O matematyce na opak

Hanna Okrasińska-Płociniczak[1], Łukasz Płociniczak[2]

[1] Katedra Matematyki, Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu,
[2]Instytut Matematyki i Informatyki, Politechnika Wrocławska

Kobyla Góra

Co to są problemy odwrotne?

- Bardzo często w zastosowaniach matematyki interesują nas pytania „na odwrót''.
- Istotniejsze jest dopasowanie modelu (wyznaczenie fizycznych parametrów) niż poznanie jawnej postaci rozwiązania (bo ją mierzymy).
- Przykład: znana każdemu regresja liniowa, czyli wyznaczanie współczynników prostej. Wiemy, że pewne wielkości są liniowo zależne (rozwiązania). Pytamy o ilościowe zależności.
- Często spotykane cechy: brak rozwiązań, brak jednoznacznego rozwiązania, brak stabilności.

Proste przykłady

- Wielomiany
  - Wprost: mając dany wielomian znaleźć jego wartość w punkcie.
  - Na odwrót: mając dane wartości w punktach znaleźć wielomian, który je przyjmuje.
  - Rozwiązanie: interpolacja.
  - Dużo większa złożoność zagadnienia odwrotnego.
  - Mamy jednoznaczność i stabilność.

Proste przykłady

- Wielomiany
  - Wprost: mając dany wielomian znaleźć jego wartość w punkcie.
  - Na odwrót: mając dane wartości w punktach znaleźć wielomian, który je przyjmuje.
  - Rozwiązanie: interpolacja.
  - Dużo większa złożoność zagadnienia odwrotnego.
  - Mamy jednoznaczność i stabilność.
- Testy na inteligencję
  - Wprost: mając dany wzór ciągu a_n znaleźć jego n-ty wyraz.
  - Na odwrót: mając dany ciąg np. 2, 3, 5, 10 znaleźć kolejne wyrazy.
  - Rozwiązanie: 20, 40, 80, bo każdy następny jest sumą poprzednich (od trzeciego). A może 33 i 70? Bo są to numery tramwajów odjeżdżających z przystanku Galeria dominikańska.
  - Brak jednoznaczności rozwiązań.

Dalsze przykłady

- Poszukiwania złóż
  - Podziemne złoże minerału zmieni potencjał grawitacyjny.
  - Wprost: znamy rozkład masy i chcemy wyliczyć potencjał.
  - Na odwrót: znamy potencjał i pytamy się o rozkład masy (złoża).
  - Rozwiązanie: $\rho(t)$ - gęstość masy w punkcie t na głębokości h, s - położenie czujnika na powierzchni ziemi. Wtedy przyczynek siły grawitacji ma postać

$$\Delta F(s) = GM \frac{\rho(t)\Delta t}{h^2 + (s-t)^2} \cos\theta = GMh \frac{\rho(t)\Delta t}{\left(h^2 + (s-t)^2\right)^{3/2}}.$$

  - Całkowita siła ma zatem postać:

$$F(s) = GMh \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(t)}{\left(h^2 + (s-t)^2\right)^{3/2}} dt.$$

  - Z pomiarów znamy F. Jak znaleźć ρ, które jest pod całką?
  - **Równanie całkowe Fredholma**.

Dalsze przykłady

- Radiolokacja (odwrotne rozpraszanie)
  - Natura rozwiązała problem najlepiej: nietoperze (ale też ludzie).
  - Wprost: chcemy policzyć jak zmienia się fala akustyczna po rozproszeniu na obiekcie o znanym kształcie.
  - Na odwrót: znamy postać fali rozproszonej i chcemy znaleźć kształt obiektu.
  - Rozwiązanie: fala rozproszona spełnia równanie Helmholtza

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{na} \quad \mathbb{R}^n \setminus D \quad \text{oraz} \quad u|_{\partial D} = 0,$$

    z warunkami radiacyjnymi Sommerfelda

$$\frac{\partial u^r}{\partial r} - iku^r = O\left(|x|^{-\frac{n+1}{2}}\right) \quad \text{dla} \quad |x| \to \infty \quad \text{w kierunku} \quad \frac{x}{|x|}.$$

  - Rozwiązanie asymptotyczne

$$u^r(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} u_\infty\left(\frac{x}{|x|}\right) + O\left(|x|^{-\frac{n+1}{2}}\right) \quad \text{dla} \quad |x| \to \infty.$$

  - Jak znaleźć obszar D na podstawie u_∞?

