ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXXVII (2001)

Władimir I. Arnold (Moskwa)

O nauczaniu matematyki (*)

(On teaching mathematics)

Matematyka jest częścią fizyki. Fizyka jest nauką doświadczalną, jedną z nauk o przyrodzie, a matematyka jest tą częścią fizyki, w której doświadczenia są bardzo tanie.

Tożsamość Jacobiego (wymuszająca przecinanie się wysokości trójkąta w jednym punkcie) jest faktem doświadczalnym w takim samym sensie jak fakt, że Ziemia jest okrągła (to znaczy homeomorficzna z kulą), a można się o tym przekonać mniejszym kosztem.

W połowie XX w. usiłowano oddzielić matematykę od fizyki. Rezultaty okazały się katastrofalne. Dorastały całe pokolenia matematyków nie znające połowy swojej dziedziny wiedzy i oczywiście nie mające pojęcia o żadnych innych naukach. Z kolei one zaczęły uczyć swojej szkaradnej, scholastycznej pseudomatematyki studentów, a następnie dzieci w szkołach (zapominając o ostrzeżeniu Hardy'ego, że na szkaradną matematykę nie ma miejsca pod słońcem). Ponieważ scholastyczna, odcięta od fizyki matematyka nie nadaje się ani do nauczania, ani do zastosowania w jakiejkolwiek innej nauce, zrodziła się powszechna niechęć do matematyków i to zarówno ze strony nieszczęsnych uczniów (niektórzy z nich zostali tymczasem ministrami), jak i tych, którzy musieli matematykę stosować.

Szkaradny gmach, skonstruowany przez niedouczonych matematyków, umęczonych swoimi kompleksami niższości i niezdolnych do poznania fizyki, przypomina poprawnie zbudowaną aksjomatyczną teorię liczb nieparzystych. Oczywiście można stworzyć taką teorię i zmusić uczniów do podziwiania doskonałości i wewnętrznej spójności powstałej struktury (w której będą zdefiniowane, na przykład, suma nieparzystej liczby składników i iloczyn dowolnej liczby czynników). Z sekciarskiego punktu widzenia istnienie

(*) Artykuł, opublikowany w czasopiśmie *Uspiechi Mat. Nauk* 53.1 (319) (1998), 229–234, został przetłumaczony za zgodą Autora i Wydawcy i opublikowany w czasopismie *Postępy fizyki* 51 (2000), str. 140–145. Przedrukowujemy go, z niewielkimi poprawkami, za zgodą Redakcji *Postępów.* Artykuł stanowi rozszerzoną wersję wystąpienia Autora podczas dyskusji nt. nauczania matematyki, jaka odbyła się w Palais de Découverte w Paryżu dnia 7 marca 1997 r. (Przyp. Red.)

liczb parzystych można wówczas zadeklarować albo jako herezję, albo stopniowo wprowadzić je do teorii uzupełnionej o kilka „idealnych" obiektów (w celu spełnienia wymagań fizyki i świata rzeczywistego).

Niestety, podobnie brzydka i wypaczona konstrukcja matematyki dominowała w nauczaniu matematyki przez dziesiątki lat. Powstała ona we Francji i szybko przeniknęła do nauczania podstaw matematyki najpierw na uniwersytetach, a potem w całym szkolnictwie (najpierw we Francji, a następnie w innych krajach, w tym i w Rosji).

Na pytanie: „Ile jest $2 + 3$?" uczeń francuskiej szkoły podstawowej odpowiadał: „$3 + 2$, ponieważ dodawanie jest przemienne". Nie wiedział, ile wynosi suma tych liczb, co więcej, nie rozumiał nawet, o co jest pytany!

Inny francuski uczeń (w moim przekonaniu całkiem rozsądny) tak podsumował matematykę: „Oto jest kwadrat, ale to trzeba jeszcze udowodnić". Sądząc po moim doświadczeniu wyniesionym z nauczania matematyki we Francji, pojęcie studentów uniwersytetu o matematyce (nawet tych uczących się jej w Ecole Normale Supérieure (ENS) – współczuję tym wszystkim bez wątpienia niegłupim, ale otumanionym młodym ludziom) jest tak samo słabe, jak tego ucznia.

