

# Równania różniczkowe cząstkowe

## Notatki do wykładu

Łukasz Płociniczak

19 listopada 2020

## Organizacja kursu

**Literatura.** Wykład będzie samowystarczalny ale bardzo pomocne będzie sięgnięcie do literatury. Poniżej są moje propozycje.

1. *S.J.Farlow, Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, Dover Publications, 1993.* Jest to bardzo lekkie wprowadzenie do równań cząstkowych. Zawiera dużo zadań i ciekawie wyłożony materiał.
2. *R.Haberman, Applied Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems, Pearson, 2012.* świetna książka omawiająca przedmiot bardzo szczegółowo. Na uwagę zasługują dokładne rozwiązania wielu przykładów.

**Zaliczenie.** Na zaliczenie przedmiotu składać się będą kolokwia i egzaminy. Kolokwia zaliczają ćwiczenia a egzamin całość. Ze wszystkiego będziemy zbierać punkty.

- *Kolokwia.* 2x20 punktów.
- *Aktywność.* 10 punktów.

Aby zaliczyć ćwiczenia należy zbierać co najmniej 20 punktów. Pozytywna ocena z ćwiczeń dopuszcza do egzaminu. W przypadku uzyskania mniej niż 20 punktów można podejść do egzaminu poprawkowego, którego zaliczenie gwarantuje ocenę dostateczną. Ostateczna ocena z przedmiotu będzie wyliczona ze średniej

$$\text{Ocena} = \frac{\text{Ćwiczenia} + \text{Egzamin}}{2}.$$

**Wymagania wstępne.** Żeby zrozumieć materiał konieczna będzie wiedza z Analizy, Algebry i Równań zwyczajnych.

## 1 Wstęp

Równania różniczkowe cząstkowe (RRC) są centralnym pojęciem dla bardzo wielu dziedzin nauki takich jak matematyka, fizyka, chemia, biologia a nawet medycyna. RRC występują wszędzie tam, gdzie pojawia się potrzeba opisu zmiany pewnych wielkości. Jak już dobrze wiemy, każda zmiana w czasie lub przestrzeni opisywana jest poprzez pochodne. Jeśli dane zjawisko przebiega w więcej niż jednym wymiarze to opisujące je pochodne są z konieczności cząstkowe i związane są równaniami. Badaniem równań cząstkowych zajmiemy się podczas tego wykładu.

Podobnie jak równania zwyczajne możemy sklasyfikować równania cząstkowe. Podstawowe typy klasyfikacji to

- ze względu na rząd najwyższej pochodnej,
- ze względu na liniowość.

Omawianie tematu zaczniemy od równań pierwszego rzędu, które mogą być zarówno liniowe jak i nieliniowe (quasiliniowe). Następnie przystąpimy do analizy liniowych równań drugiego rzędu. Okazuje się, że niemal wszystkie równania w matematyce i fizyce są rzędu co najwyżej drugiego. Pod koniec semestru zrozumiemy między innymi takie zjawiska jak rozchodzenie się wszelkich fal, ciepła, poznamy jak rozkłada się potencjał grawitacyjny oraz prześledzimy jak przebiega fala uderzeniowa.

Bardziej ściśle, zajmować się będziemy rozwiązywaniem równań postaci

$$F(t, \mathbf{x}, u, u_t, u_x, \dots, u_{xx}, u_{xy}, \dots) = 0, \quad (1.1)$$

gdzie  $F$  jest pewną funkcją,  $t$  oraz  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  są zmiennymi niezależnymi (czasowa + przestrzenne),  $u = u(t, \mathbf{x})$  jest szukaną funkcją a pochodne cząstkowe oznaczane są skrótowo

$$u_t := \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_x := \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{xx} := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \dots \quad (1.2)$$

W zależności od sytuacji będziemy mieszać notację tradycyjną z  $\partial$  oraz tę z indeksem dolnym. Ponadto, w większości przypadków ograniczymy się do rozważania jednego wymiaru przestrzennego. Będziemy wszędzie zakładać, że funkcja  $u$  będzie *tak porządną jak tylko potrzebujemy* (chyba, że będzie napisane inaczej). Interesować nas będzie przede wszystkim *rozwiązywanie* równań cząstkowych przy różnych warunkach ale nie powstrzymamy się również od wyników czysto teoretycznych. Zaczynamy!

## 2 Równania różniczkowe pierwszego rzędu. Metoda charakterystyk

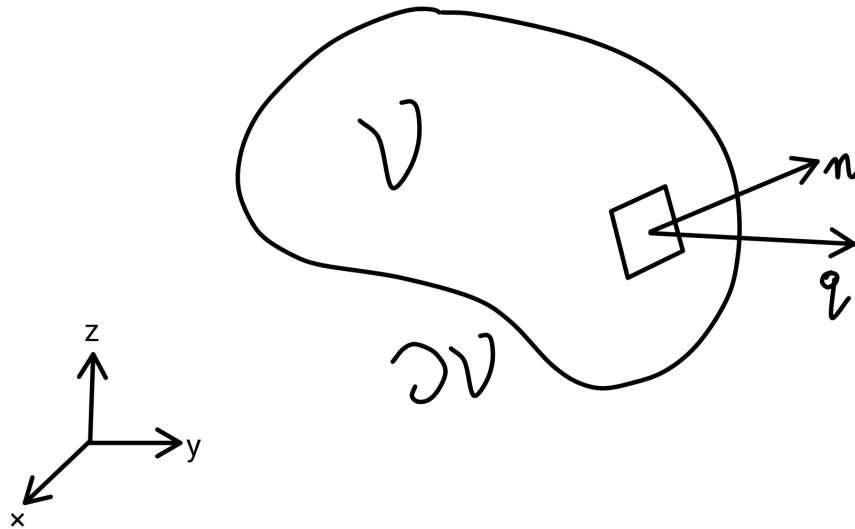
Bardzo wiele zjawisk w przyrodzie przebiega przy zachowaniu pewnych wielkości. Najprostsze przykłady tych zachowanych zmiennych to pęd czy energia. Okazuje się, że możemy napisać równanie, które opisuje wszelkie prawa zachowania w sposób bardzo ogólny za pomocą równania różniczkowego. Równanie to opisuje ewolucję w czasie badanej wielkości.

**Przykład.** (*Prawa zachowania*)

Rozważmy pewną wielkość (na przykład gęstość pewnej substancji, energii, pędu, ładunku, liczności populacji), która może zmieniać się zarówno w czasie i przestrzeni. Oznaczmy ją poprzez  $u = u(\mathbf{x}, t)$ , gdzie  $t$  jest czasem a  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  zmienną przestrzenną. Wybierzmy teraz *dowolną* objętość  $\mathcal{V}$  znajdującą się w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  (zob. Rys. 1). Oznaczmy jeszcze powierzchnię objętości  $\mathcal{V}$  przez  $\partial\mathcal{V}$ . Całkowita zmiana w czasie wielkości  $u$  znajdującej się w  $\mathcal{V}$  może zostać obliczona wzorem

$$\text{Całkowita zmiana } u \text{ w czasie} = \frac{d}{dt} \underbrace{\iiint_{\mathcal{V}} u(\mathbf{x}, t) dx}_{\text{Całkowita ilość } u \text{ w } \mathcal{V}} \quad (2.1)$$

Zdefiniujmy teraz *strumień*  $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ , czyli ilość wielkości  $u$  na jednostkę czasu i na jednostkę powierzchni, która przepływa w chwili  $t$  przez jednostkową powierzchnię o wektorze normalnym  $\mathbf{n} := \mathbf{q}/|\mathbf{q}|$  zaczepionym w  $\mathbf{x}$  (zob. Rys. 1). Strumień jest dodatni, jeżeli wielkość przepływa w



Rysunek 1: Obszar

stronę wektora normalnego (czyli *wypływa* z objętości) oraz ujemny, gdy płynie w przeciwnym kierunku. Zatem wypadkowy przepływ u przez powierzchnię  $\partial V$  wynosi

$$\text{Wypadkowy przepływ przez } \partial V = - \iint_{\partial V} \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} \, dS, \quad (2.2)$$

gdzie całka jest całką zorientowaną po powierzchni zamkniętej.

Na koniec założmy, że  $u$  może zostać stworzona lub zniszczona (na przykład, jeśli jest to związek chemiczny to mógłby powstać w skutek pewnej reakcji chemicznej; gdyby  $u$  reprezentowało licznosc populacji to mogłaby by się powiększyć/zmniejszyć poprzez narodziny/śmierć). Zdefiniujmy *funkcję źródłową*  $f = f(\mathbf{x}, t, u)$  jako wypadkowe tempo powstawania wielkości  $u$  (dodatnie lub ujemne). To znaczy,  $f(\mathbf{x}, t, u)$  opisuje jaka ilość  $u$  powstaje w jednostce czasu w chwili  $t$  i punkcie przestrzeni  $\mathbf{x}$ . Zauważmy, że  $f$  może zależeć od  $u$ . Widzimy, że wypadkowa zmiana ilości stworzonej wielkości  $u$  w objętości  $V$  wynosi

$$\text{Tempo z jakim produkowana jest } u = \iiint_V f(\mathbf{x}, t, u) \, dx. \quad (2.3)$$

Łącząc (2.1) z (2.2) oraz (2.3) otrzymujemy

$$\frac{d}{dt} \iiint_V u(\mathbf{x}, t) \cdot dx = - \iint_{\partial V} \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} \, dS + \iiint_V f(\mathbf{x}, t, u) \, dx. \quad (2.4)$$

Zatem widzimy, że tempo zmian  $u$  w objętości  $V$  jest równe wypadkowemu przepływowi oraz tempu produkcji/niszczenia tej wielkości. Wzór (2.4) jest *całkowym prawem zachowania* i jest prawdziwy nawet dla funkcji  $u$ ,  $\mathbf{q}$  oraz  $f$ , które nie są różniczkowalne.

Jeśli teraz założymy, że trójka  $u$ ,  $\mathbf{q}$  oraz  $f$  są klasy  $C^2$  to możemy wejść z pochodną pod pierwszą całkę oraz skorzystać z twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego<sup>1</sup> w drugiej całce. Dostajemy wtedy

$$\iiint_V (u_t(\mathbf{x}, t) + \text{div } \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) - f(\mathbf{x}, t, u)) \, dx = 0. \quad (2.5)$$

<sup>1</sup>Przypomnienie. Twierdzenie G-O pokazuje związek między całką powierzchniową zorientowaną z pola  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$  a całką objętościową. Ma ono postać  $\iint_{\partial V} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_V \text{div } \mathbf{q} \, dx$ , gdzie operator *dywergencji* zdefiniowany jest przez  $\text{div } \mathbf{q} = \frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} + \frac{\partial q_3}{\partial z}$ .

Ponieważ funkcja podcałkowa jest ciągła a sama całka wzięta jest po *dowolnej* objętości to musi zachodzić

$$u_t + \operatorname{div} \mathbf{q} = f(\mathbf{x}, t, u), \quad (2.6)$$

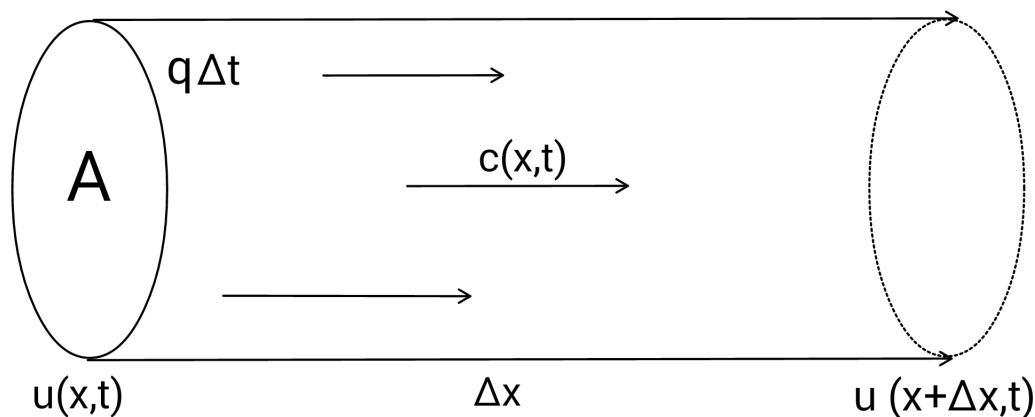
gdzie podobnie jak dla równań zwyczajnych nie piszemy argumentów zmiennych zależnych. Powyższe równanie nosi nazwę *różniczkowego prawa zachowania* lub *równania ciągłości*. W jednym wymiarze przestrzennym prawo zachowania ma postać

$$u_t + q_x = f(x, t, u). \quad (2.7)$$

Zauważmy, że jeśli nie znamy strumienia  $\mathbf{q}$  to mamy więcej zmiennych niż równań (2 vs. 1). Wynika to z tego, że prawo zachowania jest bardzo ogólnym równaniem, które opisuje ogrom wszelakich zjawisk. Potrzebujemy zatem jeszcze jednego równania, które daje nam związek  $\mathbf{q}(u)$ . Równanie to jest inne dla każdej sytuacji fizycznej i nazywane jest *równaniem konstytutywnym*.

**Przykład.** (Konwekcja/adwekcja)

Jednym z najprostszych i najważniejszych równań konstytutywnych jest to opisujące konwekcję, czyli transportu danej wielkości spowodowanej ruchem ośrodka. Przykładami mogą tu być rozprzestrzenianie się zanieczyszczeń w rzece, dymu z komina czy samochodów na autostradzie. Aby wyprowadzić postać  $\mathbf{q}$  bez utraty ogólności ograniczmy się do jednego wymiaru przestrzennego.



Rysunek 2: Jednowymiarowa konwekcja.

Załóżmy, że nasza substancja o gęstości  $u$  jest unoszona przez ośrodek w kierunku  $x$ -owym z prędkością  $c = c(x, t)$ . Rozważmy krótki odcinek czasu  $\Delta t$ , w którym medium przemieszcza się o odległość  $\Delta x$ , oczywiście

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = c(x, t). \quad (2.8)$$

Wyobraźmy sobie dowolną powierzchnię  $A$  znajdującą się w płaszczyźnie  $y - z$  (zob. Rys. 2). Wtedy całkowita ilość substancji, która przepływa przez  $A$  w czasie  $\Delta t$  wynosi  $A\Delta t q$  (z definicji strumienia). Z drugiej strony ta sama ilość substancji przebywa drogę  $\Delta x$ , zatem z definicji  $u$  (ilość substancji na jednostkę objętości) mamy

$$A\Delta t q = A\Delta x u. \quad (2.9)$$

Teraz wystarczy podzielić powyższe równanie i przejść do granicy korzystając z (2.8). Otrzymujemy

$$q = c(x, t)u. \quad (2.10)$$

Jeśli założymy, że ośrodek unosi naszą substancję z prędkością  $\mathbf{c} = \mathbf{c}(\mathbf{x}, t)$  w dowolnym kierunku, to

$$\mathbf{q} = \mathbf{c}(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}. \quad (2.11)$$

Łącząc powyższe równanie konstytutywne z prawem zachowania (2.6) otrzymujemy *równanie konwekcji*

$$\mathbf{u}_t + \text{div}(\mathbf{c}(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}) = f(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}). \quad (2.12)$$

W ważnym przypadku, gdy prędkość unoszenia jest stała mamy

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{c} \cdot \text{grad } \mathbf{u} = f(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}), \quad (2.13)$$

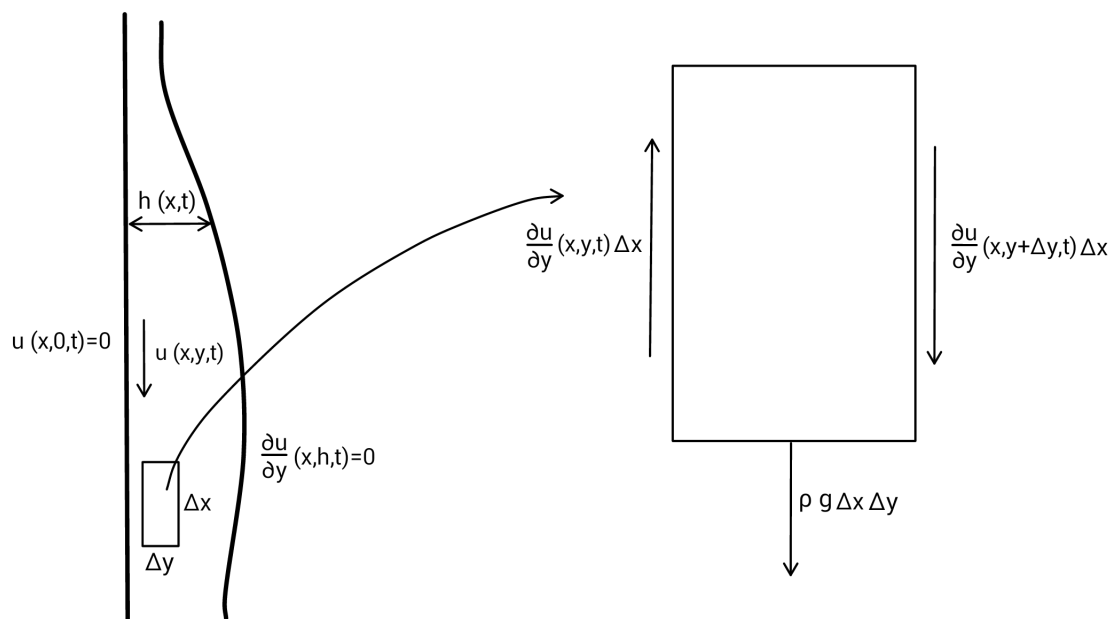
a w jednym wymiarze

$$u_t + cu_x = f(x, t, u). \quad (2.14)$$

Niedługo nauczymy się rozwiązywać powyższe równania.

### Przykład. (Farba)

Wiele sytuacji związanych z zagadaniami przemysłowymi może być zamodelowana przez równania pierwszego rzędu. Rozważmy warstwę farby, która spływa po ścianie. W przemyśle bardzo ważne jest, żeby farba pokrywała powierzchnie w sposób równomierny, bez żadnych niejednorodności. Ważne jest zatem odpowiednie dobranie lepkości oraz ciśnienia tak, żeby zapewnić jak najlepszą jakość pokrycia.



Rysunek 3: Przekrój przez warstwę farby.

Niech teraz  $u = u(x, y, t)$  jest prędkością warstwy farby w kierunku  $x$ -owym skierowanym pionowo w dół a  $h = h(x, t)$  jest jej grubością (patrz Rys. 3). Cały przepływ rządzony jest przez bilans grawitacji oraz sił lepkościowych. Eksperyment pokazuje, że dla większości spotykanych substancji siły lepkościowe są proporcjonalne do gradientu prędkości płynu, w naszym przypadku

$$\text{Siła lepkościowa działająca na jednostkę długości} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (2.15)$$

gdzie współczynnik  $\mu$  zwany jest *lepkością* płynu. Wybierzmy teraz małą prostokąt farby o bokach  $\Delta x$  i  $\Delta y$  (Rys. 3). Wypadkowa siła lepkościowa działa w kierunku pionowym i jej wartość

wynosi

$$\begin{aligned} \text{Wypadkowa siła lepkościowa działająca na elementarny prostokąt} = \\ \Delta x \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, t) - \mu \frac{\partial u}{\partial y}(x, y + \Delta y, t) \right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Powyższa siła musi być równa sile grawitacji działającej na elementarny prostokącik, to jest

$$\mu \Delta x \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, t) - \mu \frac{\partial u}{\partial y}(x, y + \Delta y, t) \right) = \rho g \Delta x \Delta y, \quad (2.17)$$

gdzie  $\rho$  jest gęstością farby. Dzielimy teraz przez  $\Delta x$  i przechodząc do granicy  $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$  dostajemy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y, t) = -\alpha, \quad (2.18)$$

gdzie  $\alpha := \rho g / \mu$  jest stałą. Powyższe równanie można od razu scałkować otrzymując

$$u(x, y, t) = -\frac{1}{2} \alpha y^2 + A(x, t)y + B(x, t), \quad (2.19)$$

gdzie  $A = A(x, t)$  oraz  $B(x, t)$  są nieznanymi funkcjami, które wyznaczymy z warunków brzegowych

$$u(x, 0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, h, t) = 0. \quad (2.20)$$

Pierwszy warunek mówi, że farba przylega do ściany a drugi oznacza znikanie sił lepkościowych na powierzchni farby<sup>2</sup>. Ostatecznie otrzymujemy

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2} \alpha y (2h(x, t) - y). \quad (2.21)$$

Jest to *paraboliczny* profil prędkości farby.

Aby otrzymać równanie opisujące dynamikę płynu musimy odwołać się do prawa zachowania. W naszym przypadku to masa farby jest zachowana, czyli analogicznie do (2.4) mamy

$$\frac{d}{dt} \int_0^h \rho dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \rho u(x, y, t) dy = 0. \quad (2.22)$$

Postać drugiej całki wynika z definicji strumienia oraz z tego, co powiedzieliśmy przy wyprowadzaniu równania konwekcji (2.12). Podstawiając (2.21) do powyższego równania dostajemy

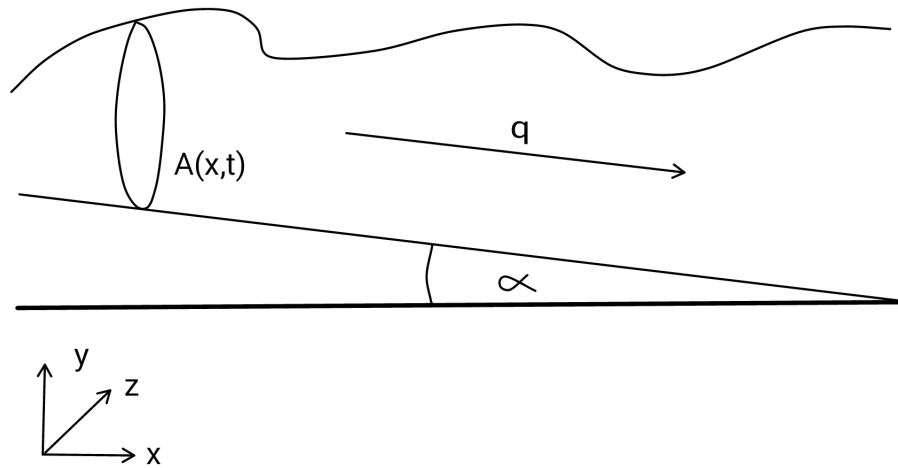
$$0 = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{2} \alpha \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h y(2h(x, t) - y) dy = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{2} \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{2}{3} h^3 \right). \quad (2.23)$$

Zatem ostatecznie otrzymujemy równanie cząstkowe pierwszego rzędu

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \alpha h^2 \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \quad (2.24)$$

**Przykład.** (*Przepływ rzeki*) Patrząc w dużych skalach przestrzennych, ruch wody w rzece jest niemal jednowymiarowy przebiegający dzięki sile grawitacji. Przepływ ten jest jednak bardzo turbulentny co wymusza od nas przyjęcie pewnych uśrednionych modeli. Mimo wielu uproszczeń, są one nadzwyczaj dokładne - zwłaszcza w opisywaniu fal powodziowych.

<sup>2</sup>Gdyby tak nie było to ...



Rysunek 4: Przekrój przez koryto rzeki.

Wyobraźmy sobie koryto rzeki o polu przekroju  $A = A(x, t)$  i kącie nachylenia  $\alpha$  (Rys. 4). Niech woda płynie w kierunku  $x$ -owym. Ponieważ ilość wody jest zachowana to

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \rho A(x, t) dx + \rho(q(b, t) - q(a, t)) = 0, \quad (2.25)$$

gdzie  $[a, b]$  jest dowolnym przedziałem wzdłuż kierunku przepływu a  $q = q(x, t)$  strumieniem przepływu na jednostkę masy. Wchodząc z pochodną pod całkę, zapisując strumień jako całkę z pochodnej dostajemy prawo zachowania

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \quad (2.26)$$

Obserwacje poziomu wody w różnych korytach pozwalają zaproponować empiryczną zależność między strumieniem a przekrojem rzeki  $q = q(A, t)$ . Jeden z najprostszych modeli powstaje jeśli założymy, że przepływ wody jest spowodowany bilansem grawitacji oraz siły tarcia działającej na dnie koryta. Podobnie jak w równaniu konwekcji możemy pokazać, że średnia prędkość przepływu wynosi

$$v = \frac{q}{A}. \quad (2.27)$$

Siła tarcia na jednostkę długości, natomiast, jest proporcjonalna do kwadratu prędkości<sup>3</sup>, to jest  $F_t = cv^2$ . Z bilansu sił dostajemy zatem

$$cv^2 = \rho g A \sin \alpha. \quad (2.28)$$

Dzięki temu możemy znaleźć strumień

$$q = vA = A \sqrt{\frac{\rho g}{c} A \sin \alpha} = CA^{\frac{3}{2}}. \quad (2.29)$$

Jest to tak zwane *Prawo Chezy'ego*. Podstawiając postać strumienia do równania ciągłości otrzymujemy

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{3}{2} C \sqrt{A} \frac{\partial A}{\partial x} = 0. \quad (2.30)$$

<sup>3</sup>Dokładnie jak we wzorze na opór powietrza.

Z trochę bardziej zaawansowanych możemy otrzymać ogólny model (*Prawo Manninga*)

$$\frac{\partial A}{\partial t} + CA^n \frac{\partial A}{\partial x} = 0, \quad (2.31)$$

dla pewnych stałych  $C$  i  $n$ .

**Przykład.** (*Model demograficzny ze strukturą wieku*) Demografia ma na celu wyznaczenie praw ewolucji populacji ludzkiej wraz z rozkładem wieku poszczególnych jednostek. Niech  $u = u(a, t)$  będzie rozkładem ilości kobiet w wieku  $a$  oraz czasie  $t$  (to znaczy  $u(a, t)\Delta a$  jest przybliżoną ilością kobiet w wieku od  $a$  do  $a + \Delta a$ ). Całkowita ilość kobiet wynosi

$$N(t) = \int_0^{\infty} u(a, t) da. \quad (2.32)$$

(Dlaczego możemy wziąć całkę do nieskończoności?) Naszym celem jest napisanie równania mówiącego jak  $N$  zmienia się w czasie pod wpływem urodzin i śmierci. Niech  $\Delta a > 0$ . Z dokładnością do wyrazów pierwszego rzędu w  $\Delta a$  możemy napisać prawo zachowania

$$\frac{\partial}{\partial t} (u(a, t)\Delta a) = u(a, t) - u(a + \Delta a, t) - m(a)u(a, t)\Delta a. \quad (2.33)$$

Począwszy od lewej do prawej kolejne wyrazy opisują: zmianę w czasie całkowitej ilości kobiet w wieku od  $a$  do  $a + \Delta a$ , zmianę spowodowaną starzeniem się, śmiertelność. Funkcja  $m = m(a)$  jest względną gęstością umieralności, to znaczy  $m(a)u(a, t)\Delta a$  oznacza ilość kobiet w wieku od  $a$  do  $a + \Delta a$ , które umierają. Dzieliąc przez  $\Delta a$  oraz przechodząc do granicy otrzymujemy

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial a} = -m(a)u. \quad (2.34)$$

Jest to tzw. *model McKendricka-von Foerстера*. Jako warunek początkowy weźmy początkowy rozkład

$$u(a, 0) = f(a). \quad (2.35)$$

Musimy teraz wziąć pod uwagę urodzenia. Niech  $b = b(a, t)$  będzie względnym rozkładem urodzonych dzieci przez kobiety w wieku  $a$  oraz w czasie  $t$ . Wtedy całkowita ilość nowonarodzonych wynosi

$$B(t) = \int_0^{\infty} b(a, t)u(a, t) da. \quad (2.36)$$

Zauważmy, że  $u(0, t) = B(t)$  zatem urodzenia wchodzi do modelu jako warunek brzegowy.

**Przykład.** (*Chemioterapia*) Ten model pochodzi od Bischoffa i opisuje rozwój komórek rakowych białaczki. Niech  $0 \leq x \leq 1$  będzie fizjologiczną zmienną opisującą stan komórki rakowej: 0 dla nowo powstałej oraz 1 dla dojrzałej, gotowej do podziału. Niech komórki dojrzewają w stałym tempie, czyli  $\frac{dx}{dt} = v = \text{const}$ . Ponadto, przez  $u = u(x, t)$  oznaczmy gęstość ilości komórek rakowych o stopniu dojrzałości  $x$  w czasie  $t$ . Jeśli  $c = c(t)$  jest stężeniem leku chemioterapeutycznego to sensownym modelem śmiertelności komórek rakowych jest

$$m(t) = \frac{\alpha c(t)}{\beta + c(t)}, \quad (2.37)$$

gdzie  $\alpha$  oraz  $\beta$  są współczynnikami. Widzimy, że śmiertelność wynosi zero kiedy lek nie został podany i nasyca się do poziomu  $\alpha$  gdy podano go bardzo dużo. Jest to tak zwany model *Michaelisa-Mentena*. Podobnie jak wyżej możemy pokazać, że

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = -m(t)u, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (2.38)$$



wraz warunkami

$$u(x, 0) = u_0, \quad u(0, t) = 2u(1, t). \quad (2.39)$$

Zauważmy, że warunek brzegowy oznacza podział dojrzałej komórki rakowej w dwie młode.

