, $c = -b$ oraz $d = -a$.
   (d) Jak wygląda przypadek Romea, który jest stały w uczuciach: $a = b = 0$?

9. (*Oscylator tłumiony raz jeszcze*) Rozważ równanie opisujące ruch oscylatora tłumionego

$$x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = 0,$$

gdzie $\beta, \omega_0 > 0$. Zapisz to równanie w postaci układu równań. Sklasyfikuj typ portretu fazowego w zależności od różnych wartości β i ω_0. Jak te wyniki mają się do rzeczywistego sposobu oscylacji (słabo-, mocno-, krytycznie tłumione)?

10. (*Metoda nieznanych współczynników*) W celu rozwiązania liniowego układu niejednorodnego możemy postąpić dokładnie tak samo, jak dla pojedynczych równań drugiego rzędu. Niech dany będzie układ

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{f},$$

gdzie A jest macierzą a $\mathbf{f}$ znanym wektorem. Z łatwością można pokazać, że rozwiązanie powyższego zagadnienia można zapisać jako

$$\mathbf{x}(t) = C_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + C_2\mathbf{x}^{(2)}(t) + \boldsymbol{\phi}(t),$$

gdzie $\mathbf{x}^{(i)}$ są rozwiązaniami fundamentalnymi a $\boldsymbol{\phi}$ jest pewnym rozwiązaniem szczególnym. W celu znalezienie $\boldsymbol{\phi}$ możemy skorzystać na przykład z metody nieznanych współczynników. Postaraj się uogólnić swoją wiedzę z równań drugiego rzędu w celu rozwiązania następujących układów.

a) $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} t$; b) $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -15 & -5 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} \cos t \\ t \end{pmatrix}$.

11. (*Metoda diagonalizacji*) Gdy mamy do czynienia z układem równań liniowych o stałych współczynnikach, możemy zastosować diagonalizację. Niech dany będzie układ

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{f},$$

gdzie A jest stałą macierzą $n \times n$, dla której istnieje n liniowo niezależnych wektorów własnych. Wtedy możemy zapisać $A = PDP^{-1}$, gdzie $D = \mathrm{diag}(r_1, ...r_n)$ jest macierzą diagonalną zawierającą wartości własne A, a P macierzą przejścia.

(a) Udowodnij, że powyższy układ jest równoważny następującemu

$$\mathbf{y}' = D\mathbf{y} + \mathbf{g},$$

dla pewnego wektora $\mathbf{g}(t) = (g_j(t))_j$. Jak $\mathbf{y}$ zależy od $\mathbf{x}$?

(b) Korzystając z tego, że $\mathbf{y}(t) = (y_j(t))_j$ spełnia układ *rozdzielonych* równań, pokaż, że

$$y_j(t) = e^{r_j t}\int_{t_0}^{t} e^{-r_j s} g_j(s) ds + C_j e^{r_j t},$$

gdzie C_j są stałymi całkowania.

Sprawdź tę metodę na układach równań z Zad. 10.

12. (*Metoda uzmienniania stałych*) Uogólnij metodę uzmienniania stałych do przypadku układów równań. W tym celu załóż, że rozwiązanie ogólne układu niejednorodnego z Zad. 10 może być zapisane jako

$$\mathbf{x}(t) = \xi(t)\mathbf{c}(t),$$

gdzie $\xi = (\mathbf{x}^{(i)})_i$ jest wektorem rozwiązań fundamentalnych. Nieznany wektor $\mathbf{c}(t)$ należy wyznaczyć tak, żeby powyższy ansatz spełniał układ równań. Sprawdź tę metodę na przykładach z Zad. 10 oraz porównaj wynik z tym otrzymanym metodą diagonalizacji.

13. (*Transformata Laplace'a dla układów*) Skorzystaj z metody Transformaty Laplace'a i rozwiąż następujące układy równań.

$$\text{a)} \begin{cases} x'' - 4x + y' &= 0, \\ y'' + 2y - 4x' &= 0; \end{cases} \quad x(0) = 0,\ x'(0) = -1,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 2,$$

$$\text{b)} \begin{cases} x' + 4x + y = 1, \\ x' - 2x + y = t^2; \end{cases} \quad x(0) = 2,\ y(0) = -1.$$

14. (*Śledzenie toksyn w krwi*) W tym zadaniu opiszemy obieg toksyny w organizmie ludzkim. Skupimy się na ołowiu, który dostaje się do naszego układu ze środowiska zewnętrznego. Jest wdychany razem z powietrzem oraz wchłaniany w pokarmie oraz wodzie. Ołów osadza się we krwi, tkankach oraz kościach. Na szczęście organizm potrafi wydalić część ołowiu za pomocą nerek oraz, po części, przez włosy, paznokcie oraz pot.

(a) Niech $B = B(t)$, $K = K(t)$ oraz $T = T(t)$ oznaczają stężenie ołowiu odpowiednio w krwi, kościach oraz tkankach. Dobrym modelem dynamiki toksyny w organizmie jest następujący układ równań

$$\begin{cases} B' = & -(k_{01} + k_{21} + k_{31})B + k_{12}T + k_{13}K + I \\ T' = & k_{21}B - (k_{02} + k_{12})T \\ K' = & k_{31}B - k_{13}K \end{cases}$$

gdzie I oraz $k_{ij} > 0$ są stałymi. Na podstawie powyższych równań rozrysuj diagram transportu ołowiu oraz wyjaśnij rolę każdej stałej k_{ij}.

(b) Rozwiąż powyższy układ.