Studenci ci, na przykład, nie widzieli nigdy paraboloidy, więc pytanie o kształt powierzchni opisanej wzorem $xy = z^2$ wprawia studiujących matematykę w ENS w zdumienie. Narysowanie na płaszczyźnie krzywej opisanej równaniami parametrycznymi (np. $x = t^3 - 3t$, $y = t^4 - 2t^2$) jest dla nich problemem niemożliwym do rozwiązania (podobnie jak chyba dla większości francuskich nauczycieli matematyki).

Po przejrzeniu pierwszego podręcznika de l'Hôspitala o rachunku różniczkowym („rachunek różniczkowy gwoli zrozumienia linii krzywych") i kilku następnych aż do podręcznika Goursata można stwierdzić, że umiejętność rozwiązywania takich problemów była dawniej uważana, podobnie jak znajomość tabliczki mnożenia, za niezbędną część rzemiosła każdego matematyka.

Niewydarzeni miłośnicy „matematyki abstrakcyjnej" usunęli z kursu matematyki całą geometrię (dzięki której najczęściej pojawia się w matematyce związek z fizyką i światem rzeczywistym). Podręczniki rachunku różniczkowego napisane przez Goursata, Hermite'a i Picarda miały być ostatnio wyrzucone z biblioteki studenckiej Uniwersytetów Paris VI i Paris VII na kampusie Jussieu jako przestarzałe, a tym samym szkodliwe (uratowała je dopiero moja interwencja).

Okazało się, że studenci ENS, którzy wysłuchali wykładów na temat geometrii różniczkowej i analitycznej (prowadzonych przez poważanych matematyków), nie są zaznajomieni ani z powierzchnią Riemanna krzywej eliptycznej $y^2 = x^3 + ax + b$, ani nawet z topologiczną klasyfikacją powierzchni (nie wspominając o całkach eliptycznych I rodzaju i własności grupowej krzywej eliptycznej, czyli o twierdzeniu Eulera–Abela o addytywności). Uczono ich jedynie o strukturach Hodge'a i rozmaitościach Jacobiego.

Jak to mogło się wydarzyć we Francji, która dała światu Lagrange'a i Laplace'a, Cauchy'ego i Poincarégo, Leray'a i Thoma? Wydaje się, że rozsądne wytłumaczenie podał I. G. Pietrowski, który uczył mnie w 1966 r., że prawdziwi matematycy nie łączą się w stada, ale słabi potrzebują stada, by przetrwać. Może to wynikać z rozmaitych przyczyn (np. superabstrakcji, antysemityzmu lub problemów „stosowanych i przemysłowych”), ale zasadniczą sprawą jest zawsze rozwiązanie problemu społecznego: przeżycia w lepiej wykształconym otoczeniu.

Przy okazji przypomnę ostrzeżenie Pasteura: nigdy nie było i nigdy nie będzie żadnych „nauk stosowanych”, istnieją tylko z a s t o s o w a n i a n a u k (bardzo przydatne!).

W tamtych dniach traktowałem słowa Pietrowskiego z pewnym powątpiewaniem, lecz obecnie coraz bardziej się przekonuję, że miał on rację. Spora część superabstrakcyjnej aktywności po prostu sprowadza się do bezwstydnego zagrabiania twórcom ich odkryć i następnie przypisywania ich „uogólniającym” epigonom. Podobnie jak Ameryka nie została nazwana imieniem swego odkrywcy, tak wyniki w matematyce nie są prawie nigdy nazywane imionami tych, którzy je uzyskali.

Chciałbym tu podkreślić, że z jakichś nieznanych mi powodów moje własne osiągnięcia nigdy nie były w taki sposób potraktowane, ale stale zdarzało się to zarówno moim nauczycielom (Kołmogorowowi, Pietrowskiemu, Pontriaginowi, Rochlinowi), jak i moim uczniom. Profesor M. Berry kiedyś sformułował dwie następujące zasady:

Zasada Arnolda. Jeśli jakieś pojęcie jest związane z czyimś nazwiskiem, to nie jest ono nazwiskiem odkrywcy.

Zasada Berry'ego. Zasada Arnolda stosuje się do siebie samej.

Powróćmy jednak do problemu nauczania matematyki we Francji.