**Przykład.** (*Ruch uliczny*) W dosyć łatwy sposób możemy również opisać podstawową dynamikę ruchu ulicznego. Jeśli  $u = u(x, t)$  jest ilością samochodów na jednostkę długości szosy. Jeśli ruch odbywa się w jednym kierunku to liczba samochodów jest zachowana zgodnie z równaniem

$$u_t + q(u)_x = f(x, t, u), \quad (2.40)$$

gdzie  $q$  jest strumieniem, a  $f$  jest funkcją źródłową (wjazdy i wyjazdy z autostrady). Gdy na drodze jest mało samochodów, strumień powinien również być mały. W drugą stronę: gdy samochodów jest dużo, ruch jest utrudniony i powstaje korek. W tej sytuacji strumień też pozostaje mały. Funkcja strumienia powinna być zatem zdefiniowana na przedziale  $[0, u_c]$ , gdzie  $u_c$  jest krytyczną wartością gęstości samochodów, dla której następuje całkowite zakorkowanie przejazdu. Mamy  $q(0) = q(u_c) = 0$ . Najprostszym modelem takiej sytuacji jest parabola  $q(u) = Mu(u_c - u)$ . Greenberg podał, że dla danych z Nowego Jorku pasuje  $q(u) = au \ln \frac{u_c}{u}$ . Dla modelu parabolicznego równanie przyjmuje postać

$$u_t + M(u_c - 2u)u_x = f(x, t, u). \quad (2.41)$$

Okazuje się, że można otrzymać bardzo wiele ciekawych rezultatów bazując jedynie na jakościowych cechach  $q$ .

## 2.1 Metoda charakterystyk

Okazuje się, że istnieje bardzo efektywna i geometryczna metoda znajdowania rozwiązań równań cząstkowych pierwszego rzędu. Aby ją wyprowadzić wybierzmy klasę równań, którą będziemy badać. Od tej pory interesować nas będą równania w jednym wymiarze przestrzennym.

Wróćmy do prawa zachowania (2.7). Załóżmy, że strumień jest funkcją czasu, przestrzeni oraz samej zmiennej zależnej (np. koncentracji substancji). Mamy zatem  $q = q(x, t, u)$  co po obliczeniu pochodnej daje

$$u_t + q_u(x, t, u)u_x = f(x, t, u) - q_x(x, t, u). \quad (2.42)$$

Motywuje nas to do zaproponowania następującej definicji.

**Definicja 1.** *Równaniem quasiliniowym nazywamy równanie różniczkowe cząstkowe pierwszego rzędu postaci*

$$u_t + c(x, t, u)u_x = g(x, t, u), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.43)$$

gdzie  $c$  (prędkość propagacji) oraz  $f$  są pewnymi funkcjami.

Gdy  $c = c(x, t)$  to równanie jest semiliniowe a jeśli ponadto  $g = g(x, t)$  to równanie nazywamy liniowym.

Powyższe równanie nazywane jest często *równaniem fali kinematycznej*. Podobnie jak równaniach zwyczajnych równanie (2.43) musimy zaopatrzyć w warunek początkowy (choć, jak zobaczymy mamy też inne możliwości)

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.44)$$

gdzie  $\phi$  jest pewną funkcją opisującą początkowy rozkład wielkości  $u$ . Zauważmy ogromną różnicę między równaniami zwyczajnymi i cząstkowymi - tutaj warunkiem początkowym jest *funkcja* a nie liczba. Zwróćmy również uwagę, że nieliniowość w równaniu (2.43) może występować jedynie w szukanej funkcji  $u$  a nie jej pochodnych.

Żeby wyprowadzić metodę charakterystyk zauważmy, że lewa strona równania (2.43) przypomina pochodną funkcji złożonej. Można to zauważyć definiując funkcję  $U(t) := u(X(t), t)$ , gdzie  $x = X(t)$  jest, na razie nieznaną, krzywą na płaszczyźnie  $x - t$  (tzw. *czasoprzestrzeń*). Mamy wtedy

$$\frac{dU}{dt} = u_t + \frac{dx}{dt} u_x. \quad (2.45)$$

Podobieństwo do (2.43) będzie całkowite jeśli zażądamy aby

$$\frac{dX}{dt} = c(X, t, U). \quad (2.46)$$

Wtedy równanie (2.43) przyjmie postać

$$\frac{dU}{dt} = g(X, t, U), \quad (2.47)$$

Równania (2.46)-(2.47) są układem nieliniowych równań różniczkowych *zwyčajnych*. Zamieniliśmy zatem równanie różniczkowe cząstkowe na zwyčajne, które może wciąż być bardzo trudne do analizy. Na szczęście równania spotykane w zastosowaniach mają często bardziej specyficzną postać. Powyższy układ równań należy zaopatrzyć w warunki początkowe, które zwykle mają postać

$$X(0) = \xi, \quad U(0) = u(X(0), 0) = u(\xi, 0) = \phi(\xi), \quad (2.48)$$

gdzie skorzystaliśmy z (2.44). Liczba  $\xi$  jest parametrem mówiącym na jakiej krzywej  $x = X(t, \xi)$  się znajdujemy (z jakiego punktu startuje ona z osi  $t = 0$ ). Zatem w ogólności, jako rozwiązanie naszego układu równań otrzymamy dwie rodziny krzywych  $U = U(t, \xi)$  oraz  $x = X(t, \xi)$ . Z teorii równań różniczkowych zwyčajnych wiemy, że przy odpowiednich założeniach na  $c$  i  $g$  (np. gdy są klasy  $C^1$ ) układ (2.46)-(2.47) ma dokładnie jedno rozwiązanie lokalnie w okolicach  $t = 0$ . Ponadto, rozwiązanie to zależy gładko od  $\xi$  oraz  $X_\xi(0, t) \neq 0$ . Z twierdzenia o funkcji uwikłanej wynika, że jesteśmy w stanie znaleźć funkcję  $\xi = \xi(x, t)$ , co daje nam  $U(t, \xi(x, t)) = u(x, t)$ , czyli otrzymujemy nasze rozwiązanie. W praktyce jednak nie będziemy w stanie zawsze *explicitie* wyrugować parametru  $\xi$  z równań i rozwiązanie podane będzie w postaci parametrycznej.

**Definicja 2.** Rodzinę krzywych  $x = X(t, \xi)$  będących rozwiązaniami równania (2.46) z warunkiem początkowym  $X(0) = \xi$  nazywamy charakterystykami równania (2.43).

Metoda charakterystyk ma bardzo miłą interpretację geometryczną, którą poznamy rozważając różne przypadki szczególne.

## 2.2 Równania semiliniowe

Niech na początek  $g \equiv 0$ , czyli równanie (2.43) przyjmuje postać

$$\begin{cases} u_t + c(x, t)u_x = 0, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.49)$$

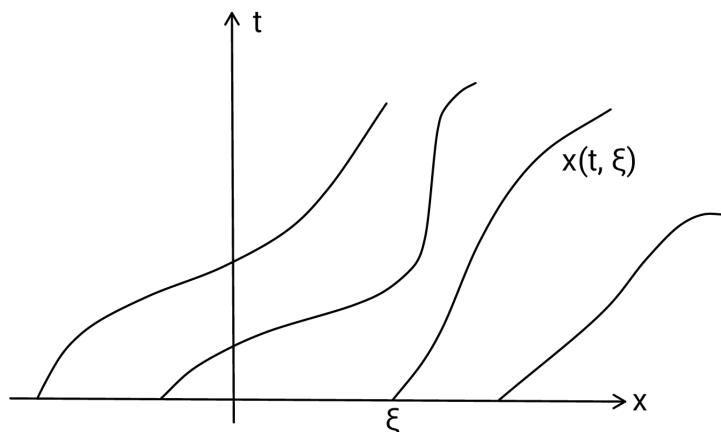
Równanie (2.47) upraszcza się do  $\frac{dU}{dt} = 0$ , czyli  $U$  jest funkcją stałą

$$U(t) = U(0) = u(X(0), 0) = u(\xi, 0) = \phi(\xi). \quad (2.50)$$

Przypomnijmy sobie, że z definicji funkcja  $U$  jest równa  $u$  na ustalonej charakterystyce. Z powyższego równania wynika, że w przypadku  $g \equiv 0$  szukana funkcja  $u$  jest *stała na charakterystykach*!<sup>4</sup> Aby znaleźć wartość  $u$  w dowolnym punkcie  $(x_0, t_0)$  należy zatem z

$$\frac{dX}{dt} = c(X, t), \quad X(0) = \xi, \quad (2.51)$$

<sup>4</sup>Na każdej z osobna.



Rysunek 5: Przykładowe charakterystyki.

znaleźć charakterystykę  $x = X(t, \xi)$  przechodzącą przez  $(x_0, t_0)$  a następnie „cofnąć” się do  $t = 0$  znajdując tym samym  $\xi(x_0, t_0)$ . Ponieważ  $u$  jest stałe na charakterystyce to  $u(x_0, t_0) = u(\xi(x_0, t_0), 0) = \phi(\xi(x_0, t_0))$ . Rysunek 5 przedstawia całą sytuację graficznie.

**Przykład.** Dla konwekcji ze stałą prędkością propagacji mamy

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.52)$$

Równanie charakterystyki  $\frac{dx}{dt} = c$  możemy od razu rozwiązać dostając  $X(t, \xi) = ct + \xi$ , skąd  $\xi(x, t) = x - ct$ . Są to linie proste nachylone do osi  $Ox$  pod kątem  $\arctan \frac{1}{c}$  (Rys. 6). Ponieważ funkcja  $u$  jest stała na charakterystykach, to

$$u(x, t) = u(\xi(x, t), 0) = \phi(\xi(x, t)) = \phi(x - ct). \quad (2.53)$$

Sprawdźmy czy  $\phi(x - ct)$  rzeczywiście jest rozwiązaniem

$$u_t + cu_x = \frac{\partial}{\partial t} \phi(x - ct) + c \frac{\partial}{\partial x} \phi(x - ct) = -c\phi'(x - ct) + c\phi'(x - ct) = 0, \quad (2.54)$$

więc wszystko się zgadza.

Jeśli natomiast  $g = g(x, t, u)$  to układ równań (2.46)-(2.47) ma postać

$$\frac{dx}{dt} = c(x, t), \quad \frac{dU}{dt} = g(x, t, U). \quad (2.55)$$

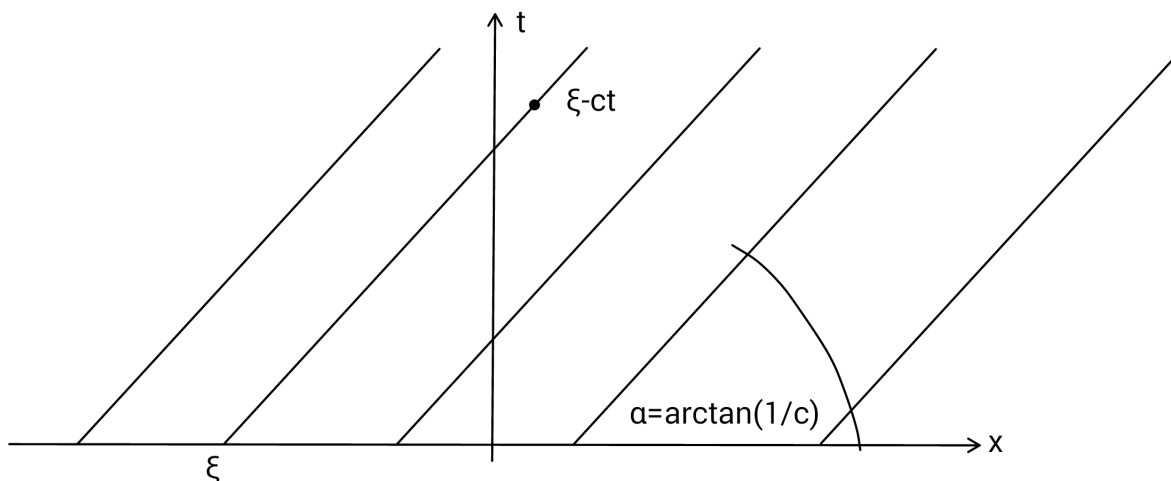
Charakterystyki wciąż dane są tym samym równaniem  $dX/dt = c(X, t)$ . Możemy zatem znaleźć je dokładnie tak jak poprzednio. Następnie z równania  $dU/dt = g(X, t, U)$  dostajemy  $U$ . Tym razem  $u$  niekoniecznie będzie stałe na charakterystykach lecz będzie zachowywało się w określony sposób.

**Przykład.** Wróćmy do równania konwekcji ale tym razem dołączmy człon, który odpowiada za generowanie substancji

$$\begin{cases} u_t + cu_x = -ku, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.56)$$

gdzie  $k > 0$  jest stałą. Charakterystyki są wciąż liniami prostymi  $X(t) = ct - \xi$ . Znajdując punkt początkowy dostajemy  $\xi = x - ct$ . Równanie na  $U$  ma postać

$$\frac{dU}{dt} = -kU, \quad U(t) = U(0)e^{-kt} = \phi(\xi)e^{-kt}. \quad (2.57)$$



Rysunek 6: Charakterystyki dla konwekcji ze stałą prędkością.

Podstawiając postać  $\xi$  otrzymujemy  $u(x, t) = \phi(x - ct)e^{-kt}$ .

Dwa powyższe przykłady pokazują, że rozwiązaniem równania konwekcji ze stałą prędkością jest fala poruszająca się w lewo. Innymi słowami, funkcja zmiennej  $x - ct$  (patrz Rys. 6). Zgadza się to z naszą intuicją dotyczącą zjawiska konwekcji - początkowy rozkład substancji  $\phi$  jest unoszony z prędkością  $c$ . Mówiąc jeszcze inaczej, *warunek początkowy porusza się po charakterystykach*. W przypadku zmiennej prędkości  $c = c(x, t)$  sytuacja będzie inna jedynie w tym, że charakterystyki nie będą liniami prostymi.

### 2.3 Nieliniowa prędkość propagacji

Będziemy badać następujące zagadnienie związane z propagacją fali

$$\begin{cases} u_t + c(u)u_x = 0, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.58)$$

W tym równaniu prędkość propagacji jest zależna od *wartości*  $u$ . Jeśli powrócimy do przykładu z prawem zachowania dla strumienia zależnego tylko od  $u$  to  $c(u)u_x = (q(u))_x$ , czyli  $c(u) = q_x(u)$ . Prędkość propagacji jest więc pochodną strumienia po przestrzeni. Zobaczymy później, że niesie to ze sobą bardzo ważne implikacje. Okazuje się, że to quasi-liniowe zagadnienie można dosyć łatwo rozwiązać metodą charakterystyk. Najpierw zobaczymy, że  $dU/dt = 0$  jeśli

$$\frac{dX}{dt} = c(U(t)), \quad x(0) = \xi. \quad (2.59)$$

Czyli funkcja  $U$  jest stała na charakterystykach określonych powyższym równaniem. Pociąga to za sobą, że  $U(t) = U(0) = u(X(0), 0) = u(\xi, 0) = \phi(\xi)$  na  $\xi$ -charakterystyce co implikuje, że na tej krzywej  $c(U(t)) = c(\phi(\xi))$ . Zatem charakterystyka określona jest równaniem

$$\frac{dX}{dt} = c(\phi(\xi)), \quad X(0) = \xi, \quad (2.60)$$

które możemy od razu rozwiązać

$$X(t) = c(\phi(\xi))t + \xi, \quad (2.61)$$

zatem charakterystyki są *liniami prostymi o zmiennej prędkości*  $c(\phi(\xi))$ ! Zagadnienie Riemanna (2.58) ma więc rozwiązanie dane w postaci parametrycznej

$$u(X(t, \xi), t) = \phi(\xi), \quad X(t) = c(\phi(\xi))t + \xi, \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (2.62)$$

Jeśli z równania (2.61) uda nam się wyrugować parametr  $\xi$ , to znaczy otrzymać funkcję  $\xi(x, t)$  to podstawiając ją do powyższego równania otrzymamy jawną postać rozwiązania.

**Przykład.** Bardzo ważnym przykładem zagadnienia Riemanna jest tak zwane *nielepkie równanie Burgersa*

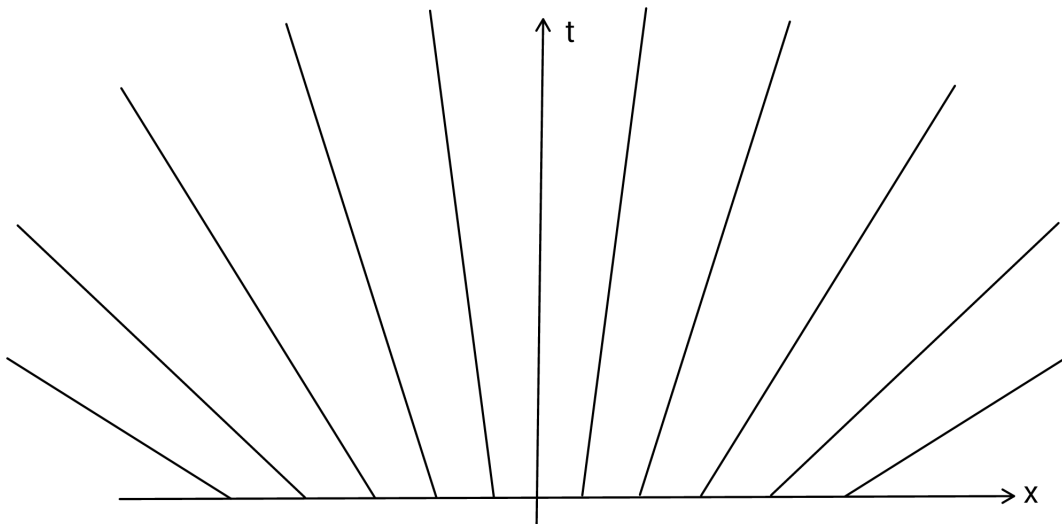
$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = x, & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.63)$$

gdzie za warunek początkowy wzięliśmy funkcję liniową. Charakterystyki to linie proste (Rys. 7)

$$X(t, \xi) = \xi t + \xi = \xi(1 + t) \quad \rightarrow \quad \xi = \frac{x}{1 + t}. \quad (2.64)$$

Zatem rozwiązanie jest stałe na charakterystykach, czyli

$$u(x, t) = u(X(t, \xi), t) = u(\xi, 0) = \phi(\xi) = \phi\left(\frac{x}{1 + t}\right) = \frac{x}{1 + t}. \quad (2.65)$$



Rysunek 7: Charakterystyki dla zagadnienia Riemanna z  $c(u) = u$  oraz  $\phi(x) = x$ .

Dla pewności sprawdźmy, czy (2.62) rzeczywiście definiuje rozwiązanie zagadnienia (2.58). Obliczmy najpierw pochodne z  $u$

$$u_t = \phi'(\xi)\xi_t, \quad u_x = \phi'(\xi)\xi_x. \quad (2.66)$$

Potrzebne pochodne  $\xi$  obliczamy z drugiego równania (2.62), to znaczy  $\xi = \xi(x, t)$  co daje

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [c(\phi(\xi))t + \xi] \rightarrow \xi_t = -\frac{c(\phi(\xi))}{1 + c'(\phi(\xi))\phi'(\xi)t}, \quad (2.67)$$

oraz podobnie

$$\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [c(\phi(\xi))t + \xi] \rightarrow \xi_x = \frac{1}{1 + c'(\phi(\xi))\phi'(\xi)t}. \quad (2.68)$$

Otrzymujemy zatem

$$u_t = -\frac{c(\phi(\xi))\phi'(\xi)}{1 + c'(\phi(\xi))\phi'(\xi)t}, \quad u_x = \frac{\phi'(\xi)}{1 + c'(\phi(\xi))\phi'(\xi)t}, \quad (2.69)$$

skąd wynika, że  $u_t + c(u)u_x = 0$ . Jasne jest, że aby rozwiązanie istniało musimy założyć dodatniość mianownika w (2.69). Jeśli  $t > 0$  to iloczyn pochodnych funkcji  $c$  i  $\phi$  musi być dodatni, żeby mianownik zawsze pozostał większy od zera. Udowodniliśmy zatem twierdzenie. W dalszej części wykładu zobaczymy jakie konsekwencje niesie ze sobą niespełnianie tego założenia.

**Twierdzenie 1.** Niech funkcje  $c = c(u)$  oraz  $\phi = \phi(x)$  będą klasy  $C^1(\mathbb{R})$ . Ponadto niech obie będą jednocześnie niemalejące albo nierosnące. Wtedy zagadnienie (2.58) ma jednoznacznie wyznaczone rozwiązanie dane wzorem parametrycznym (2.62).

## 2.4 Całki pierwsze

W niektórych sytuacjach potrzebujemy znaleźć jedynie rozwiązanie równania różniczkowego nie bacząc na zadane warunki początkowe lub brzegowe. Rozwiązanie takie będzie wtedy zależne od dowolnej funkcji.

**Definicja 3.** Funkcję  $F = F(x, t, u)$  nazywamy całką pierwszą układu równań (2.46)-(2.47) jeśli jest stała na rozwiązaniach tego układu.

Założmy teraz, że  $F_u \neq 0$  to z twierdzenia o funkcji uwikłanej istnieje takie  $u = u(x, t)$ , że  $F(x, t, u(x, t)) = k$  dla stałej  $k$  oraz  $(x, t) \in D$  dla pewnego podzbioru płaszczyzny  $x - t$ . Zauważmy, że  $u = u(x, t)$  definiuje nam powierzchnię w przestrzeni  $x - t - u$ . Pokażemy, że tak zdefiniowane  $u$  spełnia równanie różniczkowe (2.43). W tym celu obliczmy obustronnie pochodne cząstkowe z  $F(x, t, u(x, t)) = k$ . Niech  $(x, t) \in D$ , wtedy

$$F_x + F_u u_x = 0, \quad F_t + F_u u_t = 0, \quad (2.70)$$

skąd

$$u_t = -\frac{F_t}{F_u}, \quad u_x = -\frac{F_x}{F_u}. \quad (2.71)$$

Z założenia mianowniki w powyższych wzorach są różne od zera, więc pochodne są dobrze zdefiniowane na  $D$ .

Weźmy teraz rozwiązanie  $x = X(t)$ ,  $u = U(t)$  układu charakterystycznego (2.46)-(2.47). Wtedy oczywiście  $F(X(t), t, U(t)) = k$  dla  $t$  w pewnym przedziale. Licząc pochodną względem  $t$  i korzystając z (2.43) otrzymujemy

$$F_x c + F_t + F_u g = 0, \quad (2.72)$$

gdzie całe wyrażenie jest obliczone na krzywej  $(X(t), t, U(t))$ . Stąd od razu otrzymujemy

$$F_u = -\frac{1}{g} (F_x c + F_t) \quad \text{na} \quad (X(t), t, U(t)). \quad (2.73)$$

Niech teraz  $(x, t)$  będzie dowolnym punktem  $D$ . Z definicji całki pierwszej  $F$  mamy, że  $x = X(t)$  oraz  $u(x, t) = U(t)$ . Łącząc (2.71) z (2.73) otrzymujemy

$$\begin{aligned} u_t + c(x, t, u)u_x &= -\frac{F_t}{F_u} - c(x, t, u)\frac{F_x}{F_u} \\ &= g(x, t, u) \left( \frac{F_t}{F_x c(x, t, u) + F_t} + c(x, t, u)\frac{F_x}{F_x c(x, t, u) + F_t} \right) = g(x, t, u), \end{aligned} \quad (2.74)$$

co należało pokazać. Czasem potrafimy znaleźć dwie całki pierwsze układu charakterystycznego. Pozwala nam to wtedy zdefiniować rozwiązanie ogólne równania quasi-liniowego.

**Definicja 4.** Niech  $\Psi = \Psi(\xi, \eta)$  będzie dowolną funkcją klasy  $C^1$  a  $F$  i  $G$  będą całkami pierwszymi układu (2.46)-(2.47). Rozwiązaniem ogólnym równania (2.43) nazywamy wyrażenie

$$\Psi(F(x, t, u), G(x, t, u)) = 0. \quad (2.75)$$

Pokazanie, że powyższa definicja ma sens, czyli  $u = u(x, t)$  zdefiniowane przez  $\Psi$  jest rzeczywiście rozwiązaniem (2.43) pozostawiamy na ćwiczenia. Powyższe równanie możemy również zapisać w postaci

$$F(x, t, u) = \Phi(G(x, t, u)), \quad (2.76)$$

dla pewnej funkcji  $\Phi$ . Czasem pozwala nam to znaleźć jawną postać rozwiązania. Rozwiązania ogólne są alternatywą dla rozwiązań danych w formie parametrycznej i przydają się wtedy, kiedy nie znamy lub nie chcemy znać warunku początkowego.

**Przykład.** Znajdźmy rozwiązanie ogólne równania

$$u_t + 2tu_x = \frac{x}{u+1}. \quad (2.77)$$

Układ charakterystyczny ma postać

$$\frac{dx}{dt} = 2t, \quad \frac{dU}{dt} = \frac{x}{U+1}, \quad (2.78)$$

skąd z pierwszego równania jak zwykle mamy  $\xi = t^2 - x$ . Ale  $\xi$  jest stałą całkowania, dlatego całka pierwsza ma postać  $F(x, t, u) = t^2 - x$ . Kolejną całkę znajdziemy z drugiego równania

$$\frac{dU}{dt} = \frac{t^2 - \xi}{U+1} \rightarrow \int (U+1)dU = \int (t^2 - \xi)dt. \quad (2.79)$$

Dostajemy  $\frac{1}{2}U^2 + U = \frac{1}{3}t^3 - \xi t + \zeta$ . Ale  $\xi = t^2 - x$ , więc kolejna całka pierwsza ma postać  $G(x, t, u) = \frac{1}{2}u^2 + u + \frac{2}{3}t^3 - xt$  a rozwiązanie ogólne może być zapisane w postaci

$$\Psi\left(t^2 - x, \frac{1}{2}u^2 + 2u + \frac{2}{3}t^3 - xt\right) = 0. \quad (2.80)$$

Możemy również napisać

$$u^2 + 2u + \frac{2}{3}t^3 - xt = \Phi(t^2 - x), \quad (2.81)$$

co jest równaniem kwadratowym na  $u$ . Z łatwością możemy je rozwiązać otrzymując jawną postać rozwiązania naszego równania.

## 2.5 Ogólna postać równań rzędu pierwszego

Wyjątkową cechą równań cząstkowych pierwszego rzędu jest to, że w bardzo dużej ogólności jesteśmy w stanie zredukować ich rozwiązywanie do badania układów równań zwyczajnych. Wdzieliśmy to już w przypadku równań quasi-liniowych. Okazuje się, że podobny wynik możemy otrzymać dla równań w pełni nieliniowych.

**Przykład.** (Równanie eikonału) Fundamentalnym równaniem optyki geometrycznej jest tak zwane równanie eikonału<sup>5</sup>, które powstaje przez zastosowanie rachunku zaburzeń do rozwiązania równania falowego reprezentującego promieniowanie elektromagnetyczne.

<sup>5</sup>Z Greckiego εικων oznacza „obraz” lub „ikona”.

Rozprzestrzenianie się promieniowania elektromagnetycznego opisują wektorowe równania Maxwella. Dla uproszczenia (i tak naprawdę bez utraty ogólności metody) zajmijmy się skalar-nym równaniem opisującym potencjał elektryczny  $\varphi$  na płaszczyźnie (wersja trójwymiarowa jest dokładnie analogiczna)

$$\varphi_{tt} = c^2 (\varphi_{xx} + \varphi_{yy}). \quad (2.82)$$

Tutaj  $c$  jest prędkością światła. W jednorodnych ośrodkach prędkość światła jest stała i powyższe równanie ma rozwiązanie będące *falą płaską*<sup>6</sup>

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = A e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad (2.83)$$

gdzie  $\mathbf{k} = (k, l)$  jest wektorem falowym,  $\omega$  to częstość kołowa a  $A$  jest (zespoloną) amplitudą. Dla rozwiązania równania falowego konieczne musimy mieć następującą *zależność dyspersyjna*

$$\omega^2 = c^2(k^2 + l^2). \quad (2.84)$$

Dla fal jednowymiarowych mamy  $k = 2\pi/\lambda$ , gdzie  $\lambda$  jest długością fali. Oznacza to, że liczba falowa mówi nam ile fal mieści się w jednostce przestrzeni (analogicznie  $\omega$  mówi nam ile fal mieści się w jednostce czasu). Mamy wtedy znaną zależność  $\omega = ck = 2\pi c/\lambda = 2\pi/T$ , gdzie  $T$  jest okresem fali.