Dalsze przykłady

- Temperatura reaktora
  - Chcemy znać temperaturę wewnątrz reaktora (lub pieca). Bezpośredni pomiar jest niemożliwy - niebezpieczeństwo. Możemy zmierzyć temperaturę na końcu pręta, którego drugi koniec umieszczony jest w reaktorze.
  - Wprost: znamy temperaturę na brzegach i warunek początkowy a chcemy wyliczyć temperaturę wewnątrz pręta.
  - Na odwrót: mierzymy temperaturę na pewnym odcinku pręta i chcemy znaleźć warunek brzegowy.
  - Rozwiązanie: temperaturę $u = u(x,t)$ mierzymy w bezpiecznym punkcie $x = a$. Niech $f(t) := u(0,t)$ (nieznane) oraz $g(t) := u(a,t)$ (znane). Temperatura spełnia

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \infty, \quad u(x,0) = 0.$$

  - Rozwiązując powyższe równanie otrzymujemy ponownie równanie całkowe Fredholma

$$g(t) = \frac{a}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{a^2}{4(t-\tau)}} \, d\tau.$$

Dalsze przykłady

- Tomografia komputerowa
  - Jak na podstawie znajomości przekroju odtworzyć trójwymiarowy obraz ludzkiego ciała?
  - Wprost: chcemy znaleźć tłumienie sygnału promieniowania Roentgena na podstawie znajomości gęstości ciała.
  - Na odwrót: znamy tłumienie i pytamy się o gęstość.
  - Rozwiązanie: można wyliczyć, że strata promieniowania przedstawia się następującym wzorem
  $$\ln I(\infty) = -\gamma \int_{-\infty}^{\infty} \rho\left(se^{i\delta} + iue^{i\delta}\right) du,$$
  gdzie s i δ parametryzują prostą $L_{s,\delta}$ na płaszczyźnie zespolonej
  $$L_{s,\delta}: \quad se^{i\delta} + iue^{i\delta} \in \mathbb{C},$$
  na przykład proste pionowe mają $s \in \mathbb{R}$ oraz $\delta = 0$.
  - Rozwiązanie polega na odwróceniu transformaty Radona zdefiniowanej poprzez
  $$(R\rho)(s,\delta) := \int_{-\infty}^{\infty} \rho\left(se^{i\delta} + iue^{i\delta}\right) du, \quad s \in \mathbb{R}, \quad \delta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Dalsze przykłady

- Czy można usłyszeć kształt bębna?
  - Pytanie to zadał Mark Kac w swoim artykule z 1966 roku.
  - Wprost: znając kształt bębna mamy wyznaczyć jego wartości własne.
  - Na odwrót: znając wartości własne chcemy znaleźć kształt bębna.
  - Rozwiązanie: dopiero w 1992 roku pojawił się bardzo nietrywialny wynik Gordon i Webb, który odpowiada na to pytanie negatywnie. Okazuje się bowiem, że można skonstruować parami różne, niewypukłe wielokąty, które drgają z takimi samymi częstotliwościami.
  - **Ale:** jeśli zażądamy wypukłości, analityczności oraz pewnej symetrii obszarów to takie same widma muszą koniecznie pochodzić od takich samych bębnów (Zelditch, 2000).

Metodologia teorii problemów odwrotnych

- Niech X i Y będą unormowanymi przestrzeniami liniowymi oraz niech $K : X \to Y$ będzie (liniowym lub nieliniowym) operatorem. Równanie $Kx = y$ jest **dobrze postawione**, jeśli:
  - (*istnienie*) dla każdego $y \in Y$ istnieje rozwiązanie równania $Kx = y$;
  - (*jednoznaczność*) dla każdego $y \in Y$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie $Kx = y$;
  - (*stabilność*) rozwiązanie równania $Kx = y$ zależy w sposób ciągły od $y \in Y$.