(c) Skorzystaj z komputera i narysuj przebiegi $B(T)$, $K(t)$ oraz $T(t)$ dla rzeczywistych danych wziętych z pracy Rabinowitza, Wetherilla oraz Kopple'a[1] (wszystkie stałe maja jednostkę dzień$^{-1}$)

$$I = 49.3,\ k_{01} = 0.0211,\ k_{21} = 0.0111,\ k_{31} = 0.0039,$$
$$k_{02} = 0.0162,\ k_{12} = 0.0124,\ k_{13} = 0.000035.$$

Omów otrzymane wyniki.

15. (*Równanie Duffinga*) Znajdź równanie opisujące trajektorie równania, które jest pierwszym przybliżeniem dla nieliniowego oscylatora

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \theta - \alpha\theta^3 = 0, \quad \alpha > 0.$$

Wsk. Podstaw $x = \theta$ i $y = d\theta/dt$.

16. (*Układy prawie liniowe*) Dla każdego z podanych układów równań znajdź wszystkie rzeczywiste punkty stacjonarne. Następnie napisz zlinearyzowany układ równań odpowiadający każdemu punktowi krytycznemu. Znajdź jego wartości własne i tym samym sklasyfikuj typ danego punktu. Następnie narysuj portrety fazowe dla układu nieliniowego oraz liniowego oraz porównaj wyniki. Czy zawsze układ liniowy dokładnie opisuje zachowanie się trajektorii w pobliżu punktu stacjonarnego?

a) $\begin{cases} x' &= (2+x)(y-x), \\ y' &= (4-x)(y+x); \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' &= x - y^2, \\ y' &= y - x^2; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x' &= (1+x)\sin y, \\ y' &= 1 - x - \cos y; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x' &= 1 - xy, \\ y' &= x - y^3; \end{cases}$ e) $\begin{cases} x' &= y + x(1 - x^2 - y^2), \\ y' &= -x + y(1 - x^2 - y^2); \end{cases}$ f) $\begin{cases} x' &= 1 - y, \\ y' &= x^2 - y^2. \end{cases}$

g) $\begin{cases} x' &= 1 + 2y, \\ y' &= 1 - 3x^2; \end{cases}$ h) $\begin{cases} x' &= x - x^2 - xy, \\ y' &= \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}y^2 - \frac{3}{4}xy; \end{cases}$ i) $\begin{cases} x' &= y, \\ y' &= (1 - x^2)y - x; \end{cases}$

j) $\begin{cases} x' &= (2+x)(y-x), \\ y' &= y(2 + x - x^2); \end{cases}$ k) $\begin{cases} x' &= (2+x)(y-x), \\ y' &= (4-x)(y+x); \end{cases}$ l) $\begin{cases} x' &= -(x-y)(1-x-y), \\ y' &= x(2+y). \end{cases}$

[1] Rabinowitz, Michael B., George W. Wetherill oraz Joel D. Kopple, Lead metabolism in the normal human: stable isotope studies, Science **182**(4113) (1973), pp. 725–727.

17. (*Współzawodnictwo*) Rozważ następujące modele współzawodnictwa dwóch populacji

$$\text{a)} \begin{cases} x' &= x(1.5 - x - 0.5y), \\ y' &= y(2 - y - 0.75x); \end{cases} \quad \text{b)} \begin{cases} x' &= x(1.5 - 0.5x - y), \\ y' &= y(2 - y - 1.125x); \end{cases} \quad \text{c)} \begin{cases} x' &= x(1 - x - y), \\ y' &= y(1.5 - y - x). \end{cases}$$

Omów dynamikę układów wokół punktów krytycznych, narysuj portrety fazowe oraz zinterpretuj wyniki w terminach liczności populacji.

18. (*Drapieżnik-ofiara*) Rozpatrzmy wreszcie równanie Lotki-Volterry opisujące dynamikę dwóch populacji, z której jedna żeruje na drugiej (np. lis vs. królik, wilk vs. łoś, szczupak vs. płoć)

$$\begin{cases} x' &= x(a - by); \\ y' &= y(-c + dx), \end{cases}$$

gdzie oczywiście $a, b, c, d > 0$.

(a) Znajdź punkty krytyczne.

(b) Zlinearyzuj układ w otoczeniu punktów krytycznych i zbadaj ich typ.

(c) Napisz i rozwiąż równanie różniczkowe na dv/du wyznaczające trajektorie w pobliżu tego punktu krytycznego, który jest stabilny. Jakie krzywe ono opisuje?

(d) Z jakim w przybliżeniu okresem oscylują liczności populacji?

(e) Narysuj portret fazowy dla $a = 1$, $b = 0.5$, $c = 0.75$, $d = 0.25$ i zinterpretuj go.

19. (*Modele epidemiologiczne (SIS)*) Jednym z prostszych modeli opisujących dynamikę rozwoju epidemii jest model SIS. Zakłada on, że populacja dzieli się na dwie części: S - podatnych na chorobę (*susceptible*) oraz I - zainfekowanych (*infectious*). Osoby podatne mogą zachorować i tym samym przejść z klasy S do klasy I. Po wyzdrowieniu, wracają z powrotem do S. Jest to dobry model przeziębienia lub grypy. Niech N oznacza całkowitą liczność populacji w chwili t, to jest $N(t) = S(t) + I(t)$.

(a) Zinterpretuj każdy człon w układzie SIS

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} &= aI - bSI \\ \dfrac{dI}{dt} &= bSI - aI, \end{cases}$$

oraz dodając równania stronami pokaż, że $N = \text{const}$. Tutaj $a, b > 0$.

(b) Zapisz S w terminach I oraz N i sprowadź układ równań do pojedynczego równania na liczbę zainfekowanych. Rozwiąż to równanie oraz zinterpretuj jego rozwiązanie w terminach epidemiologicznych.

Łukasz Płociniczak