Wiele ośrodków nie jest jednak jednorodnych i konieczne jest założenie, że prędkość światła jest zmienna. Inaczej mówiąc, współczynnik załamania  $n := c_0/c$  jest funkcją zmiennej  $\mathbf{x}$  (tutaj  $c_0$  jest prędkością światła w próżni). W optyce zakładamy, że fala ma odpowiednio dużą częstość a jednocześnie dużą liczbę falową (na przykład dla światła żółtego mamy  $\lambda \approx 6 \times 10^{-9}\text{m}$  co daje  $k \approx 10^9\text{m}^{-1}$ ). Zatem przy założeniu  $c = c(\mathbf{x})$  możemy szukać rozwiązań równania falowego, które mają postać

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = A(\mathbf{x}) e^{i(k_0 u(\mathbf{x}, t) - \omega_0 t)}. \quad (2.85)$$

Tutaj  $k_0 = \omega_0/c_0$ , czyli zależność dyspersyjna dla próżni jest spełniona. Funkcja  $u = u(\mathbf{x}, t)$  nazywana jest *fazą* i jej poziomice oznaczają czoło fali. Założenie optyki geometrycznej polega na wykorzystaniu tego, że  $k_0$  jest bardzo duże. Dokładniej, amplituda fali  $A$  zmienia się w przestrzeni dużo wolniej niż sama fala. Zakładamy zatem, że

$$\left| \frac{1}{k_0} \frac{A_{xx} + A_{yy}}{A} \right| \ll 1, \quad (2.86)$$

gdzie człon z drugimi pochodnymi odpowiada za krzywiznę amplitudy.

Wstawmy zatem naszą spodziewaną postać rozwiązania do równania falowego. Najpierw jednak obliczmy pochodne

$$\begin{aligned} \varphi_{tt} &= -\omega_0^2 A(\mathbf{x}) e^{i(k_0 u(\mathbf{x}, t) - \omega_0 t)}, & \varphi_x &= A_x e^{i(k_0 u(\mathbf{x}, t) - \omega_0 t)} + i A k_0 u_x e^{i(k_0 u(\mathbf{x}, t) - \omega_0 t)} \\ \varphi_{xx} &= [(A_{xx} - k_0^2 A u_x^2) + i(2k_0 u_x A_x + A k_0 u_{xx})] e^{i(k_0 u(\mathbf{x}, t) - \omega_0 t)}. \end{aligned} \quad (2.87)$$

oraz podobnie dla pochodnych względem  $y$ . Wstawiając powyższe obliczenia do równania falowego oraz porównując części rzeczywiste oraz urojone dostajemy

$$-\omega_0^2 A = c^2 (A_{xx} + A_{yy} - A k_0^2 (u_x^2 + u_y^2)), \quad A (u_{xx} + u_{yy}) + 2 (u_x A_x + u_y A_y) = 0. \quad (2.88)$$

Zatem aby  $\varphi$  spełniało równanie falowe muszą zachodzić powyższe dwa równania na  $A$  oraz  $u$ . Jest to układ dwóch nieliniowych równań cząstkowych, który jest bardzo trudny do rozwiązania.

<sup>6</sup>Dla wygody używamy tutaj liczb zespolonych. Ostateczne rozwiązanie jest na przykład częścią rzeczywistą otrzymanej funkcji, czyli  $\varphi(\mathbf{x}, t) = \Re [e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}] = \Re [A] \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) - \Im [A] \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)$ .



Nie skorzystaliśmy jednak jeszcze z przybliżenia optyki geometrycznej, to jest zależności (2.86). Po przekształceniu mamy

$$\frac{A_{xx} + A_{yy}}{A} = k_0^2 [u_x^2 + u_y^2 - n^2]. \quad (2.89)$$

Według (2.86) lewa strona powyższego równania jest dużo mniejsza niż prawa. Musimy zatem mieć

$$u_x^2 + u_y^2 = n^2. \quad (2.90)$$

Jest to słynne równanie eikonału, które nauczymy się niebawem rozwiązywać.

**Przykład.** (*Kształt pryzmy piasku*) Zajmiemy się problemem pryzmy, to znaczy znajdziemy równanie opisujące kształt górki sypkiego materiału (piasku, węgla). Niech  $u = u(x, y)$  opisuje kształt powierzchni pryzmy. Ponieważ postać górki jest wynikiem równowagi sił tarcia oraz grawitacji mamy

$$\rho g \cos \varphi = \mu \rho g, \quad (2.91)$$

gdzie  $\mu$  jest współczynnikiem tarcia a  $\varphi$  jest kątem między płaszczyzną styczną do  $u = u(x, y)$  i pionem. Z geometrii wynika, że

$$\frac{1}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} = \mu, \quad (2.92)$$

czyli

$$u_x^2 + u_y^2 = \frac{1}{\mu^2} - 1, \quad (2.93)$$

co po przeskalowaniu  $u \rightarrow u/\sqrt{\mu^{-2} - 1}$  daje nam *równanie eikonału*

$$u_x^2 + u_y^2 = 1. \quad (2.94)$$

W optyce geometrycznej powyższe równanie opisuje rozchodzenie się fali świetlnej.

Ogólne równanie pierwszego rzędu może być zapisane w postaci

$$F(x, t, u, p, q) = 0, \quad (2.95)$$

gdzie tradycyjnie oznaczyliśmy

$$p := u_x, \quad q := u_t. \quad (2.96)$$

Zadajmy również warunek początkowy  $u(x, 0) = \phi(x)$ . W równaniach quasi-liniowych od razu byliśmy w stanie znaleźć charakterystyki, czyli krzywe na których rozwiązanie zachowuje się w pewien szczególny sposób. Z postaci (2.95) nie jest jasne czy krzywe o podobnej własności istnieją. Poszukajmy ich jednak.

Wyberzmy pewną krzywą na płaszczyźnie  $x - t$  daną równaniem parametrycznym

$$x = X(s), \quad t = T(s). \quad (2.97)$$

Położmy  $U(s) := u(X(s), T(s))$  oraz  $P(s) := u_x(X(s), T(s))$  i  $Q(s) := u_t(X(s), T(s))$  a następnie policzmy pochodną

$$\frac{dU}{ds} = u_x \frac{dX}{ds} + u_t \frac{dT}{ds} = P \frac{dX}{ds} + Q \frac{dT}{ds}. \quad (2.98)$$

Z powyższego równania chcielibyśmy wyrugować pochodne zwyczajne. Żeby to zrobić sprawdzmy jak zachowują się pochodne z  $P$  i  $Q$

$$\frac{dP}{ds} = u_{xx} \frac{dX}{ds} + u_{xt} \frac{dT}{ds}, \quad \frac{dQ}{ds} = u_{tx} \frac{dX}{ds} + u_{tt} \frac{dT}{ds}. \quad (2.99)$$

Pochodne drugiego rzędu najlepiej wyznaczyć z samej postaci równania (2.95) różniczkując je raz po  $x$  i raz po  $t$

$$F_x + F_u P + F_p u_{xx} + F_q u_{xt} = 0, \quad F_t + F_u Q + F_p u_{tx} + F_q u_{tt} = 0. \quad (2.100)$$

Porównując dwa powyższe równania widzimy, że możemy poczynić postępowanie jeśli tylko

$$\frac{dX}{ds} = F_p(X(s), T(s), U(s), P(s), Q(s)), \quad \frac{dT}{ds} = F_q(X(s), T(s), U(s), P(s), Q(s)). \quad (2.101)$$

Wtedy z (2.98)-(2.100) dostajemy

$$\frac{dP}{ds} = -F_x - F_u P, \quad \frac{dQ}{ds} = -F_t - F_u Q, \quad \frac{dU}{ds} = P F_p + Q F_q, \quad (2.102)$$

gdzie wszystkie pochodne z  $F$  są oczywiście obliczone na trajektorii  $(X(s), T(s), U(s), P(s), Q(s))$ . Otrzymaliśmy zatem *pięć* równań na *pięć* niewiadomych. Układ (2.101)-(2.102) jest nazywany *układem charakterystycznym* lub *układem Charpita*.

Pozostało jeszcze zadanie warunku początkowego dla układu Charpita. Standardowo wybierzmy

$$T(0) = 0, \quad X(0) = \xi, \quad U(0) = \phi(\xi). \quad (2.103)$$

Stąd

$$P(0) = \phi'(\xi). \quad (2.104)$$

Warunek dla  $Q$  wymaga chwili zastanowienia. Po pierwsze, oczywiście zachodzi równanie (2.95), więc

$$F(\xi, 0, \phi(\xi), \phi'(\xi), Q(0)) = 0, \quad (2.105)$$

więc jeśli tylko  $F_q \neq 0$  dla  $s = 0$  to z twierdzenia o funkcji uwikłanej możemy rozwiązać powyższe równanie i otrzymać

$$Q(0) = G(\xi), \quad (2.106)$$

dla pewnej funkcji  $G$ . Podsumowując, aby rozwiązać równanie (2.95) z warunkiem początkowym  $u(x, 0) = \phi(x)$  należy rozwiązać układ równań zwyczajnych Charpita (2.101)-(2.102) z warunkami początkowymi (2.103)-(2.104) oraz (2.105). Z teorii równań różniczkowych zwyczajnych wiemy, że rozwiązanie tego zagadnienia istnieje i jest jednoznacznie wyznaczone lokalnie w okolicy  $s = 0$ . Oczywiście, należy się spodziewać, że jawne rozwiązanie możemy otrzymać jedynie w wyjątkowych przypadkach.

**Przykład.** Rozwiążemy zagadnienie

$$\begin{cases} u_t + u_x^2 = 0, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.107)$$

Tutaj  $F(x, t, u, p, q) = q + p^2$ . Warunki początkowe dla układu Charpita mają postać

$$T(0) = 0, \quad X(0) = \xi, \quad U(0) = \xi, \quad P(0) = 1, \quad Q(0) = -1, \quad (2.108)$$

gdzie wartość  $Q$  otrzymaliśmy z równania różniczkowego. Nasze równania to

$$\frac{dX}{ds} = 2P, \quad \frac{dT}{ds} = 1, \quad \frac{dU}{ds} = 2P^2 + Q, \quad \frac{dP}{ds} = 0, \quad \frac{dQ}{ds} = 0. \quad (2.109)$$

Od razu dostajemy  $T(s) = s$  (czyli za parametr możemy przyjąć czas),  $P(t) = 1$  oraz  $Q(t) = -1$ . Dalej pierwsze równanie daje nam  $X(t) = 2t + \xi$ , a trzecie  $U(t) = t + \xi$ . Czyli ostatecznie  $u(x, t) = x - t$ .

Podobnie też jak w przypadku całek pierwszych równań quasi-liniowych możemy wprowadzić ogólniejsze pojęcie dla w pełni nieliniowych równań (2.95).

**Definicja 5.** Całką zupełną równania (2.95) nazywamy rodzinę powierzchni w przestrzeni  $x - y - u$  (zwyczajowo piszemy  $y$  zamiast  $t$ ) określonych wzorem

$$f(x, y, u, a, b) = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad (2.110)$$

który lokalnie określa rozwiązanie  $u = u(x, y)$  równania (2.95). Tutaj  $a$  i  $b$  są dowolnymi parametrami.

Całka zupełna spełnia taką samą funkcję jak rozwiązanie ogólne równania zwyczajnego, dla którego całką jest rodzina krzywych.

**Przykład.** Znajdziemy całkę zupełną równania eikonu

$$u_x^2 + u_y^2 = 1. \quad (2.111)$$

Tutaj  $F(x, y, u, p, q) = p^2 + q^2 - 1$ , skąd

$$\frac{dX}{ds} = 2P, \quad \frac{dY}{ds} = 2Q, \quad \frac{dU}{ds} = 2(P^2 + Q^2), \quad \frac{dP}{ds} = 0, \quad \frac{dQ}{ds} = 0. \quad (2.112)$$

Od razu mamy  $P(t) = a$  oraz  $Q(t) = \sqrt{1 - a^2}$  ponieważ spełnione jest równanie eikonu. Skoro przynajmniej lokalnie musimy mieć  $U(s) := u(X(s), Y(s))$  to z reguły łańcucha

$$\frac{dU}{ds} = P \frac{dX}{ds} + Q \frac{dY}{ds} = a \frac{dX}{ds} + \sqrt{1 - a^2} \frac{dY}{ds}, \quad (2.113)$$

skąd po scałkowaniu

$$u(x, y, a, b) = ax + \sqrt{1 - a^2}y + b. \quad (2.114)$$

Całka zupełna ma zatem postać

$$f(x, y, u, a, b) = ax + \sqrt{1 - a^2}y + b - u. \quad (2.115)$$

## 2.6 Twierdzenie o jednoznaczności

Wprowadzając metodę charakterystyk powołaliśmy się na ogólną teorię równań różniczkowych zwyczajnych mówiąc, że układ charakterystyczny (2.46)-(2.47) (lub Charpita (2.101)-(2.102)) ma lokalnie dokładnie jedno rozwiązanie. Powstaje naturalne pytanie - czy jeśli znaleźlibyśmy rozwiązanie równania (2.95) inną metodą niż charakterystyk (na przykład zgadując) to czy byłoby ono identyczne z tym uzyskanym rozwiązując układ Charpita? Odpowiedź na to pytanie jest pozytywna i pochodzi od A. Haara. My podamy trochę słabszy wynik, który można znaleźć u Couranta i Hilberta.

**Twierdzenie 2** (O jednoznaczności, A.Haar). *Rozważmy równanie*

$$u_t = G(x, t, u, p), \quad p := u_x, \quad (2.116)$$

gdzie  $G$  jest ciągła jako funkcja czterech zmiennych oraz ciągła w sensie Lipschitza ze względu na  $u$  i  $p$  to znaczy, że istnieją stałe  $k > 0$  i  $l > 0$  takie, że

$$|G(x, t, u_1, p_1) - G(x, t, u_2, p_2)| \leq l|u_1 - u_2| + k|p_1 - p_2|. \quad (2.117)$$

Niech teraz  $u$  i  $v$  będą gładkimi rozwiązaniami (2.116) spełniającymi

$$u(x, 0) = v(x, 0), \quad x_1 \leq x \leq x_2. \quad (2.118)$$

Wtedy  $u \equiv v$  na trójkącie

$$T = \{(x, t) : t \geq 0, t \leq k^{-1}(x - x_1), t \leq k^{-1}(x - x_2)\}. \quad (2.119)$$

*Dowód.* Połóżmy  $w := u - v$ . Wtedy wystarczy pokazać, że  $w \equiv 0$  na  $T$ . Najpierw zobaczymy, że z (2.116) oraz warunku Lipschitza mamy od razu

$$|w_t(x, t)| = |G(x, t, u, u_x) - G(x, t, v, v_x)| \leq l|w| + k|w_x|. \quad (2.120)$$

Wybierzmy taki punkt, żeby w jego okolicy było  $w > 0$ , wtedy dla każdego  $m > l$

$$|w_t(x, t)| < mw(x, t) + k|w_x(x, t)|. \quad (2.121)$$

Zdefiniujmy teraz

$$W(x, t) := w(x, t)e^{-mt}, \quad (2.122)$$

czyli wystarczy pokazać, że  $W \equiv 0$  na  $T$ . Załóżmy nie wprost, że jest inaczej, to znaczy (bez utraty ogólności)  $W > 0$  na pewnym podzbiornie  $T$ . Niech  $(x_0, t_0) \in T$  będzie punktem, w którym  $W$  osiąga swoje dodatnie maksimum. Oczywiście, to maksimum nie może zostać osiągnięte na podstawie  $T$  (patrz Rys. 8) ponieważ z warunku początkowego  $W(x, 0) = 0$ . Zatem  $(x_0, t_0)$  musi leżeć we wnętrzu trójkąta  $T$  lub na jego bokach. Jeśli zachodzi ta pierwsza możliwość to koniecznie pochodne cząstkowe  $W$  muszą zniknąć, czyli

$$0 = W_x(x_0, t_0) = w_x(x_0, t_0)e^{-mt}, \quad 0 = W_t(x_0, t_0) = w_t(x_0, t_0)e^{-mt} - mw(x_0, t_0)e^{-mt}. \quad (2.123)$$

Zatem  $w_x(x_0, t_0) = 0$  oraz  $w_t(x_0, t_0) = mw(x_0, t_0)$  a to jest w sprzeczności z (2.121). Niech teraz punkt, w którym  $W$  osiąga maksimum leży na którymś z boków trójkąta  $T$ . Z geometrii i definicji  $T$  wynika, że wektory  $\mathbf{v}^- = (-k, -1)$  oraz  $\mathbf{v}^+ = (k, -1)$  wskazują z odpowiedniego boku do wnętrza obszaru (Rys. 8). Ponieważ w  $(x_0, t_0)$  funkcja  $W$  ma maksimum to pochodne kierunkowe w kierunku wektorów  $\mathbf{v}^\pm$  muszą być koniecznie ujemne, czyli

$$0 \geq \mathbf{v}^\pm \cdot \text{grad}W(x_0, t_0) = \pm kW_x(x_0, t_0) - W_t(x_0, t_0). \quad (2.124)$$

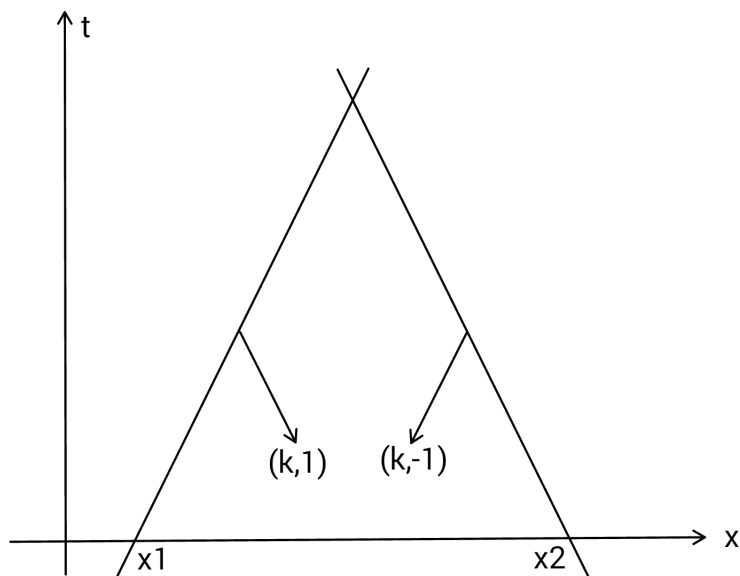
Otrzymujemy  $W_t(x_0, t_0) \geq kW_x(x_0, t_0)$  co pociąga nierówność

$$w_t(x_0, t_0) \geq mw(x_0, t_0) + k|w_x(x_0, t_0)|, \quad (2.125)$$

która jest w sprzeczności z (2.121). □

## 2.7 Metody numeryczne

Można powiedzieć, że dla większości równań różniczkowych nie jesteśmy w stanie napisać rozwiązania w jawnej formie lub też jest ono wysoce skomplikowane. Uciec się wtedy musimy do metod przybliżonych, z których bardzo powszechnymi są metody numeryczne. My skupimy się na jednej z najpopularniejszych ich rodzajów - metodzie różnic skończonych. Ten przybliżony sposób rozwiązywania równań różniczkowych polega na zastąpieniu wszystkich pochodnych w danym wyrażeniu przez ich przybliżenia wyliczone na podstawie skończonych przyrostów. Metodę tę można zastosować do niemal każdego typu równania, a my zaczniemy od równań pierwszego rzędu. Dużą zaletą metody różnic skończonych jest to, że można ją zaimplementować w dosyć szybki i prosty sposób w każdym języku programowania.



Rysunek 8: Obszar T.

### 2.7.1 Różnice skończone

Założmy, że chcemy przybliżyć wartość pochodnej funkcji  $u = u(x)$ , wtedy z definicji mamy

$$u'(x) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{u(x+k) - u(x)}{k}, \quad (2.126)$$

więc dla skończonego przyrostu  $k > 0$  powinniśmy mieć

$$D_+ u(x) := \frac{u(x+k) - u(x)}{k}. \quad (2.127)$$

Oczywiście przyrost w definicji pochodnej może być też ujemny, co prowadzi do kolejnego operatora różnicy skończonej

$$D_- u(x) := \frac{u(x) - u(x-k)}{k}. \quad (2.128)$$

gdzie wciąż  $k > 0$ . Operatory  $D_+$  i  $D_-$  są operatorami *jednostronnymi* ponieważ biorą pod uwagę jedynie prawe lub lewe otoczenie punktu  $x$ . Jak łatwo się domyślić, w niektórych sytuacjach takie jednostronne otoczenia mogą nie zawierać dostatecznej informacji o funkcji dlatego warto jest wprowadzić operator *scenrowany* jako średnią arytmetyczną  $D_+$  i  $D_-$

$$D_0 u(x) := \frac{D_+ u(x) + D_- u(x)}{2} = \frac{u(x+k) - u(x-k)}{2k}, \quad (2.129)$$

dla  $k > 0$ . Rysunek przedstawia geometryczną interpretację wprowadzonych operatorów różnic skończonych. Wydaje się też jasne, że  $D_0$  powinien dawać zwykle lepsze przybliżenie niż jednostronne przybliżenia  $D_{\pm}$ . Chcielibyśmy być w stanie dokładnie określić ten błąd przybliżenia zwany również *błędem odcięcia*.

Bardzo skutecznym podejściem do badania błędu odcięcia jest rozwijanie w szereg Taylora. Zobaczymy jakiego rzędu błędem obarczony jest operator  $D_+$ . Aby to uczynić rozwińmy  $u(x+k)$  w otoczeniu punktu  $x$

$$u(x+k) = u(x) + u'(x)k + \frac{u''(\xi)}{2}k^2, \quad (2.130)$$

dla pewnego punktu  $\xi \in (x, x+k)$ . Wtedy, po przekształceniach, dostajemy

$$D_+u(x) - u'(x) = \frac{u''(\xi)}{2}k, \quad (2.131)$$

co przy założeniu ograniczoności drugiej pochodnej (wynika ona na przykład z jej ciągłości) daje

$$|D_+u(x) - u'(x)| \leq Ck, \quad (2.132)$$

dla pewnej stałej  $C > 0$ . Widzimy zatem, że różnica między operatorem jednostronnym a pochodną zachowuje się jak  $k$  jeśli  $u$  jest ustalone. Bardzo podobnie możemy otrzymać ograniczenie błędu operatora  $D_-$

$$D_-u(x) - u'(x) = -\frac{u''(\zeta)}{2}k, \quad (2.133)$$

gdzie  $\zeta \in (x, x+k)$ . Jak łatwo się przekonać, operator scentrowany wymaga rozwinięcia w wyższe wyrazy

$$\begin{aligned} u(x+k) &= u(x) + u'(x)k + \frac{u''(x)}{2}k^2 + \frac{u'''(\xi)}{6}k^3, \\ u(x-k) &= u(x) - u'(x)k + \frac{u''(x)}{2}k^2 - \frac{u'''(\zeta)}{6}k^3. \end{aligned} \quad (2.134)$$

Co po odjęciu stronami implikuje

$$D_0u(x) - u'(x) = \frac{u'''(\xi) + u'''(\zeta)}{12}k^2 = \frac{u'''(\sigma)}{6}k^2, \quad (2.135)$$

gdzie ostatnia równość wynika z ciągłości trzeciej pochodnej (co zakładamy)<sup>7</sup>. Ponieważ trzecia pochodna jest ograniczona na dostatecznie małym otoczeniu punktu  $x$  mamy

$$|D_0u(x) - u'(x)| \leq Ck^2, \quad (2.136)$$

czyli  $D_0$  zachowuje się jak  $k^2$ . Dla małych  $k$  kwadrat jest dużo mniejszy niż pierwsza potęga dlatego operator scentrowany jest o rząd dokładniejszy niż operatory jednostronne. Motywuje nas to do podania definicji.

**Definicja 6.** Operator  $D$  przybliżający  $n$ -tą pochodną dostatecznie różniczkowalnej funkcji  $u$  jest rzędu  $p > 0$  dla  $k \rightarrow 0$  jeśli istnieje stała  $C > 0$  taka, że

$$|Du(x) - u^{(n)}(x)| \leq Ck^p, \quad (2.137)$$

dla odpowiednio małych  $k$ .

W podobny sposób możemy tworzyć różnice skończone wyższych rzędów (zadanie) jednak należy pamiętać, że bardzo często lepsze przybliżenia wiążą się z większymi wymaganiami obliczeniowymi. Dlatego zawsze należy szukać kompromisu.

<sup>7</sup>Jeśli funkcja  $f$  jest ciągła na odcinku  $[a, b]$  to jest tam ograniczona i przyjmuje wszystkie swoje wartości. Zatem  $m \leq f(x) \leq M$  wymusza  $m \leq \frac{1}{2}(f(\xi) + f(\zeta)) \leq M$ . Średnia arytmetyczna należy do zbioru wartości funkcji  $f$ , czyli istnieje takie  $\sigma \in [a, b]$ , że  $f(\sigma) = \frac{1}{2}(f(\xi) + f(\zeta))$ .

## 2.7.2 Równanie konwekcji

Ponieważ potrafimy już przybliżać pochodne możemy przejść do rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu. W tej chwili zajmiemy się jedynie najprostszym z nich, czyli równaniem konwekcji

$$u_t + cu_x = 0. \quad (2.138)$$

Powstaje od razu pytanie - po co stosować metod numerycznych do równania, którego rozwiązanie jesteśmy podać niemal z pamięci? Okazuje się, że tak proste zagadnienia są idealnym poligonem testowym dla schematów różnicowych, które często zachowują się inaczej niż pierwotne dla nich równania różniczkowe. Kiedy zbadamy zachowanie się metody różnic skończonych na prostych równaniach będziemy mogli zająć się bardziej skomplikowanymi problemami.

Żeby rozpocząć wprowadźmy siatkę współrzędnych. Będziemy przybliżać wartości rozwiązania równania adwekcji (2.138) w dyskretnej liczbie równomiernie rozmieszczonych punktów. Niech zatem  $k$  będzie odległością między dwoma punktami w przestrzeni a  $h$  będzie analogicznym odstępem między chwilami czasu (patrz Rys.). Wprowadźmy siatkę

$$x_j := jk, \quad t_n := nh, \quad j, n \in \mathbb{N}. \quad (2.139)$$

Ponadto, przez  $u_j^n$  oznaczmy wielkość będącą przybliżeniem wartości rozwiązania równania (2.138) w punkcie  $(x, t) = (jk, nh)$ , to jest

$$u_j^n \approx u(jk, nh), \quad (2.140)$$

gdzie  $u_j^n$  jest wynikiem metody numerycznej. Wprowadzając odpowiednią dyskretyzację pochodnych w (2.138) za pomocą różnic skończonych jesteśmy w stanie generować różne schematy numeryczne. Zanim przystąpimy do ogólnego przeglądu zdefiniujmy co będziemy rozumieć przed błąd odcięcia danej metody.

**Definicja 7.** Błędem odcięcia metody numerycznej nazywamy różnicę między rzeczywistym równaniem a jej rekurencyjnym przybliżeniem numerycznym.

W naszym przypadku równania konwekcji błąd odcięcia wyraża się bardzo prosto. Załóżmy, że  $D_t$  jest operatorem różnicowym przybliżającym pochodną po czasie a  $D_x$  analogicznym operatorem dla pochodnej po przestrzeni. Niech  $D_t$  ma rząd  $p$  a  $D_x$  rząd  $q$ . Wtedy

$$u_t(jk, nh) - au_x(jk, nh) = D_t u(jk, nh) - aD_x u(jk, nh) + O(h^p) + O(k^q), \quad (2.141)$$

czyli metoda różnicowa powstała poprzez odrzucenie wyrazów wyższych rzędów ma postać

$$(D_t u)_j^n - a(D_x u)_j^n = 0, \quad (2.142)$$

ma błąd odcięcia rzędu  $O(h^p) + O(k^q)$ . Zauważmy, że wielkości w powyższym równaniu w ogólności nie są równe  $D_t u(jk, nh) - aD_x u(jk, nh)$  ponieważ odrzuciliśmy część rozwinięcia odpowiedzialną za błąd odcięcia. Dodatkowo jasne jest, że błąd odcięcia dla metody numerycznej jest zupełnie czymś innym niż różnica między  $u_j^n$  a  $u(nk, jh)$ . Innymi słowy, metoda numeryczna wcale nie musi zbiegać do prawdziwego rozwiązania równania różniczkowego mimo tego, że jej błąd odcięcia zbiega do zera. Przekonamy się o tym wkrótce.

### Pod prąd

Jednym z najprostszych sposobów dyskretyzacji (2.138) jest zastosowanie jednostronnych różnic skończonych zarówno dla czasu jak i dla przestrzeni. Na przykład

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{h} + c \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0, \quad (2.143)$$

gdzie zastosowaliśmy operatory  $D_+$  dla pochodnych cząstkowych. Przekształcając otrzymujemy układ równań rekurencyjnych na  $u_j^n$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{ch}{k} (u_{j+1}^n - u_j^n). \quad (2.144)$$

Widzimy, że lewa strona reprezentuje przybliżenie funkcji  $u$  w czasie o krok dalszym niż prawa strona. Jest to standardowy sposób zapisu i obliczania rozwiązań schematów różnicowych - postępowanie w czasie. Wynika to z wyraźniej kierunkowości czasu. Jednorodna przestrzeń, natomiast, nie zawiera wyróżnionego kierunku dlatego nic nie stoi na przeszkodzie aby do dyskretyzacji pochodnej  $u_x$  użyć operatora  $D_-$ . Otrzymamy wtedy

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{ch}{k} (u_j^n - u_{j-1}^n). \quad (2.145)$$

Metody te nazywają się *różnicowaniem pod prąd* (a ang. *upwind differencing*). Wybór pomiędzy (2.144) oraz (2.145) powinien być dokonany na podstawie znaku prędkości propagacji  $c$ . Wiemy, że rozwiązaniem (2.138) jest dowolna funkcja zmiennej  $x - ct$  co oznacza, że informacja przemieszcza się w prawo dla  $c > 0$  oraz w lewo dla  $c < 0$ . Dlatego w przypadku  $c > 0$  aby znaleźć rozwiązanie w dowolnym i ustalonym punkcie przestrzeni należy zbadać co dzieje się po lewej jego stronie, czyli „pod prąd”. Zatem odpowiednia wydaje się wtedy metoda (2.145). Podobnie sprawa wygląda dla przypadku  $c < 0$ . Jak zobaczymy później, okazuje się, że istnieją również inne powody takiego wyboru metod. Jak pokazaliśmy wcześniej błędy odcięcia dyskretyzacji jednostronnych są  $O(k)$  oraz  $O(h)$  kiedy  $k, h \rightarrow 0$ . W praktyce przydają się jednak bardziej dokładne metody.