  Równanie, dla którego któryś z powyższych warunków nie jest spełniony jest **źle postawione**.
- Okazuje się, że prawie zawsze możemy zapewnić istnienie rozwiązania (np. poprzez powiększenie przestrzeni, na której pracujemy).
- Jednoznaczność też często nie jest problemem, gdyż zaradzić można na jej brak szukaniem uogólnionego rozwiązania w sensie normy (najmniejszych kwadratów).
- Ponieważ zwykle pracujemy na zaszumionych danych rzeczywistych, to stabilność jest kluczową cechą, z którą musimy się obchodzić bardzo delikatnie.

Metodologia teorii problemów odwrotnych

- Istnienie i jednoznaczność zapewnić możemy rozważając rozwiązania uogólnione w sensie najmniejszych kwadratów.
- Wektor (funkcja) $x \in X$ nazywany jest **rozwiązaniem w sensie najmniejszych kwadratów** równania $Kx = y$, jeśli

$$\|Kx - y\| = \inf \{\|Kz - y\| : z \in Y\}.$$

- Standardowa teoria przestrzeni Hilberta mówi nam, że takie uogólnione rozwiązanie musi istnieć (najlepsze przybliżenie).
- O jednoznaczności możemy się też szybko przekonać zauważając, że powyższy warunek jest równoważny następującemu **równaniowi normalnemu**

$$Kx - y \in R(K)^{\perp} = N(K^*) \quad \longleftrightarrow \quad K^*Kx = K^*y,$$

  gdzie R oznacza obraz, a N jądro.
- Operator $K^{\dagger}$, który dla każdego y przyporządkowuje rozwiązanie najmniejszych kwadratów zagadnienia $Kx = y$ nazywamy **pseudoodwrotnością Moore-Penrose'a**.

Metodologia teorii problemów odwrotnych

- Zapewnienie stabilności nosi nazwę **regularyzacji**.
- Dla prostoty, skupimy się teraz na przypadku, gdy K jest zwarty oraz samosprzężony i tym samym posiada zupełny układ wektorów własnych.
- Ponieważ K jest zwarty, to λ_j jest ciągiem malejącym zbieżnym do zera. Mamy też następujące rozkłady

$$Ky = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle y, v_j \rangle v_j,$$

oraz

$$K^{\dagger} y = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\langle y, v_j \rangle}{\lambda_j} v_j.$$

- Stąd natychmiast widzimy, że $K^{\dagger}$ jest nieograniczony, gdy $R(K)$ jest nieskończenie wymiarowe (wystarczy rozważyć ciąg $y_j := v_j$). Czyli rozwiązanie naszego zagadnienia odwrotnego będzie zwykle niestabilne.

Metodologia teorii problemów odwrotnych

- Regularyzacja Tichonowa polega na stworzeniu rodziny dobrze postawionych rozwiązań x^α, które zależą w sposób ciągły od parametru α leżących „blisko" rozwiązania x.
- Tichonow zaproponował, żeby zdefiniować

$$x^\alpha := K_\alpha^\dagger y = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\langle y, v_j \rangle}{\lambda_j + \alpha} v_j. \tag{1}$$

- Teraz pomimo tego, że $\lambda \to 0$, mianownik pozostaje odgraniczony od zera co daje stabilność. Łatwo się można też przekonać, że $x^\alpha \to K^\dagger y$, gdy $\alpha \to 0$.
- Zatem możemy traktować x^α jako dobrze postawione przybliżenie rozwiązania $Kx = y$.
- Od razu nasuwa się pytanie: jakie α wybrać, aby znaleźć najlepsze rozwiązanie naszego problemu?
- Odpowiedź jest niestety niezbyt satysfakcjonująca: to zależy od danych, z którymi mamy do czynienia.

Podsumowanie

- Zobaczyliśmy ogólny zarys problemów, które mogą pojawić się przy analizie zagadnień odwrotnych.
- Na szczęście istnieje bardzo dobrze rozbudowana metodologia, dzięki której systematycznie możemy regularyzować problemy źle postawione.
- Problemy odwrotne są ważne, bo spotykamy je w niemal każdym obszarze matematyki stosowanej.