Gdy byłem studentem I roku Wydziału Mechaniki i Matematyki Uniwersytetu Moskiewskiego, wykłady rachunku różniczkowego prowadził L. A. Tumarkin, specjalista od teorii mnogości i topologii, który skrupulatnie powtórzył stary, klasyczny kurs rachunku różniczkowego typu francuskiego w wersji Goursata. Powiedział nam, że całki funkcji wymiernych wzdłuż krzywych algebraicznych można obliczyć, jeśli odpowiednia powierzchnia Riemanna jest sferą, ogólnie zaś nie można ich obliczyć, gdy jest to powierzchnia wyższego rodzaju. Dla zapewnienia sferyczności wystarczy mieć wystarczająco dużą liczbę punktów podwójnych na krzywej danego rodzaju (czyli krzywa musi być unikursalna, co oznacza, że możliwe jest narysowanie rzeczywistych punktów krzywej na płaszczyźnie rzutowania bez odrywania ołówka od papieru).

Fakty te działają na wyobraźnię do tego stopnia, że (nawet jeśli są podane bez żadnego dowodu) dają lepsze i bardziej poprawne wyobrażenie o nowoczesnej matematyce niż wszystkie tomy dzieła Bourbakiego. Istotnie, w ten sposób odkrywamy istnienie cudownego powiązania między rzeczami, które wydają się całkowicie różne: z jednej strony istnienie wyrażenia na całki w jawnej postaci i topologia odpowiedniej powierzchni Riemanna, a z drugiej – liczba punktów podwójnych i rodzaj odpowiedniej powierzchni Riemanna, co również przejawia się w obszarze rzeczywistym w postaci unikursalności.

Już Jacobi zauważył najbardziej fascynującą własność matematyki, że ta sama funkcja dotyczy zarówno przedstawienia liczby całkowitej jako sumy kwadratów czterech liczb, jak i rzeczywistego ruchu wahadła.

Te odkrycia powiązań pomiędzy różnorodnymi obiektami matematycznymi można porównać do odkrycia związku między elektrycznością a magnetyzmem w fizyce lub z odkryciem podobieństwa geologii wschodniego wybrzeża Ameryki i zachodniego wybrzeża Afryki.

Emocjonalne znaczenie takich odkryć dla nauczania trudno jest przecenić. One właśnie uczą nas, jak szukać (i znajdować) takie cudowne zjawiska, świadczące o istnieniu harmonii we Wszechświecie.

Usunięcie geometrii z nauczania matematyki oraz rozwód z fizyką niszczą takie powiązania. Nie tylko studenci, ale również współcześni matematycy zajmujący się geometrią analityczną nie znają np. faktu, zaobserwowanego przez Jacobiego, że całka eliptyczna I rodzaju określa czas ruchu po eliptycznej krzywej fazowej w odpowiednim układzie hamiltonowskim.

Parafrazując słynne słowa o elektronie i atomie można powiedzieć, że hipocykloida jest równie „niewyczerpana" jak ideał w pierścieniu wielomianowym. Uczenie o ideałach studentów, którzy nigdy nie widzieli hipocykloidy, jest tak samo śmieszne jak uczenie dodawania ułamków dzieci, które nigdy nie dzieliły (przynajmniej w wyobraźni) ciastka lub jabłka na równe części. Nic więc dziwnego, że dzieci wolą dodawać licznik do licznika i mianownik do mianownika.

Słyszałem od moich francuskich kolegów, że tendencja do superabstrakcyjnych uogólnień jest ich tradycyjną cechą narodową. Nie przeczę, że to może być sprawa choroby dziedzicznej, ale pragnę podkreślić fakt, że przykład o ciastku i jabłku zapożyczyłem od Poincarégo.

Schemat konstrukcji teorii matematycznej jest dokładnie taki sam, jak w innych naukach przyrodniczych. Najpierw rozważamy niektóre obiekty i czynimy pewne obserwacje w przypadkach szczególnych. Następnie próbujemy znaleźć i znajdujemy granice zastosowania naszych obserwacji, szukając kontrprzykładów w celu zapobieżenia nieuzasadnionemu rozszerzeniu naszych obserwacji na zbyt duży przedział zdarzeń (przykład: liczba podziałów kolejnych liczb nieparzystych 1, 3, 5, 7, 9 na nieparzystą liczbę składników daje sekwencję 1, 2, 4, 8, 16, ale gdy spróbujemy to zrobić dla następnej liczby nieparzystej 11, to otrzymamy 29).

W rezultacie formułujemy dokonane przez nas odkrycie doświadczalne (np. twierdzenie Fermata albo hipotezę Poincarégo) w możliwie najbardziej jasny sposób. Następnie przychodzi trudny okres sprawdzania rzetelności uzyskanych wniosków.