### Metoda scentrowana i algorytm skokowy

Kolejnym pomysłem w dyskretyzacji (2.138) jest zastosowanie scentrowanej różnicy skończonej dla pochodnej po przestrzeni, bo jak pamiętamy miała ona rząd  $O(k^2)$ . Dostajemy zatem *metodę scentrowaną*

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{ch}{2k} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n). \quad (2.146)$$

Mimo, że na pierwszy rzut oka wydaje się, że taki schemat powinien być lepszy od różnicowania pod prąd to okazuje się, że ma on poważne problemy ze stabilnością numeryczną (wrażliwością na błędy numeryczne) co czyni go praktycznie bezużytecznym.

Scentrowany operator różnicowania można również zaaplikować do pochodnej po czasie i otrzymać *algorytm skokowy* (*leapfrog*), który polepsza własności metody scentrowanej

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - \frac{ch}{k} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n). \quad (2.147)$$

Oprócz kilku problemów ze stabilnością metoda skokowa jest trzy poziomowa, to znaczy aby znaleźć rozwiązanie w chwili  $n + 1$  należy znać rozwiązanie dwa kroki wcześniej, to znaczy w  $n - 1$  i  $n$ -tej chwili. Nie zawsze jest to opłacalne ponieważ wymaga przechowywania w pamięci dużych ilości danych. W wyższych wymiarach jest to bardzo droga operacja.

### Lax-Wendroff

Jedną z efektywnych metod uzyskania schematu o dokładności drugiego rzędu jest zmodyfikowanie w pewien sposób metody scentrowanej (2.146) tak, aby polepszyć jej własności związane ze stabilnością. Zauważmy, że dla równania konwekcji  $u_t = -cu_x$ , co pociąga  $u_{tt} = -cu_{tx} = c^2u_{xx}$ . Rozwijając zatem  $u(x, t + h)$  w szereg Taylora otrzymujemy

$$u(x, t + h) = u(x, t) + u_t(x, t)h + \frac{1}{2}u_{tt}(x, t)h^2 + \frac{u_{ttt}(x, \tau)}{6}h^3. \quad (2.148)$$



Teraz zastępując  $u_t$  oraz  $u_{tt}$  przez odpowiednio obliczone pochodne przestrzenne otrzymujemy

$$u(x, t + h) = u(x, t) - cu_x(x, t)h + \frac{c^2}{2}u_{xx}(x, t)h^2 + \frac{u_{ttt}(x, \tau)}{6}h^3. \quad (2.149)$$

To rozwinięcie sugeruje wprowadzenie następującej metody numerycznej, w której pochodne przestrzenne przybliżane są za pomocą różnic scentrowanych

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{2} \frac{ch}{k} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{1}{2} \left( \frac{ch}{k} \right)^2 (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n). \quad (2.150)$$

Ten schemat nosi nazwę *metody Laxa-Wendroffa*. Z konstrukcji wynika, że jej błędem odcięcia jest wyrażenie  $O(h^2) + O(k^2)$  dla  $k, h \rightarrow 0$ . Zatem jest to metoda drugiego rzędu. W podobny sposób, to jest używając równania aby zamienić pochodne czasowe na przestrzenne, możemy konstruować kolejne schematy różnicowe.

### 2.7.3 Spójność, zbieżność oraz stabilność

Wyprowadziliśmy kilka metod numerycznych służących do rozwiązania jednego równania różniczkowego cząstkowego. Nie jest jednak trudne przenieść nasze wyprowadzenia na jakiegokolwiek inne zagadnienie. Powiedzieliśmy również, że niektóre metody są lepsze niż inne. Teraz przyjrzymy się co jest tego powodem. Przede wszystkim podstawowym pytaniem dotyczącym schematów różnicowych jest to, czy są zbieżne do rozwiązania równania, które przybliżają.

**Definicja 8.** Niech  $u_j^n$  będzie numerycznym przybliżeniem rozwiązania  $u(x, t)$  pewnego równania różniczkowego. Mówimy, że schemat numeryczny o krokach  $h$  i  $k$ , z którego pochodzi  $u_j^n$  jest punktowo zbieżny jeżeli

$$\lim_{h, k \rightarrow 0} u_j^n = u(x, t) \quad \text{dla} \quad nh \rightarrow t, \quad kj \rightarrow x. \quad (2.151)$$

Oczywiście możemy również rozważać zbieżność w innym sensie, na przykład względem pewnej normy. Nie będziemy jednak wkraczać w ten temat. Bezpośrednie pokazanie zbieżności metody numerycznej jest zwykle dosyć trudne (lub nawet bardzo trudne). Istnieje jednak bardzo ważne twierdzenie pochodzące od Laxa pokazujące, że zbieżność jest równoważna spójności oraz stabilności danej metody.

**Definicja 9.** Metoda numeryczna jest spójna jeżeli jej błąd odcięcia dąży do zera gdy  $h, k \rightarrow 0$  przy  $nh \rightarrow t, \quad kj \rightarrow x$ .

Powyższa definicja wydaje się niepotrzebna gdyż nie ma sensu rozważać metod numerycznych, których błąd odcięcia nie staje się dowolnie mały. Oznaczałoby to, że schemat różnicowy przybliży wtedy nie to równanie różniczkowe co trzeba. Bardziej istotne jest pojęcie stabilności, czyli wrażliwości na zmiany w warunkach początkowych. Zauważmy najpierw, że każda metoda dwukrokowa może być zapisana w postaci macierzowej

$$\mathbf{u}^{n+1} = B(h)\mathbf{u}^n, \quad (2.152)$$

gdzie  $\mathbf{u}^n = (u_1^n, u_2^n, \dots, u_J^n)$  dla pewnego  $J$  będącego ilością punktów podziałów przestrzeni. Tutaj  $B(k)$  jest macierzą  $J \times J$  zależną od  $k$  oraz  $h$ . Jak to zwykle bywa w praktyce zakładamy również, że krok przestrzenny jest pewną funkcją kroku czasowego, to jest  $k = k(h)$ . Dlatego argumentem macierzy  $B$  jest jedynie  $h$ . Metoda jest stabilna jeśli nie powiększa błędów wynikających z obliczeń numerycznych - błąd może zwiększać się z czasem ale nie z ilością kroków. Aby zobaczyć to dokładniej iterujmy (2.152) aby dostać

$$\mathbf{u}^{n+1} = B(h)^n \mathbf{u}^0, \quad (2.153)$$

gdzie  $\mathbf{u}^0$  jest warunkiem początkowym. Jeśli teraz komputer popełni błąd w zapisie tego warunku (a robi to na pewno ponieważ zawsze obecne są błędy zaokrąglania) to powyższa metoda może mieć postać

$$\mathbf{u}^{n+1} = B(h)^n \mathbf{u}^0 + B(h)^n \mathbf{E}, \quad (2.154)$$

gdzie  $\mathbf{e}$  jest błędem zaokrąglania. Gdy  $B(h)^n$  może rosnąć dowolnie duże wraz ze wzrostem  $n$  to błąd zostanie wzmocniony wiele razy o przesłoni nam rzeczywiste rozwiązanie. Jest to bardzo poważny problem dlatego sensowne wydaje się rozważanie jedynie stabilnych schematów numerycznych.

**Definicja 10.** Schemat numeryczny (2.152) jest stabilny w sensie Laxa-Richtmyera jeśli dla każdego  $T$  takiego, że  $nh \leq T$  istnieje stała  $C_T$ , dla której

$$\|B(h)^n\| \leq C_T. \quad (2.155)$$

Tutaj  $\|\cdot\|$  jest pewną wybraną normą macierzową.

Stabilność jest nie tyle bardzo istotna praktycznie, jest również niemal równoważna ze zbieżnością metody.

**Twierdzenie 3 (Lax).** Spójna metoda numeryczna (2.152) jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy jest stabilna.

Dowód tego twierdzenia można znaleźć w [1].

**Przykład.** Pokażemy stabilność metody numerycznej „pod prąd”

$$u_j^{n+1} = u_j^n - R(u_{j+1}^n - u_j^n), \quad (2.156)$$

gdzie  $c < 0$  oraz  $R := ch/k$ .

Jak widać pokazanie stabilności może nie być łatwe (podobnie jak w przypadku zbieżności). W takim razie twierdzenie Laxa wydaje się niezbyt praktyczne. Okazuje się jednak, że jest inaczej i istnieje metoda, która pozwala w łatwy sposób pokazywać stabilność dla równań liniowych o stałych współczynnikach. Jest ona analogią do szeregów Fouriera. Nie będziemy jednak wchodzić w dokładne szczegóły dyskretnej transformaty Fouriera (więcej w [1]) - skupimy się na intuicji. Analiza ta ma miejsce jedynie dla problemów określonych na całej prostej  $\mathbb{R}$  lub dla periodycznych warunków brzegowych. Metoda na nosi nazwę *analizy von Neumanna*.

Wróćmy do schematu (2.154) i załóżmy, że rozwiązanie numeryczne może być transformowane

$$u_j^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/k}^{\pi/k} \hat{u}^n(\xi) e^{ijk\xi}, \quad (2.157)$$

gdzie  $\hat{u}^n$  jest transformatą Fouriera po przestrzeni wziętą w  $n$ -tej chwili czasowej,

$$\hat{u}^n(\xi) = \frac{k}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j^n e^{-ijk\xi}. \quad (2.158)$$

Powołując się na (2.152) i biorąc drugie normy (w odpowiednich przestrzeniach) otrzymujemy

$$\|\mathbf{u}^{n+1}\|_2 \leq (1 + \alpha h) \|\mathbf{u}^n\|_2, \quad (2.159)$$

gdzie skorzystaliśmy z warunku dostatecznego stabilności (zadanie). Zgodnie z nierównością Parsevala mamy wtedy

$$\|\hat{\mathbf{u}}^{n+1}\|_2 \leq |1 + \alpha h| \|\hat{\mathbf{u}}^n\|_2. \quad (2.160)$$

Dzięki temu, że transformata pochodnej (różnicy skończonej) jest mnożeniem transformaty przez pewną funkcję (zadanie) mamy

$$\hat{u}^{n+1} = g(\xi)\hat{u}^n. \quad (2.161)$$

Łącząc dwa powyższe wzory otrzymujemy warunek dostateczny stabilności

$$|g(\xi)| \leq |1 + \alpha h|, \quad (2.162)$$

dla pewnej stałej  $\alpha$  i dostatecznie małych  $h$ . Funkcję zespoloną  $g$  nazywamy *symbolem* metody (2.152). Zauważmy, że nie musimy liczyć żadnych norm ani obliczać odwrotnej transformaty Fouriera. Jest to ogromna korzyść ale trzeba pamiętać, że metoda von Neumanna jedynie *implikuje* stabilność w sensie Laxa-Richtmyera. Jednak dla ogromnej ilości schematów jest to wystarczające.

**Przykład.** Wróćmy do metody „pod prąd” z  $R \leq 0$ . Z liniowości zawsze wystarczy rozważać jedynie pojedynczą harmonikę Fouriera

$$u_j^n = e^{ijk\xi}. \quad (2.163)$$

Z definicji symbolu  $u_j^{n+1} = g(\xi)e^{ijk\xi}$  a ze schematu

$$g(\xi)e^{ijk\xi} = g(\xi)u_j^{n+1} = e^{ijk\xi} - R(e^{i(j+1)k\xi} + e^{ijk\xi}) = (1 + R - Re^{ik\xi})e^{ijk\xi}, \quad (2.164)$$

zatem  $g(\xi) = 1 + R - Re^{ik\xi} = 1 + R - R\cos(k\xi) - iR\sin(k\xi)$ . Chcemy teraz, żeby  $|g(\xi)| \leq 1$  dla pewnego  $\alpha$ . Najłatwiej będzie obliczyć moduł z liczby zespolonej

$$|g(\xi)|^2 = (1 + R)^2 + R^2 - 2R(1 + R)\cos(k\xi). \quad (2.165)$$

Obliczając pochodną powyższej funkcji zmiennej  $\xi$  widzimy, że zeruje się ona dla  $\xi = m\pi/k$ , gdzie  $m = 0, 1, 2, \dots$ . W tych punktach kwadrat modułu symbolu osiąga ekstremum

$$|g(0)| = 1, \quad |g(\pi/k)| = |1 + 2R|. \quad (2.166)$$

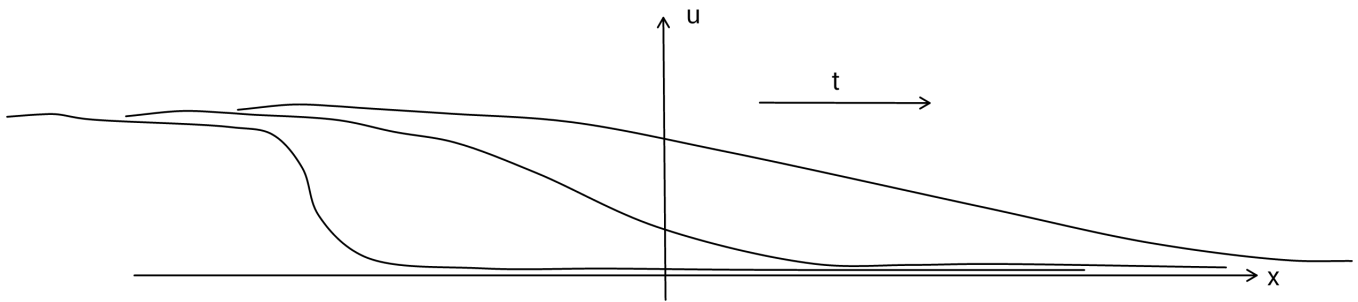
Zatem wymagamy  $|1 + 2R| \leq 1$ . Od razu widzimy, że jest to możliwe jedynie dla  $R \leq 0$ . W przeciwnym przypadku metoda jest niestabilna. Rozwiązując prostą nierówność z wartością bezwzględną dostajemy warunek konieczny stabilności (a z twierdzenia Laxa - zbieżności)  $-1 \leq R \leq 0$ .

## 3 Fale uderzeniowe

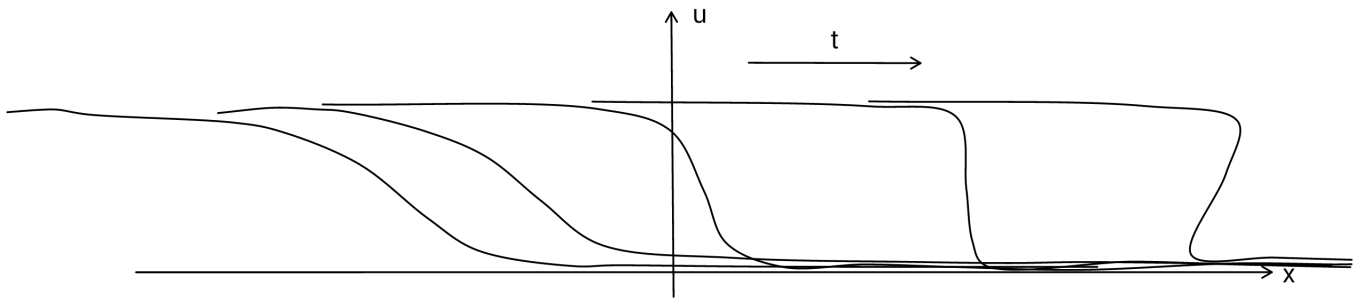
### 3.1 Warunek Rankine'a-Hugoniota

Wróćmy teraz do zagadnienia Riemanna (2.58) i dokładnie zbadajmy strukturę charakterystyk, które są liniami prostymi. Wiemy, że  $c = c(u)$  oznacza prędkość rozchodzenia się fali, czyli jest bezpośrednio związana z kątem nachylenia charakterystyk do osi  $Ox$ . W Twierdzeniu 1 pokazaliśmy, że zagadnienie Riemanna ma jednoznacznie określone i gładkie rozwiązanie o ile tylko prędkość  $c$  oraz warunek początkowy  $\phi$  są dokładnie tak samo monotoniczne. Załóżmy, że obie te funkcje są niemalejące wtedy *większe wartości*  $\phi$  poruszają się z większą prędkością a charakterystyki zaczynają być nachylone pod coraz mniejszym kątem (Rys. 9). Wykres  $\phi(x, t)$  dla różnych czasów zaczyna się „spłaszczać”.

Odwróćmy teraz sytuację i załóżmy, że  $c$  jest niemalejąca a  $\phi$  jest nierosnąca. Wtedy większe wartości  $u$  znajdują się z tyłu za mniejszymi. Ale ponieważ  $c(u)$  rośnie to większe wartości poruszają się szybciej niż te mniejsze i w pewnym momencie je doganiają (Rys. 10). Wynikiem



Rysunek 9: Ewolucja warunku początkowego dla  $c'\phi' > 0$ .



Rysunek 10: Ewolucja warunku początkowego dla  $c'\phi' < 0$ .

jest funkcja trójwartościowa. Charakterystyki zaś nachylone są pod coraz to *większym* kątem do osi  $Ox$  i w rezultacie przecinają się. Na pewno coś jest nie tak - jaką wartość powinniśmy przypisać funkcji  $u$  w punkcie przecięcia prostych?

**Przykład.** Rozważmy następujące zagadnienie

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, & t > 0, & x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x \leq 0; \\ 0, & x > 0, \end{cases} & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.1)$$

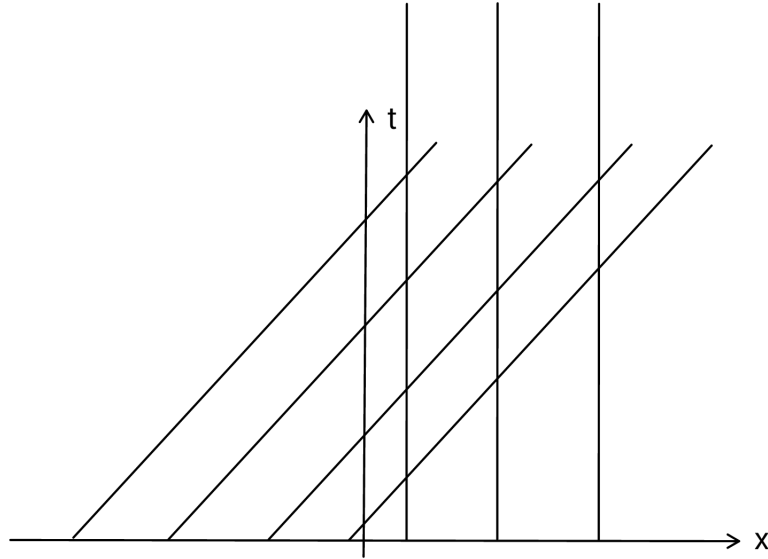
Na razie nie przejmujemy się tym, że warunek początkowy nie jest ciągły. W razie czego zawsze moglibyśmy go uciąglić i wygładzić ale zaburzyło by to przejrzystość przykładu. Charakterystyki mają postać

$$X(t) = \begin{cases} t + \xi, & x \leq 0; \\ \xi, & x > 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

czyli przecinają się od samego początku (Rys. 11).

Z powyższej dyskusji wynika, że w pewnych sytuacjach klasyczne rozwiązanie naszego zagadnienia przestaje być określone od pewnego czasu - pochodna przestrzenna staje się nieograniczona. Jest to tak zwana *katastrofa gradientowa*. Przecinanie się charakterystyk nie jest jednak sprzecznością ponieważ do tej pory zawsze zakładaliśmy, że wszystkie badane funkcje są gładkie. Inaczej nie moglibyśmy mówić o klasycznych rozwiązaniach równania różniczkowego. Przypomnijmy sobie, że archetyp naszego równania - prawo zachowania - był najpierw wyprowadzony w postaci całkowej a dopiero z niej otrzymaliśmy postać różniczkową. Całkowy wzór zachowania (2.4) jest zatem bardziej fundamentalny bo nie wymaga od funkcji, żeby były różniczkowalne a nawet ciągłe!

Katastrofa gradientowa powstaje wtedy, kiedy funkcja  $u$  przestaje być ciągła. Załóżmy, że ta nieciągłość porusza się na krzywej  $x = s(t)$ . To znaczy, dla  $\lim_{x \rightarrow s(t)^-} u(x, t) \neq \lim_{x \rightarrow s(t)^+} u(x, t)$  i ustalonego  $t > 0$ . Po każdej ze stron  $s(t)$  funkcja  $u$  ma ciągłe pochodne. Zobaczmy co musi się



Rysunek 11: Charakterystyki dla  $c'\phi' < 0$ .

dział z  $u$  przy przejściu przez krzywą  $s$ . Prawo zachowania (2.4) ma zatem postać

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx = q(a, t) - q(b, t). \quad (3.3)$$

Tutaj o strumieniu myślimy jako o funkcji zmiennych  $x$  i  $t$  być może poprzez zależność od  $u$ , to znaczy  $q(x, t) = q(x, t, u(x, t))$ . Weźmy teraz  $a$  i  $b$  takie, że  $a < s(t) < b$ , wtedy

$$\frac{d}{dt} \left( \int_a^{s(t)} u(x, t) dx + \int_{s(t)}^b u(x, t) dx \right) = q(a, t) - q(b, t), \quad (3.4)$$

Ponieważ  $u$  jest gładka po lewej oraz po prawej stronie  $s(t)$  to możemy obliczyć pochodną<sup>8</sup>

$$\int_a^{s(t)} u_t(x, t) dx + \int_{s(t)}^b u_t(x, t) dx + (u(s(t)^-, t) - u(s(t)^+, t)) \frac{ds}{dt} = q(a, t) - q(b, t), \quad (3.5)$$

gdzie oznaczyliśmy  $u(s(t)^\pm) := \lim_{x \rightarrow s(t)^\pm} u(x, t)$ . Ponieważ  $u_t$  jest z założenia ciągła to możemy przejść do granicy z  $a, b \rightarrow s(t)^\mp$  i otrzymać *prędkość rozchodzenia się nieciągłości*

$$\frac{ds}{dt} = \frac{[q]}{[u]}, \quad (3.6)$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenie oznaczające skok

$$[f] := \lim_{x \rightarrow s(t)^+} f(x, t) - \lim_{x \rightarrow s(t)^-} f(x, t), \quad (3.7)$$

dla dowolnej funkcji  $f = f(x, t)$ . Równanie określające prędkość trajektorii, po której porusza się nieciągłość (3.6) nazywane jest *warunkiem Rankine'a-Hugoniota*.

**Definicja 11.** *Rozprzestrzenianie się nieciągłości po krzywej  $x = s(t)$  spełniającej warunek Rankine'a-Hugoniota (3.6) nazywamy falą uderzeniową.*

<sup>8</sup>Pamiętajmy o regule Leibniza liczenia pochodnych  $\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} f_t(x, t) dx + f(b(t), t)b'(t) - f(a(t), t)a'(t)$ .

Mamy zatem sposób porządzenia sobie z przecinaniem się charakterystyk. Tam, gdzie rozwiązanie jest ciągle charakterystyki mają dokładnie taki sam kształt jak powinny a nieciągłość, z kolei, porusza się po trajektorii danej wzorem (3.6). Wprowadzenie fali uderzeniowej zapewnia jednoznaczność rozwiązania.

**Przykład.** Wróćmy do poprzedniego przykładu i obliczmy strumień

$$q(u) = \frac{1}{2}u^2, \quad (3.8)$$

ponieważ  $q_x = q'(u)u_x = uu_x$ . Teraz warunek Rankine'a-Hugoniota (3.6) daje nam prędkość fali uderzeniowej

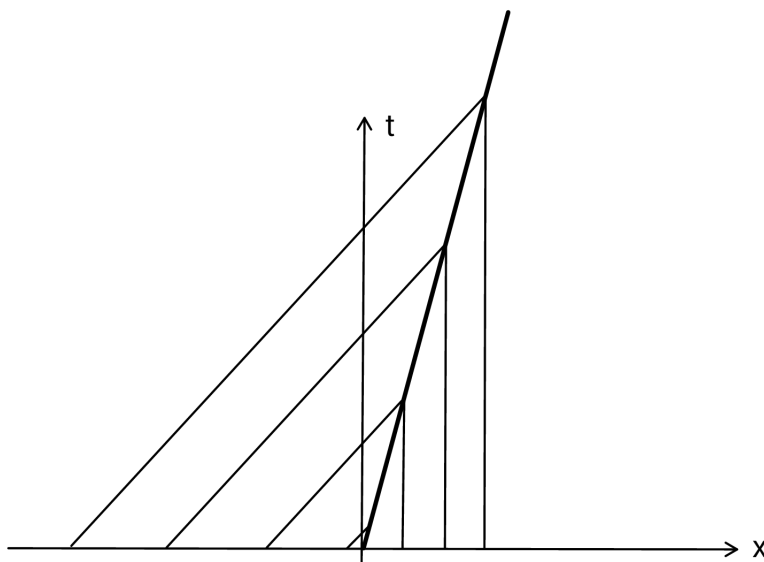
$$\frac{ds}{dt} = \frac{[q]}{[u]} = \frac{\frac{1}{2}1^2 - \frac{1}{2}0^2}{1 - 0} = \frac{1}{2}, \quad (3.9)$$

co wynika z nieciągłości warunku początkowego. Od razu możemy scałkować powyższe równanie otrzymując trajektorię fali uderzeniowej

$$s(t) = \frac{1}{2}t, \quad (3.10)$$

gdzie stała całkowania została wybrana tak, żeby fala zgadzała się z warunkiem początkowym. Wykres czasoprzestrzenny jest przedstawiony na Rys. 12. Widzimy, że prędkość fali uderzeniowej znajduje się pomiędzy prędkościami pozostałych charakterystyk. Rozwiązanie możemy zapisać wzorem

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & x \leq \frac{1}{2}t; \\ 0, & x > \frac{1}{2}t, \end{cases} \quad (3.11)$$



Rysunek 12: Fala uderzeniowa.

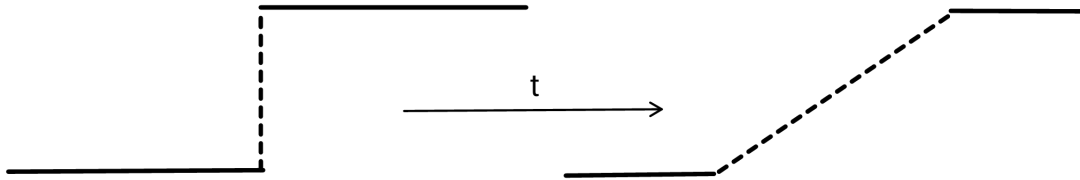
### 3.2 Fale rozrzedzeniowe

To nie koniec problemów z równaniami quasi-liniowymi.

**Przykład.** Raz jeszcze wróćmy do poprzedniego przykładu, ale tym razem odwróćmy wygląd warunku początkowego (Rys. 13)

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, & t > 0, & x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 1, & x > 0, \end{cases} & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.12)$$

Widzimy, że tym razem charakterystyki się nie przecinają ale na diagramie czasoprzestrzennym istnieje obszar, do którego nie dochodzi żadna z nich (tzw. „pustka” z ang. *void*).



Rysunek 13: „Rozjeżdżanie” się warunku początkowego.

Jeśli się przyjrzymy dokładniej powyższemu przykładowi to znajdziemy powód istnienia obszaru, do którego nie dochodzą żadne charakterystyki - warunek początkowy jest nieciągły oraz ma taką samą monotoniczność co prędkość propagacji. Okazuje się, że w dosyć łatwy sposób możemy znaleźć rozwiązanie określone na brakującym podzbiórze dziedziny. Jeśli spojrzymy na Rys. fig:FanPhi to zauważyć możemy, że wartości funkcji się rozjeżdżają i pomiędzy nimi powstaje obszar, w którym nie jest zadana żadna wartość. Pierwszym i najlepszym pomysłem jest po prostu ciągle połączyć wartości  $u$  dla wszystkich czasów  $t > 0$  i przejście do granicy  $t \rightarrow 0^+$ . Okazuje się, że istnieje na to dokładnie jeden sposób.

Założmy, że  $c'(u) > 0$  a warunek początkowy zagadnienia Riemanna (2.58) ma nieciągłość w punkcie  $x = \xi_0$  to znaczy,  $\phi(\xi^-) = u_1 \neq u_2 = \phi(\xi^+)$ . Wtedy z metody charakterystyk mamy  $x = c(\phi(\xi_0))t + \xi_0$  oraz  $u(x, t) = \phi(\xi_0)$ , gdzie  $c(u_1) < c(\phi(\xi_0)) < c(u_2)$  (plus modyfikacja w przypadku, gdy  $\phi$  jest jednostronnie ciągłe). Oznacza to, że z punktu  $\xi_0$  wychodzi nieskończenie wiele charakterystyk, które w sposób ciągły łączą się z pozostałymi. Dokładniej,

$$c(\phi(\xi_0)) = \frac{x - \xi_0}{t} \rightarrow u(x, t) = c^{-1}\left(\frac{x - \xi_0}{t}\right), \quad c(u_1) < \frac{x - \xi_0}{t} < c(u_2), \quad (3.13)$$

gdzie funkcja odwrotna do  $c$  istnieje z monotoniczności. Charakterystyki tworzą tak zwany *wachlarz* (z ang. *fan*) a całe zjawisko nazywa się *fala rozrzedzeniową*.

**Przykład.** W naszym przypadku  $c(u) = c^{-1}(u) = u$  oraz  $\xi_0 = 0$ , więc rozwiązanie opisane jest równaniem

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{x}{t}, & 0 \leq x < t; \\ 1, & x \geq t. \end{cases} \quad (3.14)$$

**Przykład.** W ogólności spotkać się możemy jednocześnie z falą uderzeniową i rozrzedzeniową. Ilustruje to poniższy przykład.

$$\begin{cases} u_t + u^2 u_x = 0, & t > 0, & x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = \begin{cases} -1, & x < -\frac{1}{2}; \\ 0, & -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}; \\ 1, & x \geq \frac{1}{2} \end{cases} & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.15)$$

Charakterystyki opisane są równaniami

$$x = \begin{cases} t + \xi, & x < -\frac{1}{2} \text{ oraz } x \geq \frac{1}{2}; \\ \xi, & -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (3.16)$$

Fala uderzeniowa ma prędkość

$$\frac{ds}{dt} = \frac{[q]}{[u]} = \frac{[\frac{1}{3}u^3]}{[u]} = \frac{0 - \frac{1}{3}}{0 - 1} = \frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{2} < s(t) \leq \frac{1}{2}, \quad (3.17)$$

skąd znajdujemy  $s(t) = \frac{1}{3}t - \frac{1}{2}$ , ponieważ nieciągłość powodująca przecinanie charakterystyk znajduje się w  $\xi = -\frac{1}{2}$ . Obszar  $\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} + t$  jest natomiast pustką, dlatego wpisujemy tam wachlarz, na którym rozwiązanie ma postać

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{x - \frac{1}{2}}{t}}, \quad \frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} + t. \quad (3.18)$$

Zauważmy, że w punkcie  $x = \frac{1}{2}$  i czasie  $t = 3$  fala uderzeniowa wchodzi na obszar fali rozrzedzeniowej. Dlatego też otrzymujemy nowe równanie na postać trajektorii uderzeniowej

$$\frac{ds}{dt} = \frac{[\frac{1}{3}u^3]}{[u]} = \frac{1}{3} \frac{\left(\frac{s-\frac{1}{2}}{t}\right)^{\frac{3}{2}} - 1}{\left(\frac{s-\frac{1}{2}}{t}\right)^{\frac{1}{2}} - 1}. \quad (3.19)$$

Niestety tego równania nie rozwiążemy w sposób jawny. Ostateczny wykres czasoprzestrzenny znajduje się na Rys. 14, gdzie zaznaczone jest rozwiązanie.

### 3.3 Powstawanie fali uderzeniowej

Do tej pory mówiliśmy głównie o nieciągłych warunkach początkowych jako granicznym przypadku gładkiego ich przybliżenia. Teraz zajmiemy się zagadnieniem powstawania fali uderzeniowej z gładkiego warunku początkowego. Twierdzenie 1 sugeruje nam jakie warunki muszą być spełnione dla powstania fali. Aby zrozumieć zagadnienie jeszcze lepiej postąpimy inną drogą.

Rozważmy zagadnienie

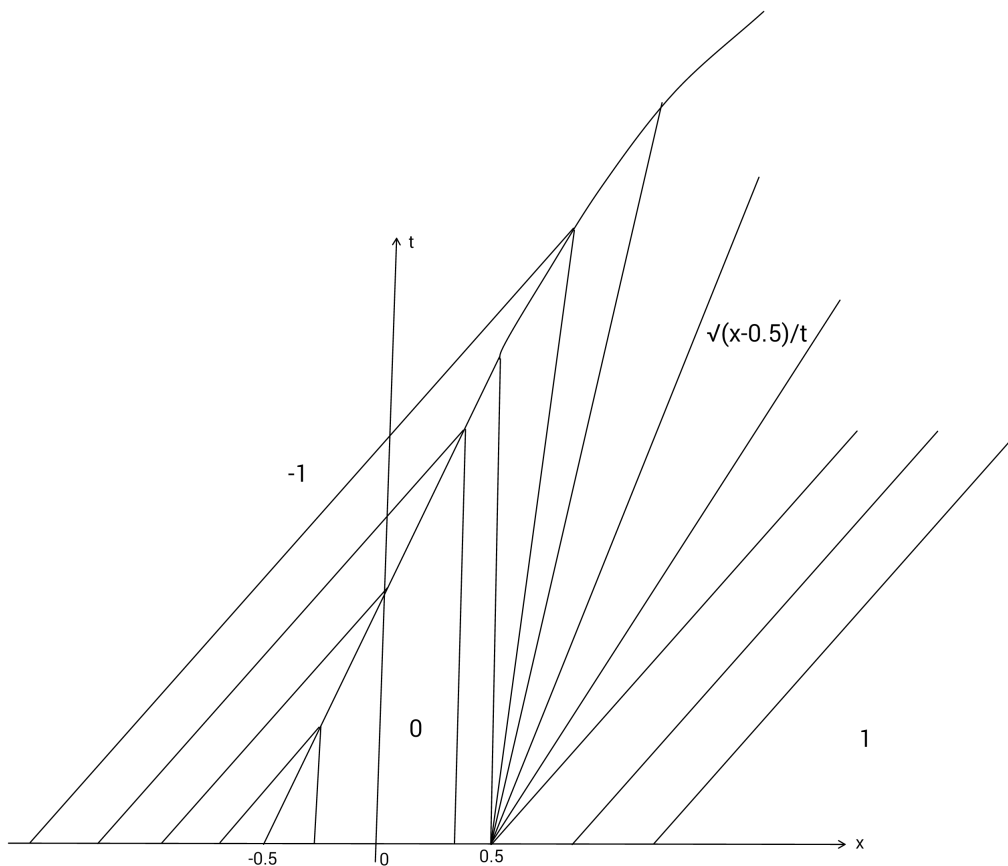
$$\begin{cases} u_t + c(u)u_x = 0, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = \phi(x) \end{cases} \quad (3.20)$$

oraz dla ustalenia uwagi weźmy  $c(u) > 0$  oraz  $c'(u) > 0$ . Pokazaliśmy wcześniej, że jeśli  $\phi$  jest rosnąca to istnieje jednoznacznie określone rozwiązanie powyższego problemu dla wszystkich czasów. Załóżmy teraz, że  $\phi$  jest malejąca. Niech zatem  $\phi(x) > 0$  oraz  $\phi'(x) < 0$ . Charakterystyki są liniami prostymi o nachyleniu równym  $c(\phi(\xi))$ , gdzie  $\xi$  jest punktem startowym danej prostej (2.62). Jeśli teraz  $\xi_1 < \xi_2$  to  $\phi(\xi_1) > \phi(\xi_2)$  co pociąga  $c(\phi(\xi_1)) > c(\phi(\xi_2))$ , czyli charakterystyka z lewej jest szybsza niż ta z prawem. W rezultacie, obie się przetną (zob. Rys. ). Znajdźmy czas, w którym to nastąpi.

Obliczmy, w którym momencie nastąpi katastrofa gradientowa, czyli  $u_x$  stanie się nieograniczona. Weźmy, na razie dowolną, charakterystykę  $X = X(t)$  i zdefiniujmy  $P(t) = u_x(X(t), t)$ . Obliczając pochodną mamy

$$\frac{dP}{dt} = u_{xx} \frac{dX}{dt} + u_{xt} = c(\phi(\xi))u_{xx} + u_{xt}, \quad (3.21)$$





Rysunek 14: Wykres czasoprzestrzenny dla przykładu z falą uderzeniową oraz rozrzedzeniową.

ponieważ  $u$  jest stałe na charakterystykach. Aby pozbyć się pochodnych drugiego rzędu zróżniczkujemy równanie po zmiennej  $x$

$$u_{xt} + c'(u)u_x^2 + c(u)u_{xx} = 0, \quad (3.22)$$

zatem

$$\frac{dP}{dt} = -c(\phi(\xi))P^2. \quad (3.23)$$

Jest to równanie mówiące o ewolucji pochodnej przestrzennej. Warunkiem początkowym jest  $P(0) = u_x(X(0), 0) = \phi'(\xi)$  a jego rozwiązanie

$$u_x(X(t), t) = P(t) = \frac{\phi'(\xi)}{1 + \phi'(\xi)c'(\phi(\xi))t}. \quad (3.24)$$

Widzimy, że rzeczywiście pochodna wybuchła ponieważ  $\phi'$  i  $c'$  są przeciwnych znaków. Aby znaleźć charakterystykę, dla której następuje pierwsze przecięcie zauważmy, że  $t$  będzie najmniejsze jeśli  $|\phi'(\xi)c'(\phi(\xi))|$  będzie największe jako funkcja  $\xi$ . Niech  $\xi_b$  będzie taki, żeby  $|\phi'(\xi)c'(\phi(\xi))|$  przyjmowało maksimum. Zdefiniujmy zatem czas utworzenia się fali

$$t_b = -\frac{1}{F'(\xi_b)}, \quad F(\xi) := c(\phi(\xi)). \quad (3.25)$$

Jeśli oczywiście funkcja  $\phi$  nie jest ściśle monotoniczna to utworzenie się fali uderzeniowej nastąpi w punkcie, w którym  $F'(\xi) < 0$  oraz  $|F'(\xi)|$  ma maksimum.

**Przykład.** Niech teraz  $c(u) = u$  oraz  $\phi(x) = (1 + x^2)^{-1}$ . Wtedy  $F(\xi) = (1 + \xi^2)^{-1}$

$$F'(\xi) = -\frac{2\xi}{(1 + \xi^2)^2}, \quad F''(\xi) = \frac{6\xi^2 - 2}{(1 + \xi^2)^3}. \quad (3.26)$$

Druga pochodna się zeruje dla  $\xi = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$  a pochodna jest ujemna i osiąga ekstremum dla  $\xi_b = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Czas wybuchu fali uderzeniowej wynosi zatem

$$t_b = -\frac{1}{F'(\xi_b)} = \frac{8\sqrt{3}}{9} \approx 0.65. \quad (3.27)$$

### 3.4 Rozwiązania słabe

Nasze rozważania na temat fal uderzeniowych często opierały się na nieciągłych warunkach początkowych. Tłumaczyliśmy się tym, że aby znaleźć warunek Rankine'a-Hugoniota należy powrócić do prawa zachowania zapisanego w postaci całkowej, które dopuszcza nieciągłe rozwiązania. W tej części formalnie uzasadnimy wszystkie poczynione kroki i jednocześnie wprowadzimy jedno z fundamentalnych pojęć współczesnej teorii równań różniczkowych cząstkowych - rozwiązanie słabe.

Rozważmy zagadnienie

$$\begin{cases} u_t + q(u)_x = 0, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.28)$$

oraz zdefiniujmy ściśle co rozumiemy przez jego klasyczne rozwiązanie.

**Definicja 12.** Rozwiązaniem klasycznym zagadnienia (3.28) nazywamy funkcję  $u = u(x, t)$  posiadającą ciągle pierwsze pochodne ze względu na każdą ze zmiennych spełniającą dane równanie różniczkowe oraz warunek początkowy.

Każde równanie różniczkowe cząstkowe może być zapisane w postaci całkowej a jak wiemy całki są dużo mniej wymagające od funkcji niż pochodne. Nie możemy jednak po prostu scałkować równania (3.28) ponieważ ta operacja powoduje utratę informacji (całka z funkcji to liczba). Musimy postąpić inaczej aby w pewien sposób zachować pełną informację o rozwiązaniu równania. Wybierzmy zatem tak zwaną funkcję próbną  $f$ , której klasę zdefiniujemy później. Przemnożmy obustronnie równanie (3.28) przez  $f$  i scałkujmy

$$\int_0^T \int_a^b (fu_t + fq(u)_x) dx dt = 0, \quad (3.29)$$

gdzie  $T$  jest pewnym czasem, z kolei  $[a, b]$  jest dowolnym odcinkiem. Wykorzystajmy teraz całkowanie przez części aby przenieść pochodne z rozwiązania równania różniczkowego na funkcję próbną. Tym samym musimy założyć, że  $f$  posiada pochodną (niech będzie również ciągła). Całka po przestrzeni ma postać

$$\int_a^b fq(u)_x dx = [fq(u)]_a^b - \int_a^b f_x q(u) dx, \quad (3.30)$$

natomiast całka po czasie wynosi

$$\int_0^T fu_t dt = [fu]_0^T - \int_0^T f u dt. \quad (3.31)$$

Wyrazy graniczne będące wynikiem całkowania przez części są nam niepotrzebne i jedynym sposobem aby pozbyć się ich wszystkich jest zażądanie od  $f$  aby znikać na odpowiednich bokach prostokąta  $[a, b] \times [0, T]$ .

**Definicja 13.** Funkcja  $f$  należy do klasy  $C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ , czyli jest funkcją gładką o zwartym nośniku jeżeli znika poza pewnym domkniętym i ograniczonym podzbiorem dziedziny (poza swoim nośnikiem).

Powyższa definicja określa bardzo naturalną klasę funkcji próbnych (patrz Rys. ). Jeśli teraz  $[a, b] \times [0, T]$  są wybrane tak, aby nośnik funkcji  $f$  zawarty był tym prostokącie to wyrazy graniczne w całkowaniu przez części zostają i ostatecznie otrzymujemy

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (f_t u + f_x q(u)) dx dt + \int_{-\infty}^\infty f \phi dx = 0, \quad (3.32)$$

gdzie obszary całkowania rozszerzyliśmy do nieskończoności ponieważ  $f$  znika poza ograniczonym zbiorem. Pokazaliśmy, że jeśli  $u$  jest klasycznym rozwiązaniem zagadnienia (3.28) to spełnia również równanie całkowe (3.32), gdzie  $f$  jest dowolną funkcją klasy  $C_c^1$ . Zauważmy, że ten ostatni wzór ma jedną bardzo ważną zaletę - nie zawiera pochodnych funkcji  $u$ . Wymagamy jedynie oby powyższe całki istniały. Przez to, że  $f$  ma zwarty nośnik nie jest to wielkie wymaganie i wystarczy na przykład aby  $u$  była ograniczona i kawałkami gładka. Okazuje się, że cała informacja o rozwiązaniu zagadnienia (3.28) jest również zawarta w (3.32).

**Definicja 14.** Ograniczona i kawałkami gładka funkcja  $u = u(x, t)$  jest słabym rozwiązaniem zagadnienia (3.28) z ograniczonym i kawałkami gładkim warunkiem początkowym  $\phi$  jeżeli dla każdej funkcji  $f \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$  zachodzi (3.32).

W innych rozważaniach powyższą definicję można poważnie osłabić ale dla naszych potrzeb jest ona dostatecznie ogólna. Zobaczyliśmy, że zawiera ona klasyczne rozwiązania i spodziewać się możemy, że obejmuje również te będące falami uderzeniowymi. Pokażemy teraz, że warunek Rankine'a-Hugoniota może być wyprowadzony z naszej nowej definicji.

Podobnie jak wcześniej niech  $s = s(t)$  oznacza krzywą, na której funkcja  $u$  ma nieciągłość. Wybierzmy teraz kulę  $B$  zawartą w całości w  $t > 0$  i otaczającą  $s$  w dowolnym punkcie. Niech  $B_1$  oraz  $B_2$  oznaczają te części kuli, które leżą odpowiednio po lewej i po prawej stronie krzywej  $s$  (Rys. ). Wybierzmy  $f \in C_c^1(B)$  i skorzystajmy z (3.32)

$$0 = \iint_B (f_t u + f_x q(u)) dx dt = \int_0^\infty \iint_{B_1} (f_t u + f_x q(u)) dx dt + \iint_{B_2} (f_t u + f_x q(u)) dx dt. \quad (3.33)$$

Ponieważ na każdym zbiorze  $B_{1,2}$  funkcja  $u$  jest gładka to możemy napisać  $f_t u = (fu)_t - tu_t$  i podobnie  $f_x q(u) = (fq(u))_x - fq(u)_x$  co daje nam

$$f_t u + f_x q(u) = (fu)_t + (fq(u))_x - f(u_t + q(u)_x) = (fu)_t + (fq(u))_x. \quad (3.34)$$

Ponieważ  $u$  spełnia równanie różniczkowe na każdym z rozpatrywanych zbiorów. Skorzystajmy teraz ze wzoru Greena dla całek podwójnych<sup>9</sup> aby otrzymać

$$0 = \oint_{\partial B_1} -f u dx + f q(u) dt + \oint_{\partial B_2} -f u dx + f q(u) dt. \quad (3.35)$$

Ponieważ funkcja  $f$  ma zwarty nośnik zawarty w  $B$  to jej wartość wynosi 0 na brzegu tego obszaru. Powyższe całki redukują się zatem do całki po  $s$ . Oznaczmy zatem lewo- i prawostronną granicę  $u$  na  $s$  przez  $u_\pm$ , czyli  $u_\pm(t) := u(s(t)^\pm, t)$ . Otrzymujemy

$$0 = \int_s -f u_- dx + f q(u_-) dt - \int_s -f u_+ dx + f q(u_+) dt, \quad (3.36)$$

<sup>9</sup>  $\iint_D (Q_x - P_y) dx dy = \oint_{\partial B} P dx + Q dy.$

gdzie znak minus przed drugą całką wynika z tego, że zorientowana jest ona odwrotnie do pierwszej (Rys. ). Łącząc całki docieramy do

$$0 = \int_s f([u]dx - [q(u)]dt). \quad (3.37)$$

Aby zamienić całkę krzywoliniową na całkę Riemanna wprowadźmy parametryzację krzywej, czyli  $s = s(t)$  wtedy  $dx = s'(t)dt$ , zatem

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} f([u]s'(t) - [q(u)]) dt, \quad (3.38)$$

gdzie  $t_{0,1}$  są odpowiednimi granicami zmienności parametru. Ponieważ  $f$  jest dowolna to

$$[u]s'(t) - [q(u)] = 0, \quad (3.39)$$

co jest dokładnie warunkiem Rankine'a-Hugoniota. Widać zatem, że słabe rozwiązanie równania quasi-liniowego automatycznie bierze pod uwagę falę uderzeniową.

O ile proces przejścia z równania całkowego do różniczkowego jest jednoznaczny o ile założymy istnienie odpowiednich pochodnych. To proces odwrotny, czyli rozpatrywanie rozwiązania słabego, może być przeprowadzony na wiele sposobów.

**Przykład.** Jasne jest, że każde gładkie rozwiązanie równania  $u_t + uu_x = 0$  spełnia

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0, \quad (3.40)$$

co wskazuje, że strumień wynosi  $q(u) = u^2/2$ . Ale jeśli przemnożymy główne równanie przez  $u$  to dostaniemy

$$0 = u(u_t + uu_x) = uu_t + u^2u_x = \left(\frac{u^2}{2}\right)_t + \left(\frac{u^3}{3}\right)_x. \quad (3.41)$$

Jeśli teraz rozwiązanie posiada falę uderzeniową to jak wiemy, warunek dla pierwszego równania wynosi  $s'(t) = [u^2/2]/[u]$  a dla drugiego  $s'(t) = [u^3/3]/[u^2/2]$  (jak można pokazać). Są one różne i z samej tylko wiedzy o równaniu różniczkowym nie jesteśmy nigdy w stanie wskazać poprawnego warunku skokowego. Sytuacja jest niestety jeszcze gorsza niż się wydaje (zadanie).

Jak widać samo równanie różniczkowe opisujące prawo zachowania nie jest w stanie zapewnić nam jednoznacznej informacji o prędkości fali uderzeniowej. Na szczęście, w zastosowaniach bardzo często zjawisko fizyczne jest nam dobrze znane i tym samym posiadamy wiedzę o strumieniu. Zatem fizyka jest w stanie usunąć problem niejednoznaczności. Jednak dla posiadania kompletnej *matematycznej* teorii równań quasi-liniowych nie możemy zakładać, że ktoś z góry poda nam postać strumienia. Potrzebujemy zatem warunku, który spośród wszystkich słabych rozwiązań danego problemu jest w stanie wybrać nam to jedno właściwe. Również i tutaj fizyka przychodzi nam z pomocą a dokładniej termodynamika. Druga zasada termodynamiki mówi, że entropia<sup>10</sup> danego układu izolowanego nie może maleć. W naszych okolicznościach tłumaczy się to bezpośrednio na prędkość propagacji fali uderzeniowej. Nie będziemy tutaj wchodzić w szczegóły ale okazuje się, że przy pewnych założeniach na  $q$  równanie quasi-liniowe posiada dokładnie jedno słabe rozwiązanie dla

$$q'(u_-) < s' < q'(u_+). \quad (3.42)$$

Jest to tak zwany *warunek entropii*.

<sup>10</sup>Entropia w potocznym znaczeniu jest miarą nieuporządkowania danego układu.

## 4 Układy równań pierwszego rzędu

Matematyczny opis bardzo wielu zjawisk z konieczności musi opierać się na rozważeniu kilku wielkości, które są istotne dla danej sytuacji. Często też te wielkości są współzależne co bardzo komplikuje model który staje się wtedy układem powiązanych równań różniczkowych. W tej części wykorzystamy naszą wiedzę, którą nabyliśmy aby postarać się zbadać układ dwóch lub więcej równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu. Zaczniemy od dwóch bardzo ważnych przykładów: równań płytkiej wody oraz równań dynamiki gazu.

**Przykład** (*Równania płytkiej wody*). Jednym z podstawowych równań geofizycznej mechaniki płynów jest równanie opisujące dynamikę oceanu lub atmosfery, w którym zakładamy że skale poziome ruchu są dużo większe niż skala pionowa. Jest to oczywiście prawdą dla oceanu, gdzie średnia głębokość jest rzędu 6 – 7km oraz dla atmosfery, gdzie większość istotnych dla pogody ruchów przebiega w troposferze czyli w pierwszych 10km nad powierzchnią ziemi. Jak łatwo zobaczyć z jakiegokolwiek mapy pogody, cyrkulacje wody i powietrza mają często zasięg tysięcy kilometrów. Te układy są zatem płytkie. Wyprowadzimy układ dwóch równań, które opisują właśnie taką sytuację. Zauważmy, że nie ma znaczenia czy mówimy o oceanie, atmosferze czy jakimkolwiek innym naczyniu, którego wymiar pionowy jest dużo mniejszy niż poziomy.

Najpopularniejsze wyprowadzenie równań płytkiej wody polega na zastosowaniu rachunku zaburzeń do równań Eulera opisującej zachowanie masy i pędu dla płynu. My postąpimy inaczej i znajdziemy te równania w sposób elementarny. Przede wszystkim, dla uproszczenia i bez straty zbytnej ogólności założymy, że większość przepływu ma miejsce w przekroju  $x - y$ , gdzie  $x$  jest wymiarem poziomym a  $y$  pionowym. Zakładamy, że w kierunku  $z$  nic się nie dzieje (można bardzo łatwo zrezygnować z tego założenia i otrzymać jedno równanie więcej). Wyobraźmy sobie akwen wodny z płaskim dnem jak na Rys. (również tutaj założenie o zmiennym profilu dna nie przysporzyłoby większych problemów). Niech  $H$  oraz  $L$  oznaczają typowe skale przestrzenne przepływu: pionową i poziomą. Przepływ jest płytki jeżeli  $H \ll L$ . Wysokość swobodnej powierzchni wody oznaczmy przez  $h = h(x, t)$  a poziomą składową prędkości przepływu przez  $u = u(x, t)$ . Składowa pionowa, z kolei, jest zanedbywalnie mała z naszego założenia o płytkości akwenu. Ponadto, ciśnienie nad poziomem wody jest stałe i równe ciśnieniu atmosferycznemu. Przez odpowiedni dobór jednostek możemy zawsze założyć, że  $p_0 = 0$  na powierzchni  $y = h(x, t)$ .

Ponieważ przyspieszenie pionowe jest zanedbywalne, to ciśnienie na danej głębokości oceanu jest w przybliżeniu hydrostatyczne (w bardzo dobrym przybliżeniu). Oznacza to, że ciśnienie na ustalonym poziomie jest ciężarem kolumny cieczy znajdującej się nad tą głębokością. Jak pamiętamy oznacza to, że

$$p(x, y, t) = p_0 + \rho g(h(x, t) - y). \quad (4.1)$$

Ponadto spełnione jest oczywiście prawo zachowania masy płynu. Rozumując dokładnie tak samo jak w przypadku wyprowadzenia ogólnej postaci zasady zachowania musimy znaleźć strumień. W naszym przypadku strumień jest niczym innym jak strumieniem konwekcyjnym to znaczy ilość wody, który przekracza jednostkowy przekrój w jednostce czasu jest dokładnie ilością unoszoną przez przepływ. Rozważmy prostopadłościan o wymiarach  $\Delta x$ ,  $h$  oraz  $\Delta z$  masa takiego obszaru jest zachowana dlatego dla  $x \in [a, b]$  mamy

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \rho h(x, t) \Delta z dx = \rho u(a, t) h(a, t) \Delta z - \rho u(b, t) h(b, t) \Delta z. \quad (4.2)$$

Skracając przez  $\rho$ ,  $\Delta z$  oraz stosując standardową technikę otrzymania równania różniczkowego dostajemy

$$h_t + (uh)_x = 0. \quad (4.3)$$

Kolejnym krokiem jest zapisanie prawa zachowania pędu w postaci równania różniczkowego. Podobnie jak poprzednio, tutaj strumieniem będzie po prostu pęd wymnożony przez prędkość.

Jednak zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona do całkowitej zmiany pędu wchodzi również wkład pochodzący od sił działających na układ. W przypadku płytkiej i nielepkiej wody jedyną siłą, która generującą zmianę pędu jest ta pochodząca od ciśnienia hydrostatycznego. Zapiszmy zatem po kolei

$$\text{Całowity pęd} = \int_a^b \rho h(x, t) u(x, t) \Delta z dx. \quad (4.4)$$

następnie

$$\text{Strumień pędu} = \rho h(a, t) u(a, t) u(a, t) \Delta z - \rho h(b, t) u(b, t) u(b, t) \Delta z \quad (4.5)$$

oraz

$$\text{Całkowita siła pochodząca od ciśnienia w } x = \int_0^{h(x, t)} p(x, y, t) \Delta z dy = h(x, t) p_0 + \frac{1}{2} \rho g h(x, t)^2 \Delta z. \quad (4.6)$$

Ta ostatnia całka jest potrzebna ponieważ siła hydrostatyczna zmienia się wraz z wysokością i pod uwagę musimy wziąć wkład od całej głębokości. Wypadkowa siła hydrostatyczna jest oczywiście różnica powyższego wyrażenia wziętego w punktach  $x = a$  oraz  $x = b$ . Łącząc wszystkie wkłady do zmiany pędu otrzymujemy

$$\frac{d}{dt} \int_a^b h(x, t) u(x, t) dx = h(a, t) u(a, t)^2 - h(b, t) u(b, t)^2 + \frac{1}{2} g h(a, t)^2 - \frac{1}{2} g h(b, t)^2, \quad (4.7)$$

gdzie skróciliśmy przez  $\rho$  oraz  $\Delta z$ . Ponieważ  $a$  i  $b$  są dowolne więc możemy przejść do granicy otrzymując

$$(hu)_t + \left( hu^2 + \frac{1}{2} gh^2 \right)_x = 0. \quad (4.8)$$

Równania (4.3) oraz (4.8) stanowią układ dwóch nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych opisujących wysokość swobodnego brzegu wody  $h$  oraz prędkość przepływu  $u$ . Równania płytkiej wody zapisywane są zwykle w innej postaci, która nie wskazuje na wielkości zachowane. Rozwińmy najpierw (4.3) aby dostać

$$h_t + uh_x + u_x h = 0. \quad (4.9)$$

Podobnie równanie (4.8) można rozpisać

$$h_t u + u_t h + h_x u^2 + 2huu_x + gh h_x = 0. \quad (4.10)$$

Wymnażając pierwsze z nich przez  $u$  dostajemy

$$h_t u + h_x u^2 + hu u_x = 0, \quad (4.11)$$

co wraz z drugim równaniem redukuje się do

$$u_t + uu_x + gh_x = 0. \quad (4.12)$$

Zauważmy, że jeśli  $h_x$  byłoby znane to powyższe równanie jest dokładnie takiej samej formy jak wcześniej rozważane przez nas równania quasi-liniowe. Swobodna powierzchnia nie jest jednak nam znana *a-priori* bo jej kształt zależy od prędkości przepływu. Musimy zatem rozwiązać dwa równania na raz.

**Przykład (Równania dynamiki gazów).** Znajdziemy teraz równania, które wymagane są do opisu przepływu ściśliwego gazu na przykład w tłoku, w aerodynamice, akustyce a także przy wybuchu bomby atomowej. Równania, do których niebawem dojdziemy stanowią jeden z najważniejszych

przykładów układów równań quasi-liniowych. Są one ważne nie tylko z powodów praktycznych czy matematycznych ale przede wszystkim historycznych. To właśnie one stały się motywacją do bardzo wnikliwych badań nad strukturą nieliniowych równań cząstkowych. Pojęcie fali uderzeniowej ma swoje korzenie właśnie w tym temacie. Nasze wyprowadzenie będzie z konieczności elementarne i czasem intuicyjne.