W matematyce powstała w tym celu specjalna metoda. Zastosowana do świata rzeczywistego, jest ona czasem użyteczna, ale niekiedy może też prowadzić do oszukania samego siebie. Metoda ta nosi nazwę modelowania. Tworząc jakiś model, robimy następującą idealizację: niektóre fakty, znane jedynie z pewnym prawdopodobieństwem lub z pewnym stopniem dokładności, przyjmuje się jako „absolutnie" poprawne i uznaje się za „aksjomaty". Sens tej „absolutyzacji" polega właśnie na tym, że pozwalamy sobie operować tymi „faktami" zgodnie z zasadami logiki formalnej, deklarując jako „twierdzenia" wszystko, co możemy z nich wyprowadzić.

Jest rzeczą oczywistą, że w żadnej realnej działalności nie można w pełni polegać na takich dedukcjach, chociażby dlatego, że parametry badanego zjawiska nigdy nie są znane z absolutną dokładnością i mała zmiana tych parametrów (np. warunków początkowych procesu) może całkowicie zmienić wynik. Wskutek tego wiarygodne, długookresowe prognozy pogody są niemożliwe i pozostaną niemożliwe, niezależnie od tego, jak bardzo rozbudujemy komputery i inne przyrządy, które zapisują warunki początkowe.

Dokładnie tak samo mała zmiana aksjomatów (których i tak nie możemy być całkowicie pewni) może na ogół doprowadzić do zupełnie innych konkluzji od tych, które uzyskano z twierdzeń wydedukowanych z przyjętych aksjomatów. Im dłuższy i bardziej kunsztowny łańcuch dedukcji („dowodów"), tym mniej wiarygodny jest końcowy rezultat.

Skomplikowane modele rzadko przydają się komukolwiek oprócz doktorantów.

Matematyczna metoda modelowania polega na pomijaniu tego niemiłego problemu i na mówieniu o modelu dedukcyjnym tak, jak gdyby zgadzał się z rzeczywistością. Fakt, że ta droga, która w oczywisty sposób jest niepoprawna z punktu widzenia nauk przyrodniczych, w fizyce często prowadzi do użytecznych wyników, jest zwany „zasadą niepojętej skuteczności matematyki w naukach przyrodniczych" (lub „zasadą Wignera").

Możemy tutaj przytoczyć uwagę I. M. Gelfanda: istnieje inne zjawisko tak niepojęte, jak niezrozumiała skuteczność matematyki w fizyce, zauważona przez Wignera, a jest nim niezrozumiała nieskuteczność matematyki w biologii.

„Subtelna trucizna edukacji matematycznej" (według słów F. Kleina) dla fizyka polega na tym, że zabsolutyzowany model jest oderwany od rzeczywistości i nie da się już z nią porównywać. Oto prosty przykład. Matematyka uczy, że rozwiązanie równania Malthusa $dx/dt = x$ jest jednoznacznie określone przez warunki początkowe (tzn. że odpowiednie krzywe całkowe nie przecinają się w płaszczyźnie (t, x)). Ten wniosek, wynikający z przyjętego modelu matematycznego, wykazuje słabe powiązanie z rzeczywistością. Z eksperymentu komputerowego wynika, że wszystkie te krzywe całkowe mają punkty wspólne na ujemnej półosi t. I rzeczywiście, krzywe z warunkami początkowymi $x(0) = 0$ oraz $x(0) = 1$ praktycznie przecinają się dla $t = -10$, a dla $t = -100$ nie można między nie wcisnąć atomu. Własności przestrzeni przy tak małych odległościach nie dają się już opisać za pomocą geometrii euklidesowej. Zastosowanie twierdzenia o jednoznaczności w tej sytuacji w sposób oczywisty przekracza dokładność modelu. Należy o tym pamiętać w praktycznych zastosowaniach modelu, w przeciwnym razie można znaleźć się w kłopotliwej sytuacji.