Dla uproszczenia będziemy zakładać, że przepływ następuje wzdłuż osiowo-symetrycznej rury o przekroju  $A$ . Czyli ruch odbywa się głównie w jednym wymiarze. Przez  $u = u(x, t)$  oznaczymy prędkość przepływu,  $\rho = \rho(x, t)$  jest gęstością a  $p = p(x, t)$  ciśnieniem gazu w punkcie  $(x, t)$ . Podobnie jak poprzednio możemy od razu zapisać zachowanie masy gazu

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \rho A dx = \rho(a, t)u(a, t)A - \rho(b, t)u(b, t)A, \quad (4.13)$$

co od razu daje nam

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0. \quad (4.14)$$

W mechanice płynów powyższe równanie zachowania masy nazywane jest często *równaniem ciągłości*. Również podobnie jak w przypadku płytkiej wody możemy zapisać równanie zachowania pędu - jedyną siłą działającą na przekrój rury jest siła pochodząca od ciśnienia

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \rho u A dx = \rho(a, t)u(a, t)^2 A - \rho(b, t)u(b, t)^2 A + p(a, t)A - p(b, t)A. \quad (4.15)$$

Stąd, przy założeniu różniczkowalności, otrzymujemy

$$(\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x = 0. \quad (4.16)$$

Wykorzystując zachowanie masy możemy przekształcić powyższe równanie do tak zwanego *równania Eulera*

$$\rho(u_t + uu_x) + p_x = 0. \quad (4.17)$$

Zauważmy, że otrzymaliśmy dwa równania (4.14) oraz (4.17) na trzy niewiadome  $\rho$ ,  $p$  oraz  $u$ . Problem nie jest zatem dobrze postawiony i musimy szukać trzeciego równania. Zadanie to wykonane jest przez tak zwane równanie stanu (w naszym przypadku jest to równanie konstytutywne), które wiąże ze sobą ciśnienie, gęstość oraz inne zmienne termodynamiczne. Jest ono zależne od typu gazu, z którym mamy do czynienia. My założymy, że gaz jest doskonały ponieważ to przybliżenie okazuje się bardzo dokładne dla ogromnego zbioru różnych rzeczywistych gazów w normalnych warunkach

$$p = R\rho T. \quad (4.18)$$

Zapewniliśmy zatem zależność między ciśnieniem a gęstością jednak wprowadziliśmy dodatkową zmienną - temperaturę. Musimy skorzystać z kolejnej zasady mówiącej jak temperatura zmienia się w czasie i przestrzeni. Jest to oczywiście zasada zachowania energii: kinetycznej oraz wewnętrznej (ciepła) mówiąca, że zmiana energii wewnątrz dowolnego odcinka  $[a, b]$  jest równa strumieniowi energii oraz pracy wykonanej przez siły pochodzące od ciśnienia. Gęstość energii kinetycznej to  $\frac{1}{2}\rho u^2$  a gęstość energii wewnętrznej na jednostkę masy oznaczmy przez  $e = e(x, t)$ . Zatem

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_a^b \rho \left( \frac{1}{2}u^2 + e \right) A dx = \\ & -\frac{1}{2}\rho(x, t)u(x, t)^3 A|_a^b - \rho(x, t)e(x, t)u(x, t)A|_a^b - p(x, t)u(x, t)A|_a^b, \end{aligned} \quad (4.19)$$

gdzie po prawej stronie znajdują się strumienie energii kinetycznej, wewnętrznej oraz praca sił ciśnienia wykonana na odcinku. Przechodząc do równania różniczkowego dostajemy

$$\left[ \rho \left( \frac{1}{2} u^2 + e \right) \right]_t + \left[ \rho u \left( \frac{1}{2} u^2 + e \right) + pu \right]_x = 0. \quad (4.20)$$

Dla gazu doskonałego mamy również równanie stanu opisujące związek energii wewnętrznej z temperaturą

$$e = c_v T, \quad (4.21)$$

gdzie  $c_v$  jest ciepłem właściwym obliczonym przy stałej objętości. Ostatecznie, z łatwością można pokazać, że

$$\rho c_v (T_t + u T_x) + pu_x = 0. \quad (4.22)$$

Równania (4.14), (4.17), (4.18) oraz (4.22) stanowią zamknięty układ nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych stanowiących matematyczny opis dynamiki przepływu ściśliwego i nielepkiego gazu.

**Przykład.** (*Akustyka*) Załóżmy, że gaz jest barotropowy czyli jego ciśnienie zależy tylko od gęstości, czyli  $p = f(\rho)$ . Połóżmy  $c^2 := f'(\rho)$ , czyli  $c$  jest prędkością dźwięku w płynie. Załóżmy, że gaz jest w równowadze statycznej czyli punkcie, w którym  $u = 0$ ,  $\rho = \rho_0$  oraz  $p = p_0$ . Niech  $c_0^2 := f'(\rho_0)$  oraz rozpatrzmy jak zachowują się małe odchylenia  $U$  oraz  $R$  od tego stanu równowagi

$$u = 0 + U, \quad \rho = \rho_0 + R. \quad (4.23)$$

Dla nas „małe” oznacza, że

$$|U| \ll 1, \quad \left| \frac{R}{\rho_0} \right| \ll 1. \quad (4.24)$$

O pochodnych  $U$  oraz  $R$  zakładamy to samo. Kiedy podstawimy powyższe rozwinięcie do równań (4.14) oraz (4.17) i zignorujemy wszystkie wyrazy rzędu kwadratowego i wyższe to dostaniemy

$$\begin{cases} \rho_0 U_t + c_0^2 R_x = 0, \\ R_t + \rho_0 U_x = 0. \end{cases} \quad (4.25)$$

Jeśli teraz zróżniczkujemy każde równanie przez  $x$  (lub  $t$ ) a później podstawimy je to otrzymamy równania rzędu drugiego

$$R_{xx} = c_0^2 R_{xx}, \quad U_{tt} = c_0^2 U_{xx}. \quad (4.26)$$

Jest to tak zwane *równanie falowe*, którym zajmiemy się niżej. Zauważmy, że akustyka jest rządzona przez równanie liniowe drugiego rzędu. Jest ono dużo łatwiejsze do analizy niż pełen układ równań dynamiki gazu.

## 4.1 Charakterystyki

Podobnie jak dla pojedynczych równań pierwszego rzędu, również dla układów istnieje pojęcie szczególnych kierunków, w których informacja jest propagowana. Tutaj, jednak sytuacja jest bardziej skomplikowana. Z konieczności skupimy się jedynie na przykładzie równań płytkiej wody i nie będziemy się zagłębiać w ogólną klasyfikację układów.

Rozważmy

$$h_t + u h_x + h u_x = 0, \quad u_t + u u_x + g h_x = 0. \quad (4.27)$$

Szukamy teraz szczególnych kierunków w czasoprzestrzeni, które pojawiają się w obu równaniach jednocześnie. To znaczy, wzorem równań pierwszego rzędu chcemy *jednocześnie* sprowadzić nasze wyrażenia do pochodnej całkowej. Weźmy kombinację liniową powyższych równań

$$\alpha [h_t + u h_x + h u_x] + \beta [u_t + u u_x + g h_x] = 0, \quad (4.28)$$



oraz wyciągnijmy pochodne przestrzenne przed nawias

$$\alpha \left[ u_t + \left( u + \frac{\beta}{\alpha} g \right) h_x \right] + \beta \left[ u_t + \left( u + \frac{\alpha}{\beta} h \right) u_x \right] = 0. \quad (4.29)$$

Widzimy zatem, że pochodne zupełne z  $u$  i z  $h$  będą w tym samym kierunku jeżeli

$$\frac{\beta}{\alpha} g = \frac{\alpha}{\beta} h, \quad (4.30)$$

to znaczy

$$\frac{\alpha}{\beta} = \pm \sqrt{\frac{h}{g}}, \quad (4.31)$$

wystarczy zatem wziąć  $\beta = 1$  oraz  $\alpha = \pm \sqrt{\frac{h}{g}}$ . Dla wyboru dodatniego znaku dostajemy

$$h_t + (u + \sqrt{gh})h_x + \sqrt{\frac{h}{g}} \left[ u_t + (u + \sqrt{gh})u_x \right] = 0, \quad (4.32)$$

a dla ujemnego

$$h_t + (u - \sqrt{gh})h_x - \sqrt{\frac{h}{g}} \left[ u_t + (u - \sqrt{gh})u_x \right] = 0. \quad (4.33)$$

Przekształciliśmy zatem nasz wyjściowy układ równań w równoważny jemu ale posiadający dokładnie wyszczególnione kierunki  $u \pm \sqrt{gh}$ . Jeśli zatem

$$\frac{dX}{dt} = U \pm \sqrt{gH}, \quad (4.34)$$

to powyższe równania płytkiej wody sprowadzają się do równań zwyczajnych

$$\frac{dH}{dt} \pm \sqrt{\frac{h}{g}} \frac{dU}{dt} = 0, \quad (4.35)$$

gdzie  $U = u(X(t), t)$  oraz  $H(t) = h(X(t), t)$ . Równania (4.34)-(4.35) tworzą układ charakterystyczny dla naszego układu równań. Zagadnienie cząstkowe zostało zatem sprowadzone do badania równań zwyczajnych. Ta technika poszukiwania charakterystyk jest bardzo ogólna i można ją zastosować dla wielu innych zagadnień.

## 4.2 Metoda Riemanna

Jednym z pionierów badań nad układami równań cząstkowych był B. Riemann. Zilustrujemy jego sposób rozwiązywania układów na przykładzie równań płytkiej wody. Kluczem jest znalezienie pewnych wyrażeń, które są stałe na charakterystykach (podobnie jak dla pojedynczych równań). Nazywane są one *niezmiennikami Riemanna*.

Zanim przystąpimy do analizy poczyńmy uwagę na temat warunku Rankine'a-Hugoniota dla układów równań. Jeżeli układ ma postać

$$F_k(x, t, u)_t + G_k(x, t, u)_x = 0, \quad k = 1 \dots n, \quad (4.36)$$

to łatwo można się przekonać, że odpowiednie warunki na prędkość fali uderzeniowej  $s'$  mają postać

$$s' = \frac{[G_k]}{[F_k]}, \quad k = 1 \dots n. \quad (4.37)$$

Na przykład, dla równań płytkiej wody zapisanych w postaci zachowanie (4.3) i ((4.3)) mamy

$$s' = \frac{[hu]}{[u]}, \quad s' = \frac{[hu^2 + h^2/2]}{[hu]}. \quad (4.38)$$

Pokażemy na czym polega metoda Riemanna rozwiązując zagadnienie otwarcia tamy. Załóżmy, że woda w zalewie utrzymuje się na wysokości 1 dla  $x < 0$ . W  $x = 0$  znajduje się tama, która ogranicza puste koryto. W czasie  $t = 0$  następuje otwarcie tamy. Rozwiązujemy zatem równania płytkiej wody z warunkami

$$u(x, 0) = 0, \quad h(x, 0) = \begin{cases} 1, & x < 0; \\ 0, & x > 0. \end{cases} \quad (4.39)$$

Wprowadzając odpowiednie skalowanie<sup>11</sup> otrzymujemy równania, dla których  $g = 1$ . Będziemy się trzymać tego doboru jednostek. Zauważmy, że równanie (4.35) można od razu scałkować otrzymując

$$R^\pm := 2\sqrt{H} \pm U = \text{const.} \quad \text{na} \quad C^\pm : \frac{dX}{dt} = U \pm \sqrt{H}. \quad (4.40)$$

Wyrażenia  $R^\pm$  nazywane są *niezmiennikami Riemanna* ponieważ są stałe na charakterystykach  $C^\pm$ . Charakterystyki  $C^-$ , które rozpoczynają się na ujemnej części osi  $x$  mają prędkość  $-1$  a  $C^+$  prędkość  $1$ . Prędkość ta jest stała dla całej charakterystyki z osobna dla  $x < -t$  ponieważ tam  $u = 0$  i  $h = 1$ . Jest to obszar, który pozostaje niezmienny w każdym czasie po otwarciu tamy. Na tym obszarze  $R^\pm = 2$ .

Woda powinna przemieszczać się do obszaru  $x > 0$  w postaci fali uderzeniowej, dla której

$$s' = u_-, \quad s' = \frac{u_-^2 + h_-^2/2}{u_-}. \quad (4.41)$$

Od razu widzimy, że  $h_- = 0$ . Aby znaleźć prędkość propagacji musimy wyznaczyć wartość  $u$  zaraz za falą. Charakterystyka  $C^+$  rozpoczyna się na ujemnej części osi  $x$ . Na niej  $R^+ = 2$  a ponieważ warunki początkowe są stałe to ten niezmiennik pozostaje równy  $2$  dla całego obszaru na lewo od fali uderzeniowej. Zatem  $2 = 2\sqrt{h_-} + u_-$ , co daje  $u_- = 2$ , czyli  $s' = 2$ . Ostatecznie  $s = 2t$ .

Pozostaje jedynie znaleźć wartość rozwiązanie pomiędzy ujemnymi charakterystykami a falą. Poprzednio nauczyliśmy się, że w tym obszarze powinien istnieć wachlarz, czyli zbiór charakterystyk  $C^-$  ciągle zmieniających się od  $x = -t$  do  $x = 2t$ . Mamy zatem

$$X = (U - \sqrt{h})t, \quad (4.42)$$

czyli

$$U = \frac{X}{t} + \sqrt{H}. \quad (4.43)$$

Łącząc to z niezmiennikiem Riemanna mamy

$$u = \frac{2}{3} \left( \frac{x}{t} + 1 \right), \quad h = \frac{(2 - x/t)^2}{9}. \quad (4.44)$$

<sup>11</sup>Skalując czas przez  $T$ , przestrzeń przez  $L$ , wysokość przez  $H$  oraz prędkość przez  $\sqrt{gH}$ .

### 4.3 Ogólna klasyfikacja układów równań

Naśladowując naszą analizę szczególnego przypadku równań płytkiej wody możemy wyprowadzić ogólne warunki klasyfikacji układów równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu. Podobnie jak powyżej będziemy szukać szczególnych kierunków, dla których cały układ da się zapisać w postaci pochodnej zupełnej.

Zapiszmy najpierw nasz układ równań w postaci macierzowej, która bardzo ułatwi analizę

$$\mathbf{u}_t + A(x, t, \mathbf{u})\mathbf{u}_x = \mathbf{g}(x, t, \mathbf{u}), \quad (4.45)$$

gdzie  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ ,  $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n)$  oraz  $A = (a_{ij})$  jest macierzą współczynników równań, które oczywiście mogą być zależne od  $x$ ,  $t$  oraz  $\mathbf{u}$ . Poszukamy teraz rodziny krzywych (charakterystyk), na których układ równań cząstkowych będzie mógł być zamieniony na układ równań zwyczajnych. Kluczem jest żądanie aby pochodna kierunkowa wzdłuż każdej krzywej była pochodną zupełną dla dowolnej składowej wektora  $\mathbf{u}$ . Weźmy zatem kombinację liniową równań (??), to jest pomnóżmy je obustronnie przez wektor  $\mathbf{v}$

$$\mathbf{v}^T \mathbf{u}_t + \mathbf{v}^T A(x, t, \mathbf{u})\mathbf{u}_x = \mathbf{v}^T \mathbf{g}(x, t, \mathbf{u}). \quad (4.46)$$

Chcemy teraz aby powyższe wyrażenie mogło być zapisane w postaci pochodnej zupełnej, to jest

$$\mathbf{w}^T (\mathbf{u}_t + \lambda \mathbf{u}_x) = \mathbf{v}^T \mathbf{g}(x, t, \mathbf{u}), \quad (4.47)$$

dla pewnych  $\mathbf{w}$  oraz  $\lambda$ . Porównując dwa powyższe wyrażenia widać, że musimy mieć  $\mathbf{w} = \mathbf{v}$  oraz  $\lambda \mathbf{w}^T = \mathbf{v}^T A$ , czyli

$$\mathbf{v}^T A = \lambda \mathbf{v}^T. \quad (4.48)$$

Oznacza to, że  $\mathbf{v}^T$  musi być lewym wektorem własnym macierzy  $A$ . Wtedy jeśli  $X = X(t)$  będą zdefiniowane poprzez

$$\frac{dX}{dt} = \lambda(x, t, \mathbf{u}), \quad (4.49)$$

to układ (4.45) sprowadza się do

$$\mathbf{v}^T \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{v}^T \mathbf{g}(x, t, \mathbf{u}), \quad (4.50)$$

gdzie  $\mathbf{U} = \mathbf{u}(X(t), t)$ . Analogicznie jak poprzednio, krzywe zdefiniowane równaniami (4.49) nazywane są *charakterystykami*. Wartość własna  $\lambda$  definiuje nam kierunek charakterystyki. Ponieważ mamy  $n$  równań spodziewamy się, że otrzymamy również  $n$  charakterystyk. Jak wiemy z algebry, nie zawsze musi być to prawdą. Twierdzenie spektralne mówi, że jeśli rzeczywista macierz  $A$  jest symetryczna to posiada dokładnie  $n$  różnych wartości własnych.

**Definicja 15.** Układ równań quasi-liniowych (4.45) nazywany jest

- Hiperbolicznym jeśli macierz  $A$  posiada dokładnie  $n$  rzeczywistych wartości własnych oraz  $n$  liniowo niezależnych wektorów własnych. Jeśli wszystkie wartości własne są różne to układ nazywany jest ściśle hiperbolicznym.
- Eliptycznym jeśli macierz  $A$  nie ma rzeczywistych wartości własnych.
- Parabolicznym jeśli macierz  $A$  ma  $n$  rzeczywistych wartości własnych oraz mniej niż  $n$  liniowo niezależnych wektorów własnych.

**Przykład.** Zobaczmy jakiego typu jest pojedyncze równanie quasi-liniowe

$$u_t + c(x, t, u)u_x = g(x, t, u). \quad (4.51)$$

Macierz  $A$  jest po prostu skalarem  $c$ , który ma dokładnie jedną rzeczywistą wartość własną  $c$  oraz dokładnie jeden wektor własny  $\mathbf{v} = (1)$ . Jest to zatem równanie ściśle hiperboliczne.

**Przykład.** Sprawdźmy jak nasza ogólna metoda klasyfikacji wygląda dla równań płytkiej wody (4.3)-(4.12). Macierz układu ma postać

$$A = \begin{pmatrix} u & h \\ g & u \end{pmatrix}. \quad (4.52)$$

Rozwiązując równanie charakterystyczne  $\det(A - \lambda I) = 0$  otrzymujemy dwie wartości własne  $\lambda_{\pm} = u \pm \sqrt{gh}$ , które oczywiście są różne oraz rzeczywiste. Układ jest zatem hiperboliczny. Jak łatwo policzyć, wektory własne mają postać  $\mathbf{v}_{\pm} = (1, \pm \sqrt{h/g})$  czyli układ jest ściśle hiperboliczny.

## 5 Klasyfikacja równań drugiego rzędu

Okazuje się, że duża część równań fizyki matematycznej jest rzędu drugiego. W dalszej części wykładu zajmiemy się właśnie nimi. Zanim przejdziemy do szczegółowej analizy trzech fundamentalnych równań: ciepła (parabolicznego), Laplace'a (eliptycznego) oraz fali (hiperbolicznego), przyjrzymy się dlaczego rzeczywiście są one tak ważne. Dla ustalenia uwagi i poczynienia pewnych uproszczeń będziemy rozważać przypadki, gdzie występują tylko dwie zmienne niezależne (zwykle  $(x, t)$  lub  $(x, y)$  w zależności od interpretacji fizycznej). Nieznaną funkcję wciąż oznaczajmy przez  $u$ . Zdefiniujemy najpierw klasę równań, z jakimi będziemy mieć do czynienia.

**Definicja 16.** *Równaniem liniowym względem najwyższych pochodnych nazywamy równanie postaci*

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \quad (5.1)$$

dla pewnej (być może nieliniowej) funkcji  $F$ .

Chcielibyśmy być w stanie przetransformować powyższe równanie do prostszej postaci poprzez odpowiedni wybór nowych (gładkich) zmiennych  $\xi = \xi(x, y)$  oraz  $\eta = \eta(x, y)$ , o których zakładamy, że ich Jakobian nie znika na pewnym obszarze, to jest  $\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \neq 0$ . Jest to wymagane do odwracalności przekształcenia, czyli możliwości napisania jednoznacznie określonych funkcji odwrotnych  $x = x(\xi, \eta)$  oraz  $y = y(\xi, \eta)$ . Niech  $v(\xi, \eta) := u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ , co daje  $u(x, y) = v(\xi(x, y), \eta(x, y))$ . Obliczając pochodne otrzymujemy

$$\begin{aligned} u_x &= v_{\xi} \xi_x + v_{\eta} \eta_x, & u_y &= v_{\xi} \xi_y + v_{\eta} \eta_y, \\ u_{xx} &= v_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2v_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + v_{\eta\eta} \eta_x^2 + v_{\xi} \xi_{xx} + v_{\eta} \eta_{xx}, & u_{yy} &= v_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2v_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + v_{\eta\eta} \eta_y^2 + v_{\xi} \xi_{yy} + v_{\eta} \eta_{yy} \\ u_{xy} &= v_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + v_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + v_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + v_{\xi} \xi_{xy} + v_{\eta} \eta_{xy}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Kiedy podstawimy powyższe wyrażenia do równania (5.1) otrzymamy

$$A(\xi, \eta)v_{\xi\xi} + 2B(\xi, \eta)v_{\xi\eta} + C(\xi, \eta)v_{\eta\eta} + G = 0, \quad (5.3)$$

dla pewnej funkcji  $G$  wiążącej ze sobą zmienne niezależne, nieznaną funkcję oraz jej pochodne pierwszego rzędu ze względu na nowe zmienne. Funkcje  $A, B$  oraz  $C$  są zdefiniowane następująco

$$\begin{aligned} A &= a\xi_x^2 + 2b\xi_x \xi_y + c\xi_y^2, \\ B &= a\xi_x \eta_x + b(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + c\xi_y \eta_y, \\ C &= a\eta_x^2 + 2b\eta_x \eta_y + c\eta_y^2, \end{aligned} \quad (5.4)$$

gdzie  $a = a(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$  i podobnie dla  $b$  oraz  $c$ . Dla przejrzystości zapisu rezygnujemy z wypisywania argumentów funkcji.

Najwyższy czas skorzystać ze swobody w wyborze nowych zmiennych  $\xi$  i  $\eta$ . Zauważmy, że wzory na  $A$  i  $C$  w (5.4) mają dokładnie taką samą strukturę to znaczy, że jeśli  $\phi(x, y)$  jest rozwiązaniem równania

$$a\phi_x^2 + 2b\phi_x\phi_y + c\phi_y^2 = 0, \quad (5.5)$$

kładąc  $\xi = \phi(x, y)$  lub  $\eta = \phi(x, y)$  możemy mieć  $A = 0$  lub  $C = 0$  a tym samym bardzo uprościć równanie (5.3). Powyższe równanie nazywamy *charakterystycznym* a jego rozwiązania *charakterystykami* (podobnie jak w przypadku równań pierwszego rzędu). Dla ustalenia uwagi i bez utraty ogólności założmy, że  $a \neq 0$  oraz  $\phi_y \neq 0$  na pewnym obszarze. Możemy wtedy podzielić i otrzymać

$$a \left( \frac{\phi_x}{\phi_y} \right)^2 + 2b \frac{\phi_x}{\phi_y} + c = 0, \quad (5.6)$$

co jest trójmianem kwadratowym o zmiennej  $\phi_x/\phi_y$ . Jego wyznacznik wynosi

$$\Delta = b^2 - ac. \quad (5.7)$$

Jak dobrze wiemy znak  $\Delta$  determinuje ilość rozwiązań równania kwadratowego. Prowadzi nas to do najważniejszej klasyfikacji równań

**Definicja 17.** *Równanie drugiego rzędu (5.1) nazywamy*<sup>12</sup>

- hiperbolicznym, jeśli  $\Delta > 0$ ,
- parabolicznym, jeśli  $\Delta = 0$ ,
- eliptycznym, jeśli  $\Delta < 0$ .

Zbadamy teraz każdy z wymienionych przypadków. Zaczniemy od równań hiperbolicznych, dla których  $\Delta > 0$  to znaczy, że istnieją dwa rozwiązania (5.6)

$$\frac{\phi_x}{\phi_y} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} \quad \text{czyli} \quad \phi_x + \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} \phi_y = 0, \quad (5.8)$$

co stanowi dwa równania różniczkowe cząstkowe pierwszego rzędu. Spodziewać się zatem możemy, że istnieją ich dwa rozwiązania ogólne  $\phi_1$  oraz  $\phi_2$ . Możemy zatem położyć  $\xi(x, y) = \phi_1(x, y)$  oraz  $\eta(x, y) = \phi_2(x, y)$ . Dzięki czemu będziemy mieć  $A = B = 0$  i równanie (5.3) przyjmie postać kanoniczną

$$v_{\xi\eta} = H(\xi, \eta, v, v_\eta, v_\xi), \quad (5.9)$$

dla pewnego  $H$ . Najczęściej spotykana jest jednak inna postać kanoniczna, którą otrzymamy przyjmując

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad \beta = \frac{\xi - \eta}{2}. \quad (5.10)$$

Pozwala na to napisać (ćwiczenie)

$$w_{\alpha\alpha} - w_{\beta\beta} = \tilde{H}(\alpha, \beta, w, w_\alpha, w_\beta), \quad (5.11)$$

<sup>12</sup>Nazewnictwo od razu nasuwa skojarzenia z krzywymi stożkowymi. Podobieństwo jest bardzo duże ponieważ równanie kwadratowe  $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$  określa przecięcie płaszczyzny oraz stożka. Jego wyznacznik determinuje kształt tego przecięcia: hiperbola, elipsa lub okrąg oraz parabola.

dla  $w(\alpha, \beta) = v(\alpha + \beta, \alpha - \beta)$ . Zatem wszystkie równania hiperboliczne mogą być przetransformowane do powyższej postaci przez odpowiednią zamianę zmiennych. W przypadku najważniejszego równania hiperbolicznego, to jest równania fali, mamy  $\tilde{H} \equiv 0$ .

Dla przypadku parabolicznego mamy  $\Delta = 0$ , czyli (5.6) ma jedno rozwiązanie podwójne dane wzorem

$$\frac{\phi_x}{\phi_y} = -\frac{b}{a} \quad \text{czyli} \quad \phi_x + \frac{b}{a}\phi_y = 0. \quad (5.12)$$

Spodziewać się zatem możemy, że znajdziemy jedno rozwiązanie  $\phi$  powyższego równania. Kładąc  $\xi(x, y) = \phi(x, y)$  dostaniemy  $A = 0$ . Wybierając teraz *dowolną* funkcję  $\eta = \eta(x, y)$ , która jest niezależna z  $\xi$  (to znaczy, o niezerowym Jakobianie) zapewniamy, że  $B = 0$ . Żeby to zobaczyć zauważmy, że  $b^2 = ac$  oraz  $\xi_x = -b/a\xi_y$ , co daje

$$B = a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y = -b\xi_y\eta_x - \frac{b^2}{a}\xi_y\eta_y + b\xi_y\eta_x + c\xi_y\eta_y = 0. \quad (5.13)$$

Zatem równanie (5.3) możemy zapisać w postaci kanonicznej

$$v_{\eta\eta} = H(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta). \quad (5.14)$$

Przykładowo, dla  $H \equiv 0$  otrzymujemy równanie ciepła.

Równania eliptyczne charakteryzują się ujemnym wyznacznikiem, to jest  $\Delta < 0$ , co prowadzi do zespolonych rozwiązań (5.6). Przypomnijmy sobie, że takie rozwiązania muszą być sprzężone do siebie dlatego położmy  $\xi(x, y) = \phi(x, y)$  oraz  $\eta(x, y) = \overline{\phi(x, y)}$ . Podobnie jak w przypadku hiperbolicznym otrzymujemy  $A = C = 0$  jednak za cenę zespolonych zmiennych. Startowaliśmy jednak równania o współczynnikach rzeczywistych dlatego opłaca się wprowadzić kolejne współrzędne

$$\alpha := \frac{\xi + \eta}{2}, \quad \beta := \frac{\xi - \eta}{2i}. \quad (5.15)$$

Łatwo sprawdzić, że  $\alpha$  oraz  $\beta$  są rzeczywiste a równanie (5.3) przyjmuje postać

$$w_{\alpha\alpha} + w_{\beta\beta} = \tilde{H}(\alpha, \beta, w, w_\alpha, w_\beta), \quad (5.16)$$

dla pewnego  $H$  oraz  $w(\alpha, \beta) = v(\alpha + i\beta, \alpha - i\beta)$ . Przykładem równania eliptycznego jest równanie Laplace'a, dla którego  $\tilde{H} \equiv 0$ .

**Przykład.** Równanie

$$u_{xx} + yu_{yy} = 0, \quad (5.17)$$

ma  $a = 1, b = 0, c = y$ . Czyli

$$\Delta = b^2 - ac = -y \begin{cases} > 0, & y < 0; \\ = 0, & y = 0; \\ < 0, & y > 0. \end{cases} \quad (5.18)$$

Zatem równanie jest różnego typu w zależności od znaku  $y$ . Równania charakterystyk dla przypadku hiperbolicznego  $y < 0$  mają postać

$$\phi_x \pm \sqrt{y} \phi_y = 0. \quad (5.19)$$

Rozwiązaniem ogólnym tego równania jest dowolna funkcja  $\phi(x, y) = F(x - 2\sqrt{y})$ , więc wybrać możemy po prostu  $F(t) = t$  (zawsze tak będziemy robić). Kładziemy zatem

$$\xi(x, y) = x - 2\sqrt{y}, \quad \eta = x + 2\sqrt{y}. \quad (5.20)$$

$\Delta = b^2 - ac$	Typ	Postać kanoniczna
$\Delta > 0$	hiperboliczne	$u_{xx} - u_{yy} = \Phi$
$\Delta = 0$	paraboliczne	$u_{xx} = \Phi$
$\Delta < 0$	eliptyczne	$u_{xx} + u_{yy} = \Phi$

Tablica 1: Klasyfikacja równań różniczkowych cząstkowych rzędu drugiego o dwóch zmiennych niezależnych (5.1). Dla przejrzystości zapisu równanie przetransformowane piszemy używając tych samych zmiennych co pierwotnie.  $\Phi$  jest pewną funkcją zmiennych niezależnych, zależnej oraz jej pierwszych pochodnych.

Wtedy nasze równanie przyjmuje postać kanoniczną

$$v_{\xi\eta} = 0. \quad (5.21)$$

Jak zobaczyliśmy, dowolne równanie rzędu drugiego o dwóch zmiennych niezależnych może być przetransformowane do jednej z trzech form kanonicznych odpowiadających znakowi wyznacznika  $\Delta$ , który może być różny w różnych punktach. Podsumowanie wszystkich typów równań znajduje się w Tab. 1.

## 6 Równanie ciepła

Nasz przegląd równań drugiego rzędu rozpoczynamy od najważniejszego równania parabolicznego - równania ciepła (zwanego również równaniem przewodnictwa cieplnego lub równaniem dyfuzji). Jak jego nazwa wskazuje, powinno się ono pojawić przy opisie rozchodzenia się ciepła w ośrodku.

**Przykład.** (*Przewodnictwo cieplne*) Rozważmy pewien ośrodek, w którym rozprzestrzenia się energia cieplna (w jednym wymiarze będziemy mówili tradycyjnie o izolowanym pręcie). Ponieważ energia jest zachowana to musi być spełnione poniższe równanie

$$E_t + \nabla \cdot \mathbf{q} = F, \quad (6.1)$$

gdzie  $E$  jest energią na jednostkę objętości,  $\mathbf{q}$  strumieniem ciepła a  $F$  reprezentuje wszelkie źródła, czyli ilość generowanego ciepła na jednostkę czasu oraz objętości. Przez  $u = u(\mathbf{x}, t)$  oznaczmy temperaturę w punkcie  $\mathbf{x}$  oraz czasie  $t$ . Zgodnie z definicją ciepła właściwego  $c$  musimy wtedy mieć

$$E = c\rho u, \quad (6.2)$$

gdzie założyliśmy, że  $c$  nie zależy od temperatury<sup>13</sup>. Strumień ciepła  $\mathbf{q}$  jest dany *Prawem Fouriera* - ciepło przepływa z obszarów o wysokiej temperaturze do obszarów, które mają niższą temperaturę. Matematycznie zapisać je można w postaci

$$\mathbf{q} = -k(\mathbf{x}, t, u)\nabla u, \quad (6.3)$$

czyli ciepło płynie wzdłuż gradientu. Tutaj  $k$  oznacza *współczynnik przewodności cieplnej*, który jest stały dla jednorodnych ośrodków. Łącząc powyższe równania otrzymujemy *równanie przewodnictwa cieplnego*

$$c\rho u_t = \nabla \cdot (k(\mathbf{x}, t, u)\nabla u) + F, \quad (6.4)$$

<sup>13</sup>W rzeczywistości zarówno gęstość  $\rho$  jak i ciepło właściwe  $c$  są wolno-zmiennymi funkcjami temperatury. Wtedy równanie ciepła staje się nieliniowe a jego analiza dużo trudniejsza... oraz ciekawsza!

które dla stałego  $k$  ma postać

$$u_t = \alpha^2 \nabla^2 u + f, \quad (6.5)$$

gdzie  $\nabla^2$  jest Laplasjanem oraz  $\alpha^2 := \frac{k}{c\rho}$  i  $f := \frac{F}{c\rho}$ . W jednym wymiarze mamy z kolei

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} + f. \quad (6.6)$$

Dwa powyższe równania będą przedmiotem dalszego wykładu.

**Przykład.** (*Dyfuzja*) Załóżmy, że w powietrzu została rozpylona pewna substancja. Zgodnie z prawem Ficka będzie ona rozprzestrzeniała się do obszarów o niższym jej stężeniu. Można to zapisać jako

$$\mathbf{q} = -D(x, t, u) \nabla u. \quad (6.7)$$

Powyższy strumień jest niemal identyczny do tego danego prawem Fouriera. Tutaj współczynnik proporcjonalności  $D$  nazywany jest dyfuzyjnością. Zgodnie z powyższym równanie ciepła nazywane jest również równaniem dyfuzji.

**Przykład.** (*Ruch Browna*) Podamy teraz wyprowadzenie równania dyfuzji w ujęciu stochastycznym. Rozumowanie to ma swoje początki w pracach Einsteina oraz Smoluchowskiego. Niech  $x$  będzie ustalonym punktem na prostej  $\mathbb{R}$ . Wprowadzmy siatkę punktów o kroku  $h$ , to znaczy nasza cząstka początkowo umieszczona w punkcie  $x$  może poruszać się jedynie po  $x + kh$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ . Kiedy cząstka znajduje się w pewnym punkcie z prawdopodobieństwem  $p$  w czasie  $\tau$  wykonuje skok w prawo oraz z  $q = 1 - p$  skok w lewo. Niech  $u = u(x, t)$  oznacza prawdopodobieństwo, że w chwili  $t > 0$  cząstka znajduje się w punkcie  $x \in \mathbb{R}$ . Żeby znaleźć się w punkcie  $x$  w czasie  $t + \tau$  cząstka może przyjść z prawa lub z lewa, czyli

$$u(x, t + \tau) = pu(x - h, t) + qu(x + h, t). \quad (6.8)$$

Możemy teraz rozwinąć powyższe równanie różnicowe w szereg Taylora

$$\begin{aligned} u(x, t) + u_t(x, t)\tau + O(\tau^2) &= p \left( u(x, t) - u_x(x, t)h + \frac{1}{2}u_{xx}(x, t)h^2 \right) \\ &+ q \left( u(x, t) + u_x(x, t)h + \frac{1}{2}u_{xx}(x, t)h^2 \right) + O(h^3). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Powyższy wzór można przekształcić i otrzymać

$$u_t(x, t) = (q - p) \frac{h}{\tau} u_x(x, t) + \frac{h^2}{2\tau} u_{xx}(x, t) + O(\tau) + O(h^3), \quad (6.10)$$

gdy  $\tau, h \rightarrow 0$ . Chcemy teraz przejść granicy przy kroku siatki zmierzającym do zera. Aby to zrobić musimy założyć, że

$$\lim(q - p) \frac{h}{\tau} = c, \quad \lim \frac{h^2}{2\tau} = D, \quad (6.11)$$

gdzie  $D$  oraz  $c$  to stałe. Oznacza to, że prawdopodobieństwa skoku na skończoną odległość  $h$  maleją do zera tak jak  $h$ , czyli  $p - q = O(h)$ . Dostajemy równanie konwekcji-dyfuzji (ruch Browna z dryfem)

$$u_t + cu_x = Du_{xx}. \quad (6.12)$$

Gdy prawdopodobieństwo skoków jest jednakowe, czyli  $p = q = \frac{1}{2}$  to konwekcja nie ma miejsca

$$u_t = Du_{xx}. \quad (6.13)$$



Powyższe równanie paraboliczne pojawia się również w wielu innych sytuacjach, z których najważniejszym jest opis zjawiska dyfuzji, którą to zajmiemy się w zadaniach. Dyfuzja z kolei występuje praktycznie na każdej skali czasowej i przestrzennej: począwszy od błędzenia drobnych cząsteczek oraz bakterii, przez rozprzestrzenianie się zanieczyszczeń w rzekach a skończywszy na dynamice galaktyk. Równanie dyfuzji jest zatem prawdziwie uniwersalnym modelem, który pokazuje jak jedno równanie matematyczne jest w stanie opisać mnogość zjawisk fizycznych.

## 6.1 Obszary ograniczone oraz metoda rozdzielania zmiennych

W tej części ograniczymy się jedynie do rozważania sytuacji jednowymiarowej, dla której otrzymamy szereg bardzo ważnych wyników. Mimo ewidentnego uproszczenia, model jednowymiarowy opisuje wiele sytuacji fizycznych, w których ciepło rozprzestrzenia się w jednym wymiarze dużo szybciej niż w innych (np. symetryczny pręt). Rozważmy zatem odcinek  $[0, L]$  (Rys. ).

Samo równanie różniczkowe (6.6) opisuje nam dynamikę rozchodzenia się energii cieplnej. Aby dopełnić określenia sytuacji fizycznej musimy zadać odpowiednie warunki początkowe oraz brzegowe. Warunkiem początkowym jest rozkład temperatury w pierwszej chwili, za którą przyjmujemy  $t = 0$ . Mamy zatem

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad (6.14)$$

dla zadanej funkcji  $\phi$ . Warunki brzegowe, natomiast, zadane muszą być na brzegu odcinka  $[0, L]$ . Okazuje się, że mamy tutaj co najmniej trzy możliwości odpowiadające ważnym sytuacjom fizycznym.

1. *Warunek Dirichleta* (lub też warunek pierwszego rodzaju) oznacza zadanie temperatury na jednym z końców odcinka

$$u(0, t) = \mu(t) \quad \text{lub} \quad u(L, t) = \nu(t), \quad (6.15)$$

gdzie  $\mu$  i  $\nu$  są znanymi funkcjami. Warunek Dirichleta może opisywać sytuację, w której jeden z końców pręta trzymany jest w dokładnie zadanej temperaturze (na przykład w lodówce).

2. *Warunek von Neumanna* (lub też warunek drugiego rodzaju) określa wartość pochodnej przestrzennej na końcach przedziału

$$u_x(0, t) = \mu(t) \quad \text{lub} \quad u_x(L, t) = \nu(t). \quad (6.16)$$

Taki opis jest interpretowany w terminach zadanego strumienia ciepła na jednym z końców odcinka. Z prawa Fouriera (6.3) mamy  $q(x, t) = -ku_x(x, t)$  czyli na przykład

$$\mu(t) = -\frac{q(0, t)}{k}. \quad (6.17)$$

Równanie to modeluje na przykład podgrzewanie jednego z końców pręta (dostarczanie energii).

3. *Warunek Robina* (lub też warunek trzeciego rodzaju) jest kombinacją liniową dwóch powyższych sytuacji

$$u_x(0, t) = -\lambda_1 (u(0, t) - \theta_1(t)) \quad \text{lub} \quad u_x(L, t) = -\lambda_2 (u(L, t) - \theta_2(t)), \quad (6.18)$$

gdzie  $\theta_{1,2}$  są zadanymi funkcjami oraz  $\lambda_{1,2}$  to stałe. Interpretacja fizyczna warunku Robina wywodzi się z prawa Newtona stygnięcia ciał - strumień jest proporcjonalny do różnicy temperatur ciała oraz otoczenia, to znaczy

$$q(0, t) = -h(u(0, t) - \theta(t)). \quad (6.19)$$

Porównując z prawem Fouriera dostajemy warunek trzeciego rodzaju dla  $\lambda = h/k$

$$ku_x(0, t) = h(u(0, t) - \theta(t)). \quad (6.20)$$

Oczywiście warunki brzegowe mogą być wymieszane, to znaczy na różnych końcach odcinka możemy mieć zależność innego rodzaju. Powyższa lista nie jest oczywiście zamknięta i w fizyce występuje również wiele innych możliwości. Warunki Dirichleta, von Neumanna oraz Robina są jednak najpowszechniejsze i wyczerpują większość standardowych sytuacji. W dalszej części skupimy się jedynie na warunku Dirichleta a dyskusję pozostałych odłożymy do zadań. Zdefiniujmy teraz co dokładnie rozumiemy przez rozwiązanie równania ciepła oraz podsumujmy nasze zagadnienie.

**Definicja 18.** Rozwiązaniem równania przewodnictwa cieplnego z warunkiem Dirichleta nazywamy ograniczoną funkcję  $u = u(x, t)$  określoną na  $[0, L] \times [0, T]$  spełniającą równanie różniczkowe wraz z warunkami

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} + f(x, t), & (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in [0, L] \\ u(0, t) = \mu(t), & u(L, t) = \nu(t), \quad t \geq 0. \end{cases} \quad (6.21)$$

Ponadto, zachodzić musi spójność zadanych warunków  $\phi(0) = \mu(0)$ ,  $\phi(L) = \nu(0)$ .

Poczyńmy teraz pewną bardzo ważną obserwację, która upraszcza analizę zagadnienia. Zaważmy, że (6.21) zawiera trzy typy niejednorodności: funkcja źródłowa  $f$ , warunek początkowy  $\phi$  oraz warunki brzegowe  $\mu$  i  $\nu$ . Dzięki liniowości możemy tak rozbić badane zagadnienie aby mieć do czynienia z jedną niejednorodnością na raz. Żeby to zobaczyć podstawmy

$$u(x, t) = u^{(1)}(x, t) + u^{(2)}(x, t) + u^{(3)}(x, t), \quad (6.22)$$

gdzie  $u^{(1)}$  spełnia

$$\begin{cases} u_t^{(1)} = \alpha^2 u_{xx}^{(1)}, & (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \\ u^{(1)}(x, 0) = \phi(x), & x \in [0, L] \\ u^{(1)}(0, t) = 0, & u^{(1)}(L, t) = 0, \quad t \geq 0, \end{cases} \quad (6.23)$$

$u^{(2)}$  jest rozwiązaniem

$$\begin{cases} u_t^{(2)} = \alpha^2 u_{xx}^{(2)} + f(x, t), & (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \\ u^{(2)}(x, 0) = 0, & x \in [0, L] \\ u^{(2)}(0, t) = 0, & u^{(2)}(L, t) = 0, \quad t \geq 0, \end{cases} \quad (6.24)$$

a z kolei dla  $u^{(3)}$  zachodzi

$$\begin{cases} u_t^{(3)} = \alpha^2 u_{xx}^{(3)}, & (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \\ u^{(3)}(x, 0) = 0, & x \in [0, L] \\ u^{(3)}(0, t) = \mu(t), & u^{(3)}(L, t) = \nu(t), \quad t \geq 0. \end{cases} \quad (6.25)$$

Łatwo pokazać, że tak zdefiniowane  $u$  spełnia (6.21). Po kolei rozwiążemy każde z powyższych zagadnień.

### 6.1.1 Zagadnienie początkowe

Aby nie pisać niewygodnych górnych indeksów rozważmy zagadnienie

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, & (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in [0, L] \\ u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, & t \geq 0, \end{cases} \quad (6.26)$$

gdzie zadany mamy warunek początkowy. Problem ten można rozwiązać korzystając z eleganckiej metody pochodzącej jeszcze od Fouriera - metody rozdzielania zmiennych. Poszukajmy zatem rozwiązań (6.26) w postaci

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad (6.27)$$

gdzie każda z funkcji składowych jest funkcją jednego argumentu. Ponadto,  $X$  musi spełniać (ponieważ szukamy  $T$  różnej tożsamościowo od zera)

$$X(0) = 0, \quad X(L) = 0. \quad (6.28)$$

Po podstawieniu (6.27) do równania różniczkowego (6.26) otrzymujemy

$$XT' = \alpha^2 X''T, \quad (6.29)$$

co nam daje

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{T'}{T}. \quad (6.30)$$

Ponieważ lewa strona powyższego równanie zależy tylko od zmiennej  $x$  a prawa od  $t$ , to muszą one być równe pewnej stałej. Gdyby było inaczej to zmieniając  $x$  zmienialibyśmy lewą stronę podczas gdy prawa pozostawałaby niezmienna. Prowadziłoby to do sprzeczności. Istnieje zatem pewna stała rzeczywista  $\lambda$  taka, że

$$X'' + \lambda X = 0, \quad T' + \alpha^2 \lambda T = 0. \quad (6.31)$$

Sprowadziliśmy nasz problem do znalezienie dwóch funkcji,  $X$  oraz  $T$ , które są rozwiązaniami równań *zwyczajnych*. Zajmijmy się zagadnieniem brzegowym na  $X$ , w którym spełnione muszą być warunki brzegowe (6.28). Jak wiemy, rozwiązanie tego zagadnienia zależy silnie od znaku stałej  $\lambda$  i aby uniknąć sprzeczności musimy mieć  $\lambda > 0$  (zadanie). Rozwiązaniem ogólnym równanie różniczkowego zwyczajnego drugiego rzędu o stałych współczynnikach będzie zatem

$$X(x) = C \cos(\sqrt{\lambda}x) + D \sin(\sqrt{\lambda}x). \quad (6.32)$$

Ponieważ  $X(0) = 0$  od razu mamy  $C = 0$ . Drugi warunek brzegowy  $X(L) = 0$  prowadzi do równania

$$\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0, \quad (6.33)$$

czyli  $\sqrt{\lambda}L = n\pi$  dla  $n = 1, 2, 3, \dots$ , skąd mamy

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad (6.34)$$

gdzie wyraźnie zazaczyliśmy, że  $\lambda$  zależy od dowolnej liczby naturalnej  $n$ . Nasze zagadnienie ma zatem rozwiązania tylko dla pewnych szczególnych wartości  $\lambda$  (jest to typowe w zagadnieniach brzegowych). Zatem otrzymujemy nieskończenie wiele rozwiązań, które możemy zapisać w postaci

$$X_n(x) = D_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6.35)$$

Powróćmy teraz do równania (6.31) na  $T$ . Z łatwością możemy je rozwiązać otrzymując

$$T_n(t) = E_n e^{-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (6.36)$$

gdzie  $E_n$  są pewnymi stałymi całkowania. Zauważmy od razu, że tak otrzymana funkcje są ograniczone dla  $t \rightarrow \infty$  tylko dzięki dodatniości  $\lambda_n$ . Nieograniczone rozwiązania są нефизyczne dlatego odrzucamy je z naszych rozważań. Daje to kolejne potwierdzenie wyboru znaku stałej  $\lambda_n$ . Łącząc postaci  $X_n$  oraz  $T_n$  oraz korzystając z (6.27) otrzymujemy

$$u_n(x, t) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (6.37)$$

gdzie iloczyn stałych  $D_n$  i  $E_n$  został nazwany  $A_n$ . Widzimy, że dla każdej liczby naturalnej  $n$  mamy dokładnie jedno rozwiązanie  $u_n$ . Które zatem wybrać? Czym się kierować? Jest to ewidentny brak jednoznaczności ale na szczęście tylko z pozoru.

Nie skorzystaliśmy jeszcze z warunku początkowego  $u(x, 0) = \phi(x)$ . Trudno jednak oczekiwać, że dla bardzo ogólnej klasy funkcji, z których możemy wybrać  $\phi$  znajdziemy  $n \in \mathbb{N}$  takie, że  $\phi(x) = u_n(x, 0) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ . Pamiętajmy jednak, że równanie ciepła jest liniowe a to implikuje, że dowolna kombinacja liniowa rozwiązań jest również jego rozwiązaniem. Ponieważ takich składowych  $u_n$  jest nieskończenie wiele, skonstruujmy *formalny* szereg, o którym twierdzimy, że jest rozwiązaniem ogólnym zagadnienia (6.26)

$$u(x, t) := \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}. \quad (6.38)$$

Żądamy teraz spełnienia przez  $u$  warunku początkowego, to znaczy

$$\phi(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad (6.39)$$

co jest sinusowym szeregiem Fouriera dla  $\phi$ . Wiemy, że współczynniki  $A_n$  tego rozwinięcia można obliczyć ze wzoru Eulera

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L \phi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx. \quad (6.40)$$

Mamy zatem idealnego kandydata na rozwiązanie pełnego zagadnienia (6.26). Jest nim (6.38) wraz ze stałą określoną w (6.40). Musimy zatem pokazać, że funkcja  $u$  określona wzorem (6.38) jest różniczkowalna oraz spełnia równanie różniczkowe wraz z warunkami początkowym i brzegowymi (6.26). Okazuje się, że warunkiem wystarczającym do spełnienia tych wymagań jest jedynie bardzo fizyczne żądanie, aby  $\phi$  była ciągła.

**Twierdzenie 4.** Niech  $\phi$  będzie ciągłą funkcją określoną na  $[0, L]$ . Wtedy funkcja  $u = u(x, t)$  określona wzorami (6.38) oraz (6.40) jest rozwiązaniem zagadnienia przewodności cieplnej (6.26). Ponadto, funkcja  $u$  jest wtedy klasy  $C^\infty[0, L] \times [0, T]$ .

*Dowód.* Najpierw pokażemy, że szereg określający (6.38) jest zbieżny jednostajnie ze względu na  $x$ . Aby to zobaczy zwróćmy uwagę, że z ciągłości  $\phi$  na  $[0, L]$  wynika jej ograniczoność. Niech zatem  $|\phi(x)| \leq M$ . Wtedy z (6.40) mamy

$$|A_n| \leq 2M, \quad (6.41)$$

co od razu daje

$$\left| A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \right| \leq 2M e^{-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}. \quad (6.42)$$

Weźmy teraz dowolną liczbę  $0 < t_0 < T$ . Dla  $t_0 \leq t \leq T$  mamy  $e^{-\alpha^2(\frac{n\pi}{L})^2 t} \leq e^{-\alpha^2(\frac{n\pi}{L})^2 t_0}$ . Znaleźliśmy zatem majorantę dla szeregu (6.38), która ma postać

$$2M \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha^2(\frac{n\pi}{L})^2 t_0} < \infty. \quad (6.43)$$

Z kryterium Weierstrassa mamy zbieżność jednostajną szeregu określającego  $u$  na  $[0, L] \times [t_0, T]$ . Ponieważ funkcje  $u_n$  są ciągłe jako funkcje dwóch zmiennych to  $u$  również będzie ciągła na  $[0, L] \times [t_0, T]$ . Ale  $t_0 > 0$  było wybrane dowolnie, więc  $u$  jest ciągła na  $[0, L] \times [0, T]$ .

Dokładnie takie samo rozumowanie wiedzie do pokazania, że szereg utworzony z pochodnych (dowolnego rzędu!) funkcji  $u_n$  jest zbieżny jednostajnie na  $[0, L] \times [t_0, T]$  dla dowolnego  $t_0 > 0$ . Zatem  $u$  jest różniczkowalna dowolną ilość razy a szereg można różniczkować wyraz po wyrazie. Z tego, że  $u_n$  spełniają równanie ciepła wynika, że  $u$  jest rozwiązaniem (6.26), co było do okazania.  $\square$

Powyższe twierdzenie pokazuje bardzo ważną cechę rozwiązań równania ciepła - startując jedynie z ciągłego<sup>14</sup> warunku początkowego, w każdej chwili  $t > 0$  rozwiązania  $u$  jest funkcją, która ma wszystkie pochodne! Otrzymaliśmy zatem rozwiązanie zagadnienia początkowego dla jednorodnego równania ciepła. Jednorodne warunki von Neumanna lub Robina można potraktować w dokładnie taki sam sposób (zadania).

### Funkcja Greena

Rozwiązanie równania ciepła (6.38) można przetransformować w sposób uwydatniający interpretację fizyczną. Pamiętając, że szereg określający  $u$  jest zbieżny jednostajnie możemy napisać scałkować go wyraz po wyrazie

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\alpha^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2}{L} \int_0^L \phi(\xi) \sin\left(\frac{n\pi}{L}\xi\right) d\xi \right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\alpha^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \\ &= \int_0^L \left( \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}\xi\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\alpha^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \right) \phi(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Zdefiniujmy teraz tak zwaną funkcję Greena

$$G(x, \xi, t) := \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}\xi\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\alpha^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}, \quad (6.45)$$

wtedy rozwiązanie równania ciepła przybiera prostą postać

$$u(x, t) = \int_0^L G(x, \xi, t) \phi(\xi) d\xi. \quad (6.46)$$

Tak zdefiniowana funkcja Greena zwana jest natychmiastowym punktowym źródłem ciepła, czyli funkcją określającą rozkład temperatury w przecie  $[0, L]$  i w czasie  $t$  gdzie nagle w chwili  $t = 0$  pewna ilość ciepła zostaje uwolniona w punkcie  $\xi \in [0, L]$ . Wtedy postać całkowa rozwiązania (6.46) może być zinterpretowana jako ciągła superpozycja z wagą  $\phi(\xi)$  tych punktowych źródeł ciepła.

<sup>14</sup>Założenie to można bardzo poważnie osłabić.

Aby zrozumieć tę fizyczną interpretację funkcji Greena ustalmy  $\epsilon > 0$ . Niech ciepło  $Q$  będzie uwolnione na odcinku  $(\xi_0 - \epsilon, \xi_0 + \epsilon)$  w chwili  $t = 0$  oraz założmy, że w pozostałej części pręta temperatura wynosi 0. Przez  $\phi_\epsilon(x) \geq 0$  oznaczmy rozkład temperatury, jaki pojawi się zaraz po uwolnieniu energii cieplnej. Z definicji ciepła mamy

$$c\rho \int_{\xi_0 - \epsilon}^{\xi_0 + \epsilon} \phi_\epsilon(\xi) d\xi = Q. \quad (6.47)$$

Ponieważ rozkład temperatury w każdego chwili  $t > 0$  dany jest wzorem (6.46) musimy mieć

$$u_\epsilon(x, t) = \int_0^L G(x, \xi, t) \phi_\epsilon(\xi) d\xi = \int_{\xi_0 - \epsilon}^{\xi_0 + \epsilon} G(x, \xi, t) \phi_\epsilon(\xi) d\xi = G(x, \xi^*, t) \int_{\xi_0 - \epsilon}^{\xi_0 + \epsilon} \phi_\epsilon(\xi) d\xi = \frac{Q}{c\rho} G(x, \xi^*, t), \quad (6.48)$$

gdzie skorzystaliśmy z zerowania się funkcji  $\phi_\epsilon$  poza przedziałem  $(\xi_0 - \epsilon, \xi_0 + \epsilon)$  oraz skorzystaliśmy z twierdzenia o wartości średniej z punktem  $\xi^*$ . Pozostało nam tylko wykonać przejście graniczne z  $\epsilon \rightarrow 0$  oznaczające uwalnianie ciepła z punktu  $\xi_0$ , to jest z ciągłości funkcji Greena

$$u(x, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_\epsilon(x, t) = \frac{Q}{c\rho} G(x, \xi_0, t). \quad (6.49)$$

Zatem jeśli  $Q = c\rho$  to funkcja Greena jest natychmiastową odpowiedzią temperaturową na punktowe uwolnienie się ciepła o takiej wartości. Z funkcjami Greena spotkamy się jeszcze wiele razy przy badaniu różnych innych zagadnień niekoniecznie związanych z rozprzestrzenianiem się ciepła.

### 6.1.2 Zagadnienie niejednorodne

Przejdźmy teraz do zagadnienia posiadającego niejednorodność jedynie w samym równaniu różniczkowym

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} + f, & (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \\ u(x, 0) = 0, & x \in [0, L] \\ u(0, t) = 0, & u(L, t) = 0, \quad t \geq 0, \end{cases} \quad (6.50)$$

Metoda rozdzielania zmiennych pozwoliła nam uzyskać rozwiązanie zagadnienie początkowego jako sumę iloczynów funkcji zależnych od osobnych zmiennych niezależnych. Aby uzyskać składową zależną od  $x$  musieliśmy rozwiązać jednorodne zagadnienie brzegowe. W przypadku niezerowej funkcji  $f$  możemy otrzymać podobne zagadnienie.

Jako, że warunki brzegowe naszego problemu są dokładnie takie same jak w przypadku zagadnienia początkowego to wydaje się korzystne szukać rozwiązań w postaci szeregu

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad (6.51)$$

gdzie składowa czasowa  $u_n(t)$  jest nieznaną. Od razu widzimy, że warunki brzegowe dla  $u$  są spełnione. Funkcja  $f$  również musi być zapisana w podobny sposób abyśmy byli w stanie porównać odpowiednie wyrazy

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \quad (6.52)$$

Zauważmy, że dwa powyższe wzory to nic innego jak szeregi Fouriera dla  $u(x, t)$  oraz  $f(x, t)$  jako funkcji  $x$  przy ustalonym  $t$ . Funkcje  $f_n(t)$  są współczynnikami Fouriera obliczanymi ze wzoru

$$f_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L f(x, t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx. \quad (6.53)$$

Umieszczenie ich w równaniu (6.50) daje nam

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( u_n'(t) + \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \alpha^2 u_n(t) - f_n(t) \right) \sin \left( \frac{n\pi}{L} x \right) = 0. \quad (6.54)$$

Z jednoznaczności rozwinięcia w szereg Fouriera każdy wyraz powyższego szeregu musi się zerować dając nieskończony układ równań

$$u_n'(t) + \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \alpha^2 u_n(t) = f_n(t), \quad u_n(0) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (6.55)$$

gdzie skorzystaliśmy z zerowania się warunku początkowego. Na szczęście każde z tych równań jest niezależne dlatego możemy je rozwiązać jedno po drugim. Rozwiązaniem (otrzymanym na przykład za pomocą czynnika całkującego) jest oczywiście

$$u_n(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \alpha^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau. \quad (6.56)$$

Otrzymaliśmy zatem rozwiązanie naszego problemu. Łącząc (6.51) z (6.56) możemy napisać

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^t e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \alpha^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \right) \sin \left( \frac{n\pi}{L} x \right). \quad (6.57)$$

Pokazanie, że powyższy wzór rzeczywiście określa rozwiązanie zagadnienia ciepła z niejednorodnością jest podobne jak w przypadku warunku początkowego.