Chciałbym jednak zauważyć, że to samo twierdzenie o jednoznaczności wyjaśnia, dlaczego ostatni etap przybijania statku do mola przeprowadza się ręcznie: gdyby w automatycznym sterowaniu statkiem prędkość zdefiniowano jako gładką (liniową) funkcję odległości, wówczas przybijanie trwałoby nieskończenie długo. Innym wyjściem byłoby uderzenie w molo (tłumione, gdyż mamy do czynienia z ciałami niedoskonale sprężystymi). Nawiasem mówiąc, problem ten musiał zostać potraktowany poważnie, gdy lądowały pierwsze pojazdy na Księżycu i Marsie, jak również przy dokowaniu stacji kosmicznych; tutaj twierdzenie o jednoznaczności działa przeciw nam.

Niestety, ani takich przykładów, ani dyskusji o niebezpieczeństwie fetyszyzacji twierdzeń nie można znaleźć w nowoczesnych podręcznikach matematyki, nawet w najlepszych. Mam nawet wrażenie, że scholastyczni matematycy (którzy słabo znają fizykę) wierzą w zasadniczą różnicę między matematyką aksjomatyczną a modelowaniem, zwykle stosowanym w naukach przyrodniczych, które zawsze wymaga sprawdzenia wniosków za pomocą doświadczenia.

Pomijając już względny charakter początkowych aksjomatów, nie można też lekceważyć nieuchronności wystąpienia błędów logicznych w długich dowodach (np. promieniowane kosmiczne lub oscylacje kwantowe mogą zepsuć komputer). Każdy praktykujący matematyk wie, że bez jakiejś formy kontroli (najlepiej za pomocą przykładów) po mniej więcej dziesięciu stronach połowa znaków w wyrażeniu będzie błędna i kilka dwójek z mianownika przemieści się do licznika.

Metoda zwalczania takich błędów sprowadza się do zewnętrznej kontroli za pomocą doświadczeń lub obserwacji, tak jak w każdej nauce doświadczalnej, i tego należy uczyć wszystkich uczniów w szkołach od samego początku.

Próba stworzenia „czystej” matematyki dedukcyjno-aksjomatycznej doprowadziła do odrzucenia schematu stosowanego w fizyce (obserwacja, model, badanie modelu, wnioski, testowanie za pomocą doświadczeń) i zastąpienia go schematem: definicja, twierdzenie, dowód. Nie sposób zrozumieć nie umotywowaną definicję, lecz nie powstrzymuje to „algebraików-aksjomatyków”.

Chętnie zdefiniowaliby oni iloczyn liczb naturalnych za pomocą długiej reguły mnożenia. Wtedy przemienność mnożenia staje się trudna do udowodnienia, ale nadal można ją wydedukować z podanych aksjomatów jako twierdzenie. Można wówczas zmusić nieszczęsnych studentów do nauczenia się tego twierdzenia i jego dowodu (w celu podtrzymania autorytetu zarówno nauki, jak i osób jej nauczających). Jest oczywiste, że takie definicje i dowody mogą jedynie zaszkodzić nauczaniu i zastosowaniom praktycznym.

Sposobem zrozumienia przemienności mnożenia jest przeliczenie żołnierzy według ich stopni lub obliczenie pola powierzchni prostokąta na dwa sposoby. Każda próba zrozumienia tego pojęcia bez odniesienia do fizyki oraz rzeczywistości jest sekciarska i izolacjonistyczna, a w oczach rozsądnych ludzi zaciera obraz matematyki jako pożytecznej działalności człowieka.

Ujawnię jeszcze kilka takich „sekretów” (w interesie nieszczęsnych studentów).

W y z n a c z n i k macierzy jest (zorientowaną) objętością równoległościanu, którego krawędziami są kolumny macierzy. Gdy zaznajomi się studentów z tym sekretem (który jest starannie ukrywany w wyjałowionej algebraicznej metodzie nauczania), wówczas cała teoria wyznaczników staje się łatwym do zrozumienia rozdziałem teorii form wieloliniowych. Jeśli wyznaczniki są zdefiniowane w inny sposób, to każdy rozsądny człowiek znienawidzi po wsze czasy wszystkie wyznaczniki, jakobiany i twierdzenie o funkcjach uwikłanych.

Co to jest g r u p a? Algebraicy uczą, że jest to jakoby zbiór z dwiema operacjami, który spełnia dużo łatwych do zapomnienia aksjomatów. Taka definicja wywołuje naturalny protest: dlaczego jakakolwiek rozsądna osoba potrzebuje takiej pary operacji? – Och, do diabła z tą matematyką – dochodzi do wniosku student (który, być może, zostanie w przyszłości ministrem edukacji).

Sytuacja będzie zupełnie inna, jeśli rozpoczniemy nie od pojęcia grupy, ale od pojęcia przekształcenia (wzajemnie jednoznacznego odwzorowania zbioru w siebie), podobnie jak – historycznie rzecz biorąc – przebiegał rozwój tych pojęć. Zbiór przekształceń zbioru jest zwany grupą, jeśli razem z dowolnymi dwoma przekształceniami zawiera wynik ich kolejnego zastosowania, a razem z dowolnym przekształceniem zawiera jego przekształcenie odwrotne.

Jest to pełna definicja. Tak zwane „aksjomaty” są w rzeczywistości po prostu (oczywistymi) w ł a s n o ś c i a m i grupy przekształceń. To, co aksjomatycy nazywają „grupą abstrakcyjną”, jest po prostu grupą przekształceń różnych zbiorów, rozważaną z dokładnością do izomorfizmu (wzajemnie jednoznacznego odwzorowania zachowującego operacje). Jak udowodnił Cayley, na świecie nie istnieją „bardziej abstrakcyjne” grupy. Dlaczego więc algebraicy kontynuują torturowanie studentów tą abstrakcyjną definicją?

W latach sześćdziesiątych uczyłem w Moskwie młodzież szkolną teorii grup. Unikając całej tej aksjomatyzacji i trzymając się fizyki tak blisko, jak to tylko było możliwe, w ciągu pół roku doszedłem do twierdzenia Abela o nierozwiązywalności ogólnego równania piątego stopnia za pomocą pierwiastników (po drodze ucząc o liczbach zespolonych, powierzchniach Riemanna, grupach podstawowych i grupach monodromii funkcji algebraicznych). Wykłady te zostały później opublikowane przez jednego ze słuchaczy, W. Aleksiejewa, w postaci książki *Twierdzenie Abela w zadaniach.*

Co to jest rozmaitość gładka? W niedawno wydanej amerykańskiej książce przeczytałem, że Poincaré nie znał tego pojęcia (które sam wprowadził) i że „nowoczesną" definicję podał dopiero Veblen w późnych latach dwudziestych: rozmaitość jest przestrzenią topologiczną, która spełnia długą serię aksjomatów.

Za jakie grzechy studenci muszą przedzierać się przez te wszystkie zawiłości? Przecież w książce Poincarégo *Analysis Situs* jest zamieszczona absolutnie jasna definicja rozmaitości gładkiej, znacznie bardziej użyteczna niż definicja „abstrakcyjna".

Gładka k-wymiarowa podrozmaitość przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^N$ jest podzbiorem, który w otoczeniu każdego ze swoich punktów jest wykresem gładkiego odwzorowania przestrzeni $\mathbb{R}^k$ w $\mathbb{R}^{N-k}$ (gdzie $\mathbb{R}^k$ oraz $\mathbb{R}^{N-k}$ są podprzestrzeniami współrzędnych). Jest to proste uogólnienie najzwyklejszych krzywych gładkich na płaszczyźnie (takich jak okrąg $x^2 + y^2 = 1$) oraz krzywych i powierzchni w przestrzeni trójwymiarowej.

Mamy w sposób oczywisty zdefiniowane gładkie odwzorowania pomiędzy gładkimi rozmaitościami. Dyfeomorfizmy są to odwzorowania, które są gładkie wraz z odwrotnościami.

„Abstrakcyjna" rozmaitość gładka jest podrozmaitością gładką przestrzeni euklidesowej rozpatrywanej z dokładnością do dyfeomorfizmu. Nie istnieją na świecie „bardziej abstrakcyjne" skończenie wymiarowe rozmaitości gładkie (twierdzenie Whitneya). Dlaczego upieramy się dręczyć studentów abstrakcyjną definicją? Czyż nie byłoby lepiej udowodnić im twierdzenie o jawnej klasyfikacji zamkniętych, dwuwymiarowych rozmaitości (powierzchni)?

To właśnie cudowne twierdzenie (z którego np. wynika, że każda zwarta, spójna, zorientowana powierzchnia jest sferą z pewną liczbą uch) daje poprawne wyobrażenie o nowoczesnej matematyce, a nie superabstrakcyjne uogólnienia prymitywnych podrozmaitości przestrzeni euklidesowej, które nie wnoszą tak naprawdę nic nowego, a są przedstawiane jako osiągnięcia aksjomatyków.

Twierdzenie o klasyfikacji powierzchni jest osiągnięciem matematycznym najwyższej klasy, porównywalnym z odkryciem Ameryki czy promieniowania rentgenowskiego. Jest to prawdziwe odkrycie w naukach przyrodniczych i nawet trudno powiedzieć, czy sam ten fakt należy bardziej do fizyki, czy też do matematyki. Jego znaczenie zarówno w zastosowaniach, jak i dla potrzeb wypracowania sobie prawidłowego światopoglądu jest nieporównywalnie większe od takich „osiągnięć” matematyki, jak dowód wielkiego twierdzenia Fermata lub dowód faktu, że dowolną wystarczająco dużą liczbę całkowitą można przedstawić jako sumę trzech liczb pierwszych.

W celach reklamowych współczesna matematyka przedstawia czasem takie wyczyny jako swoje ostatnie słowo. Oczywiście, takie postępowanie nie tylko nie przyczynia się do uznania matematyki przez społeczeństwo, ale – wprost przeciwnie – wywołuje zdrową nieufność co do potrzeby marnowania energii na zajmowanie się egzotycznymi problemami, które prawie nikogo nie interesują (czymś w rodzaju wspinaczki po skale).

Twierdzenie o klasyfikacji powierzchni powinno zostać włączone do programu matematyki w liceum (raczej bez dowodu), ale z jakichś powodów nie jest nawet włączone do uniwersyteckich wykładów matematyki (z których, nawiasem mówiąc, we Francji w ostatnich kilkudziesięciu latach usunięto całą geometrię).

Powrót w sposobie nauczania matematyki na wszystkich poziomach od scholastycznego paplania do jej prezentacji jako ważnego działu nauki przyrodniczej jest obecnie głównym problemem szkoły francuskiej. Ze zdziwieniem dowiedziałem się, że wszystkie książki matematyczne zawierające najlepsze i najważniejsze podejścia metodologiczne są studentom prawie nieznane (najwyraźniej nawet nie były tłumaczone na język francuski). Wśród nich są książki *O liczbach i figurach* Rademachera i Toeplitza, *Geometria poglądowa* Hilberta i Cohn-Vossena, *Co to jest matematyka* Couranta i Robbinsa, *Jak to rozwiązać* oraz *Matematyka i rozważania wiarygodne* Pólyi czy *Rozwój matematyki w XIX wieku* F. Kleina.

Dobrze pamiętam, jak wielkie wrażenie zrobił na mnie w szkole kurs rachunku różniczkowego Hermite'a (który istnieje w rosyjskim tłumaczeniu!). Powierzchnie Riemanna pojawiają się w nim chyba na samym początku (cała analiza jest oczywiście oparta na liczbach zespolonych, jak być powinno). Asymptoty całek są badane za pomocą deformacji drogi na powierzchniach Riemanna i przesuwania punktów rozgałęzienia (dzisiaj nazwalibyśmy to teorią Picarda–Lefschetza; Picard, nawiasem mówiąc, był zięciem Hermite'a – zdolności matematyczne są często dziedziczone przez zięciów: dynastia Hadamard – P. Levy – L. Schwarz – U. Frisch to jeszcze jeden znany przykład w paryskiej Akademii Nauk).

„Przestarzały” kurs Hermite'a, powstały sto lat temu (obecnie pewnie usunięty z francuskich bibliotek uniwersyteckich), był znacznie bardziej nowoczesny niż arcynudne podręczniki rachunku różniczkowego, którymi obecnie dręczy się studentów.

Jeśli matematykom nie wróci rozsądek, to użytkownicy, którzy ciągle potrzebują teorii matematycznej, nowoczesnej w najlepszym tego słowa znaczeniu i którzy zachowują zdroworozsądkową odporność na bezużyteczną aksjomatyczną paplaninę, w końcu odrzucą usługi niedouczonych scholastyków zarówno w szkołach, jak i na uniwersytetach.

Nauczyciel matematyki, który nie opanował przynajmniej niektórych tomów kursu Landaua i Lifszyca, stanie się reliktem, podobnie jak człowiek, który nie zna dzisiaj różnicy między zbiorem otwartym a domkniętym.

Tłumaczyła *Danuta Śledziewska-Błocka*
Centrum Fizyki Teoretycznej PAN, Warszawa