Aby uwydatnić fizyczną interpretację rozwiązania możemy znowu wprowadzić funkcję Greena. Aby to osiągnąć wykorzystajmy wzór (6.52) i zapiszmy 6.57 w postaci

$$u(x, t) = \int_0^t \int_0^L \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \alpha^2 (t-\tau)} \sin \left( \frac{\pi n}{L} x \right) \sin \left( \frac{\pi n}{L} \xi \right) f(\xi, \tau) d\xi d\tau = \int_0^t \int_0^L G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (6.58)$$

gdzie  $G$  jest funkcją Greena zdefiniowaną w (6.45). Jest to bardzo elegancki wzór mówiący nam, że dla zerowych warunków początkowych i brzegowych rozkład temperatury jest superpozycją punktowych źródeł ciepła umieszczonych w  $(\xi, t - \tau)$  o sile  $f(\xi, \tau)$  (czyli w każdym punkcie pręta oraz we wszystkich poprzednich czasach).

### 6.1.3 Niezerowe warunki brzegowe

Pozostało nam do rozwiązania zagadnienie z niezerowymi warunkami brzegowymi (6.25)

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, & (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \\ u(x, 0) = 0, & x \in [0, L] \\ u(0, t) = \mu(t), \quad u(L, t) = \nu(t), & \mu(0) = \nu(0) = 0, \quad t \geq 0. \end{cases} \quad (6.59)$$

Bardzo użyteczną techniką rozwiązania tego zagadnienia jest rozważanie odstępstwa od pewnej odpowiednio wybranej funkcji. Podstawmy zatem

$$u(x, t) = U(x, t) + v(x, t), \quad (6.60)$$

gdzie  $U$  zostanie zaraz wybrana tak, żeby

$$U(0, t) = \mu, \quad U(L, t) = \nu(t). \quad (6.61)$$

Prawdopodobnie najprostszym (można podać nieskończenie wiele innych funkcji) wyborem jest

$$U(x, t) = \mu(t) + \frac{x}{L} (v(t) - \mu(t)). \quad (6.62)$$

Ponieważ zachodzi (6.59) to nieznana funkcja  $v$  spełnia

$$\begin{cases} v_t = \alpha^2 v_{xx} - U_t, & (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \\ v(x, 0) = -U(x, 0), & x \in [0, L] \\ v(0, t) = 0, \quad v(L, t) = 0, \quad \mu(0) = v(0) = 0, & t \geq 0. \end{cases} \quad (6.63)$$

a taki problem już rozwiązaliśmy poprzednio. Mamy zatem

$$u(x, t) = U(x, t) - \int_0^L G(x, \xi, t) U(\xi, 0) d\xi - \int_0^t \int_0^L G(x, \xi, t - \tau) U_t(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (6.64)$$

Dla innych warunków brzegowych funkcja  $U$  będzie miała inną postać.

Możemy teraz połączyć (6.46), (6.57) oraz (6.64) aby otrzymać ostateczne rozwiązanie zagadnienia (6.21)

$$u(x, t) = U(x, t) + \int_0^L G(x, \xi, t) (\phi(\xi) - U(\xi, 0)) d\xi + \int_0^t \int_0^L G(x, \xi, t - \tau) (f(\xi, \tau) - U_t(\xi, \tau)) d\xi d\tau, \quad (6.65)$$

gdzie  $U$  jest zdefiniowane w (6.62).

#### 6.1.4 Jednoznaczność

Pokazaliśmy, że zagadnienie (6.21) posiada rozwiązanie. Powstaje oczywiste pytanie - czy jest ono jedynie? Odpowiedz jest twierdząca. Udowodnimy ten fakt za pomocą bardzo eleganckiej metody oszacowań energetycznych.

**Twierdzenie 5.** *Zagadnienie (6.21) posiada dokładnie jedno ograniczone rozwiązanie.*

*Dowód.* Niech (6.21) ma dwa rozwiązania  $u_1$  oraz  $u_2$ . Oznaczmy ich różnicę poprzez  $w := u_1 - u_2$ . Wtedy  $w$  spełnia jednorodne równanie ciepła wraz z zerowymi warunkami brzegowymi i początkowym (liniowość!). Zdefiniujemy energię rozwiązania

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L w(x, t)^2 dx. \quad (6.66)$$

Oczywiście mamy  $E \geq 0$ . Sprawdźmy jak zachowuje się jej pochodna

$$\frac{d}{dt} E(t) = \int_0^L w(x, t) w_t(x, t) dx = \alpha^2 \int_0^L w(x, t) w_{xx}(x, t) dx, \quad (6.67)$$

gdzie skorzystaliśmy z tego, że  $w$  spełnia równanie ciepła. Całkując teraz przez części i korzystając z warunków brzegowych mamy

$$\frac{d}{dt} E(t) = w(x, t) w_x(x, t) \Big|_0^L - \int_0^L w_x(x, t)^2 dx = - \int_0^L w_x(x, t)^2 dx \leq 0, \quad (6.68)$$

czyli energia jest nierosnąca w czasie. Ponieważ  $w$  spełnia zerowy warunek początkowy, to  $E(0) = 0$ . Łącząc to z dodatnią określonością energii otrzymujemy  $E(t) \equiv 0$  dla każdego czasu. Ponieważ funkcja podcałkowa jest nieujemna, to musimy mieć  $w \equiv 0$ , czyli  $u_1 \equiv u_2$ . Rozwiązanie jest zatem jedyne.  $\square$

Zauważmy, że powyższy dowód korzysta z czysto fizycznej wielkości - energii - i poprzez rozumowanie pokazuje, że z zerowych warunków początkowych i brzegowych, jednorodne równanie ciepła nie może mieć rozwiązania innego niż zerowe. Najważniejszym krokiem jest tutaj skorzystanie z liniowości równania aby otrzymać jednorodne równanie na  $w$ . Dla równań nieliniowych sprawa nie byłaby aż taka prosta.



## 6.2 Równanie ciepła na obszarach nieograniczonych

Zobaczyliśmy zatem jak możemy rozwiązać zagadnienie przewodnictwa cieplnego dla jednowymiarowego pręta (odcinka). Teraz skupimy się na tym samym zagadnieniu określonym na obszarach nieograniczonych.

### 6.2.1 Prosta

Kiedy mamy do czynienia z ośrodkiem, którego wymiary są dużo większe niż charakterystyczna prędkość dyfuzji cieplnej pomnożona przez skalę czasową to bardzo dobrym modelem takiego zagadnienia jest rozważanie równania ciepła na prostej. Możemy również myśleć o tym, że pręt jest opisany odcinkiem  $[-L, L]$  gdzie  $L \rightarrow \infty$ . Takie przejście graniczne jest sposobem otrzymania rozwiązania dla naszego zagadnienia, my jednak pójdziemy inną drogą.

Zauważmy, że mówienie o warunkach brzegowych dla nieskończonej prostej wymaga odrobiny subtelności. Przejście graniczne powodujące rozważanie coraz to większego odcinka sugeruje, żebyśmy zadali warunki w nieskończoności. Fizycznie uzasadniony jest zatem warunek mówiący, że temperatura maleje do zera gdy oddalamy się do nieskończoności (jest to również wymagane dla jednoznaczności rozwiązania). Nasze zagadnienie ma zatem postać

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T), \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in \mathbb{R} \\ u(-\infty, t) = 0, \quad u(\infty, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases} \quad (6.69)$$

Badamy zatem jak początkowy rozkład temperatury  $\phi(x)$  będzie ewoluował w czasie na nieskończonym obszarze. Jest kilka sposobów rozwiązania tego zagadnienia: wspomniane przejście graniczne, metoda transformaty Fouriera, metoda fal płaskich oraz samopodobieństwo. My zastosujemy tę ostatnią technikę ponieważ jest również bardzo użyteczna do badania równań nieliniowych. Reszta zostanie przećwiczona w zadaniach.

Metoda rozwiązań samopodobnych opiera się na spostrzeżeniu, że jeśli  $u$  spełnia równanie ciepła to dla dowolnej  $\lambda$  funkcja  $v(x, t) := u(\lambda x, \lambda^2 t)$  jest również rozwiązaniem ponieważ

$$v_t = \lambda^2 u_t, \quad v_{xx} = \lambda^2 u_{xx}. \quad (6.70)$$

Sugeruje to, zmienna  $x^2$  gra podobną rolę jak  $t$ . Będziemy poszukiwać samopodobnego rozwiązania równania ciepła spełniającego zachowanie ciepła, to jest

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx = 0. \quad (6.71)$$

Wprowadźmy zatem zmienną samopodobną

$$z := \frac{x}{\sqrt{t}}, \quad u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} U\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right). \quad (6.72)$$

Pokażemy teraz, że funkcja *jednej* zmiennej  $U = U(z)$  jest dobrze zdefiniowana. Najpierw zachowanie energii

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} U\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} U(z) dz = \text{const.}, \quad (6.73)$$

czyli ciepło jest rzeczywiście zachowane. Jest to powód, dla którego wybraliśmy składnik  $t^{-1/2}$  przed funkcją  $U$  w (6.72). Możemy policzyć teraz pochodne

$$u_t(x, t) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{t^3}} U(z) - \frac{1}{2} \frac{x}{t^2} U'(z), \quad u_{xx} = \frac{1}{\sqrt{t^3}} U''(z). \quad (6.74)$$

Zatem równanie ciepła ma postać samopodobną

$$-\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}zu' = \alpha^2 u'' \quad (6.75)$$

Warunek brzegowy w nieskończoności ma postać

$$u(\pm\infty) = 0. \quad (6.76)$$

Dodajmy do niego jeszcze naturalne wymaganie aby strumień ciepła w nieskończoności zanikał

$$0 = q(\pm\infty, t) = -ku_x(\pm\infty, t) = -\frac{k}{t}u'(\pm\infty), \quad (6.77)$$

czyli  $u(\pm\infty) = 0$ . Sprowadziliśmy zatem równanie cząstkowe do równania zwyczajnego, które możemy nawet rozwiązać obserwując, że  $u + zu' = (zu)'$ , czyli po scałkowaniu

$$-\frac{1}{2}zu = \alpha^2 u' + C. \quad (6.78)$$

Stałą całkowania wybierzmy  $C = 0$ , co jest równoznaczne z żądaniem aby rozwiązanie miało  $u'(0) = 0$  lub  $u'(z) \rightarrow 0$  gdy  $z \rightarrow \pm\infty$ . Mamy zatem  $-\frac{1}{2}zu = \alpha^2 u'$  co z łatwością możemy scałkować i otrzymać

$$u(z) = De^{-\frac{z^2}{4\alpha^2}}, \quad (6.79)$$

gdzie stała  $D$  jest dowolna. Wygodnie ją zatem wziąć tak, aby całkowita energia cieplna była równa 1, to jest  $D = \sqrt{4\pi\alpha^2}$  (zadanie). Ostatecznie, nasze rozwiązanie ma postać

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha^2 t}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2 t}} =: G(x, t) \quad (6.80)$$

Funkcja  $G$  jest określana jako *jądro ciepła* lub też *jądro Gaussa-Weierstrassa*. Pokażemy niebawem że jest to funkcja Greena dla zagadnienia początkowego (6.69). Można pokazać, że jądro ciepła dla  $n$ -wymiarowej przestrzeni przedstawia się wzorem

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(4\pi\alpha^2 t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2 t}}, \quad (6.81)$$

gdzie  $x^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i^2$ .

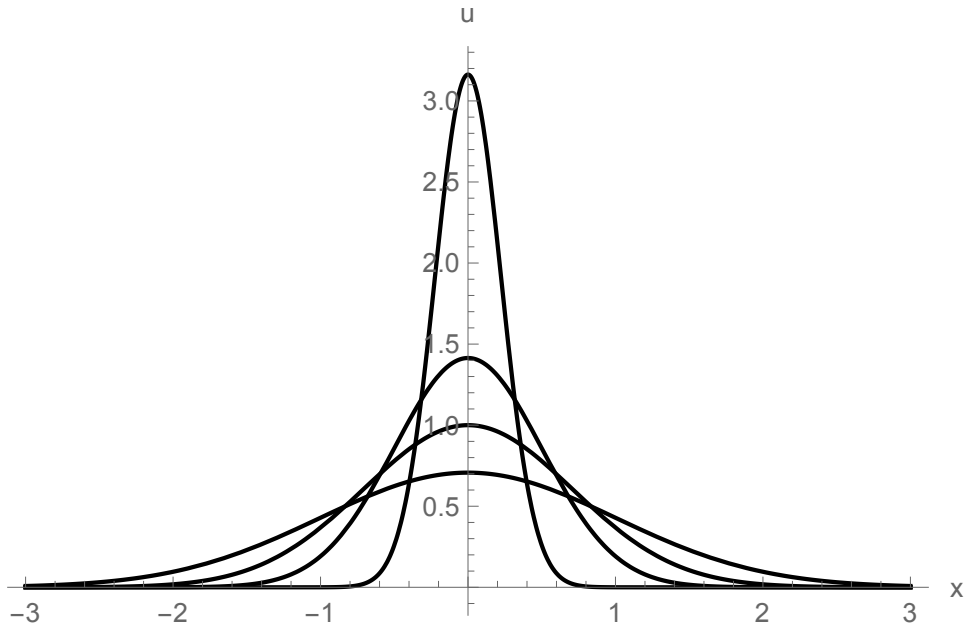
Zauważmy, że nigdzie nie skorzystaliśmy z warunku początkowego ale widzimy, że  $u(x, 0)$  nie istnieje (Rys. 6.2.1). Dokładniej,  $u(0, t)$  dąży do nieskończoności a  $u(x, t)$ ,  $x \neq 0$  dąży do 0 dla  $t \rightarrow 0$ . Pamiętajmy jednak, że całka z  $G(x, t)$  po  $x$  jest równa 1 dla każdego czasu. Fizycznie oznacza to, że jednakowa ilość ciepła jest skoncentrowana coraz bliżej  $x = 0$  powodując wzrost temperatury. Możemy wykorzystać ten fakt i wyprowadzić rozwiązanie zagadnienia (6.69). Gdy  $t$  jest bardzo małe  $G(x - \xi, t)$  jest równe zero niemalże wszędzie oprócz malutkiego otoczenia  $x$ . Chcielibyśmy, żeby temperatura wynosiła tam  $\phi(x)$ , to znaczy

$$\phi(x) \approx \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi, t)\phi(\xi)d\xi, \quad t \rightarrow 0. \quad (6.82)$$

Tak rzeczywiście jest i pokażemy, że rozwiązaniem (6.69) jest

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi, t)\phi(\xi)d\xi. \quad (6.83)$$

Czyli  $G$  jest rzeczywiście funkcją Greena dla naszego zagadnienia początkowego (punktowym źródłem ciepła).



Rysunek 15: Jądro ciepła dla czasów  $t = 2, 1, 0.5, 0.1$ .

**Twierdzenie 6.** Niech  $\phi$  będzie ciągła oraz ograniczona na  $\mathbb{R}$ . Wtedy funkcja  $u$  dana wzorem (6.83) spełnia równanie ciepła, jest ograniczona oraz

$$u(x, t) \rightarrow \phi(x) \quad \text{gdy} \quad t \rightarrow 0. \quad (6.84)$$

*Dowód.* Sprawdzenie zachodzenia równania ciepła pozostawiamy na ćwiczenia więc zajmiemy się uzasadnieniem granicy. Ograniczoność  $u$  wynika od razu z ograniczoności  $|\phi| \leq M$

$$|u(x, t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi, t) |\phi(\xi)| d\xi \leq M, \quad (6.85)$$

ponieważ całka z jądra ciepła wynosi 1. Zauważmy teraz, że z takiego samego powodu

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi, t) \phi(x) d\xi, \quad (6.86)$$

co daje nam

$$|u(x, t) - \phi(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi, t) |\phi(\xi) - \phi(x)| d\xi. \quad (6.87)$$

Wyberzmy teraz dowolną liczbę  $\epsilon > 0$  i rozbijmy całkę na trzy składowe

$$|u(x, t) - \phi(x)| \leq \int_{-\infty}^{x-\epsilon} + \int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} + \int_{x+\epsilon}^{\infty} = I_1 + I_2 + I_3. \quad (6.88)$$

Pokażemy, że każda z nich dąży do 0 jeśli  $t > 0$ . Całki  $I_1$  oraz  $I_3$  są analogiczne dlatego rozważmy tylko jedną z nich i od razu skorzystajmy z ograniczoności  $\phi$

$$I_1 \leq \frac{2M}{\sqrt{4\pi\alpha^2 t}} \int_{-\infty}^{x-\epsilon} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha^2 t}} d\xi = \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{-\epsilon}{\sqrt{4\alpha^2 t}}} e^{-z^2} dz. \quad (6.89)$$

W ostatniej całce zamieniliśmy zmienne. Jeśli teraz  $t \rightarrow 0^+$  to wyrażenie po prawej stronie dąży do zera z jednostajnej zbieżności całki dla ustalonego  $\epsilon$ . Rezultat ten zachodzi również dla  $\epsilon$  zależnego od  $t$  takiego, że  $\epsilon(t)/\sqrt{t} \rightarrow \infty$  dla  $t \rightarrow 0^+$ . Podobnie  $I_3 \rightarrow 0$ . Całkę  $I_2$  szacujemy inaczej

$$I_2 \leq \max_{\xi \in (x-\epsilon, x+\epsilon)} |\phi(\xi) - \phi(x)| \int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} G(x - \xi, t) d\xi \leq \max_{\xi \in (x-\epsilon, x+\epsilon)} |\phi(\xi) - \phi(x)|. \quad (6.90)$$

Z ciągłości funkcji  $\phi$  widzimy teraz, że wraz z  $\epsilon$  wyrażenie po prawej stronie powyższej nierówności staje się dowolnie małe (maksimum jest brane po coraz mniejszym zbiorze). Weźmy na przykład  $\epsilon = t^{\frac{1}{4}}$  tak aby wciąż całki  $I_1$  oraz  $I_3$  dążyły do 0.  $\square$

Widzimy, że dzięki funkcji Greena rozwiązanie zagadnienia na prostej może być zapisane w dokładnie takiej samej formie jak odpowiednie zagadnienie na odcinku. Różna jest jedynie funkcja Greena i dla różnych obszarów będzie przyjmowała inną postać. W dokładnie taki sam sposób jak powyżej możemy pokazać, że rozwiązaniem zagadnienia niejednorodnego

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} + f, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T), \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R} \\ u(-\infty, t) = 0, & u(\infty, t) = 0, \quad t \geq 0. \end{cases} \quad (6.91)$$

jest

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (6.92)$$

Widzimy, że funkcja Greena jest bardzo użyteczna. Zwłaszcza w rozważaniach teoretycznych.

**Przykład.** (*Dyfuzja chmury*) Wyobraźmy sobie chmurę pyłu, która powstaje z wybuchu punktowego ładunku w powietrzu. Niech  $u = u(x, t)$  oznacza stężenie dymu. Zastanowimy się nad kwestią widoczności chmury po czasie i nad momentem całkowitego jej zniknięcia. Jeśli założymy, że cząsteczki pyłu ewoluują jedynie dyfuzyjnie to ich stężenie wyraża się wzorem (punktowy warunek początkowy daje funkcję Greena)

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{Q}{(4\pi Dt)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4Dt}}, \quad (6.93)$$

gdzie  $Q$  jest całkowitą ilością pyłu oraz  $D$  jest dyfuzyjnością. Zgodnie z teorią promieniowania, natężenie światła  $I$  przy przejściu przez ośrodek może być obliczone z równania

$$\frac{dI}{ds} = -\kappa u(s)I, \quad (6.94)$$

gdzie  $\kappa$  jest stałą zależną od rodzaju własności ośrodka innych niż gęstość. Tutaj zmienną niezależną jest droga  $s$ , którą przebywa promieniowanie w drodze  $d$  źródła do obserwatora. Równanie to można od razu rozwiązać

$$I(s) = I_0 \exp\left(-\kappa \int u(s) ds\right). \quad (6.95)$$

Zauważmy, że widzialność czyli stosunek  $\frac{1}{I_0}$  zależy tylko i wyłącznie od wartości całki. Rozważmy rzut powierzchni chmury na płaszczyznę  $xy$ , a źródło światła w nieskończoności. Ponadto zorientujmy drogę światła zgodnie z osią  $Oz$ . Wtedy

$$\int_0^{\infty} u(\mathbf{x}, t) dt = \frac{Q}{(4\pi Dt)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2+y^2}{4Dt}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{z^2}{4Dt}} dz = \frac{Q\sqrt{\pi Dt}}{(4\pi Dt)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2+y^2}{4Dt}} = \frac{Q}{8\pi Dt} e^{-\frac{x^2+y^2}{4Dt}}. \quad (6.96)$$

Jeśli nasz instrument optyczny (oko) ma czułość  $\delta$ , to jest chmura przestaje być widoczna dla  $\frac{1}{I_0} = e^{-\delta}$ , to

$$\delta = \frac{Q\kappa}{8\pi Dt} e^{-\frac{x^2+y^2}{4Dt}}, \quad (6.97)$$

określa brzeg chmury w chwili  $t$ . Zatem granica chmury  $r = x^2 + y^2$  wyraża się następująco

$$r(t) = 2\sqrt{-Dt \ln \frac{8\pi D \delta t}{Q\kappa}}. \quad (6.98)$$

Powyższa funkcja najpierw rośnie od zera to swojego maksimum, a później maleje z powrotem do zera. Łatwy rachunek pozwala wyliczyć dokładne wartości tych charakterystycznych punktów.

## 6.2.2 Półprosta

Zagadnienie rozprzestrzeniania się ciepła na półprostej występuje często w sytuacjach, w których interesuje nas zachowanie się układu w okolicy jednego z końców pręta. Drugi koniec znajduje się bardzo daleko (w nieskończoności) i jego wpływ na dynamikę jest znikomy. Oprócz warunku początkowego musimy zadać również jeden warunek brzegowy. Rozważymy jedynie warunek Dirichleta zostawiając inne do rozważenia w zadaniach.

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} + f, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T), \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in \mathbb{R} \\ u(0, t) = \mu(t), & t \geq 0. \end{cases} \quad (6.99)$$

Jak zwykle powyższy problem możemy rozbić na trzy osobne i rozważyć wszystkie po kolei. Spójrzmy najpierw na jednorodny zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T), \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in \mathbb{R} \\ u(0, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases} \quad (6.100)$$

W celu rozwiązania zagadnienia możemy wykorzystać wyniki dotyczące prostej. Zauważmy, że jeśli zdefiniujemy funkcję pomocniczą określoną na prostej

$$\psi(x) := \begin{cases} \phi(x), & x \geq 0; \\ -\phi(-x), & x < 0, \end{cases} \quad (6.101)$$

to oczywiście  $\psi(x) = \phi(x)$  dla  $x \geq 0$ . Zauważmy również, że powyższa definicja jest poprawna gdyż dla  $x < 0$  mamy  $-x > 0$ . Mówimy, że  $\psi$  jest *nieparzystym przedłużeniem*  $\phi$ . To przedłużenie może być użyte jako warunek początkowy (zgodzający się z  $\phi$  na półprostej) dla zagadnienia (6.69). Rozwiązaniem jest oczywiście

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi, t) \psi(\xi) d\xi. \quad (6.102)$$

Z definicji jądra ciepła (6.80) wynika, że  $G(x, t)$  jest funkcją parzystą w  $x$ , zatem

$$u(0, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(-\xi, t) \psi(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi, t) \psi(\xi) d\xi = 0, \quad (6.103)$$

ponieważ całka po symetrycznym przedziale z funkcji nieparzystej jest równa zero. Tak zdefiniowane  $u$  spełnia zatem jednorodny warunek brzegowy oraz oczywiście  $u(x, t) \rightarrow \phi(x)$  kiedy  $t \rightarrow 0^+$  dla  $x \geq 0$ . Czyli  $u$  jest rozwiązaniem zagadnienia (6.100). Możemy je wyrazić w terminach jedynie danego warunku początkowego pisząc

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^0 G(x - \xi, t) (-\phi(-\xi)) d\xi + \int_0^{\infty} G(x - \xi, t) (\phi(\xi)) d\xi. \quad (6.104)$$

Zamieniając zmienną w pierwszej całce możemy ostatecznie napisać

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} (G(x - \xi, t) - G(x + \xi, t)) \phi(\xi) d\xi. \quad (6.105)$$

Jest to rozwiązanie jednorodnego zagadnienia ciepła na półprostej z warunkiem początkowym. Metoda definiowania funkcji pomocniczej  $\psi$  zwana jest *regulą odbicia*. W podobny sposób można otrzymać również rozwiązania innych zagadnień na półprostej (zadania).

**Przykład.** (*Temperatura we wnętrzu Ziemi*) Niech  $u = u(x, t)$  oznacza temperaturę we wnętrzu Ziemi na głębokości  $x$  i w czasie  $t$ . Prostym modelem jest

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} + f, \quad (6.106)$$

gdzie  $f$  jest tempem generowania ciepła przez reakcje jądrowe (jest to główne źródło energii termalnej na naszej planecie ponieważ promieniowanie słoneczne niemal całkowicie jest wypromieniowywane z powrotem w kosmos). Najbardziej popularną hipotezą jest założenie, że pierwiastki promieniotwórcze znajdują się w litosferze czyli wierzchniej warstwie Ziemi, czyli

$$f(x) = \begin{cases} \frac{A}{c\rho}, & 0 < x \leq H, \\ 0, & x > H, \end{cases} \quad (6.107)$$

gdzie  $H > 0$  jest pewną charakterystyczną głębokością. Gdy założymy, że  $u(x, 0) = 0$  oraz  $u(0, t) = 0$ , czyli badamy wpływ samego rozpadu radioaktywnego na temperaturę to od razu możemy napisać rozwiązanie (patrz (6.105) oraz )

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t \int_0^{\infty} (G(x - \xi, t - \tau) - G(x + \xi, t - \tau)) f(\xi) d\xi d\tau \\ &= \frac{A}{c\rho} \int_0^t \int_0^H (G(x - \xi, t - \tau) - G(x + \xi, t - \tau)) d\xi d\tau, \end{aligned} \quad (6.108)$$

gdzie  $G$  jest jądrem ciepła.

### 6.3 Zasada maksimum

Rozwiązanie równania ciepła ma bardzo ważną własność zwaną *zasadą maksimum*. Jej fizyczna interpretacja jest bardzo przejrzysta i mówi, że maksimum temperatury może wystąpić jedynie na brzegu obszaru lub w chwili początkowej. W przypadku braku źródeł jest niemożliwe aby podnieść temperaturę do wartości większej niż ta obecna właśnie na brzegu lub na początku. Udowodnimy to twierdzenie dla obszaru ograniczonego.

**Twierdzenie 7** (Zasada maksimum). *Jeżeli funkcja  $u = u(x, t)$  jest ograniczona oraz ciągła na  $[0, L] \times [0, T]$  oraz spełnia równanie ciepła na  $(0, L) \times (0, T]$  to jej wartości maksymalne oraz minimalne mogą wystąpić jedynie na bokach  $t = 0$ ,  $x = 0$  lub  $x = L$ .*

*Dowód.* Niech  $M$  oznacza maksimum funkcji  $u$  na odpowiednich bokach prostokąta, to jest  $t = 0$ ,  $x = 0$  lub  $x = L$ . Załóżmy teraz nie wprost, że istnieje taki punkt  $(x_0, t_0)$  należący do wnętrza obszaru lub jego górnej krawędzi  $t = T$ , w którym

$$u(x_0, t_0) = M + \epsilon. \quad (6.109)$$

Z warunku koniecznego istnienia maksimum musimy mieć  $u_x(x_0, t_0) = 0$  oraz  $u_{xx}(x_0, t_0) \leq 0$ . Ponieważ maksimum występuje też względem czasu, to  $u_t(x_0, t_0) \geq 0$  gdzie nierówność występuje

w przypadku  $t = T$ . Z równania ciepła mamy oczywiście  $u_t = \alpha^2 u_{xx}$  czyli sprzeczność występuje jeśli  $u_t > 0$ . Musimy zatem pokazać, że istnieje taki punkt  $(x_1, t_1)$  dla którego pochodna po czasie jest dodatnia.

Zdefiniujmy pomocniczą funkcję

$$v(x, t) := u(x, t) + k(t_0 - t), \quad (6.110)$$

gdzie  $k$  jest dowolną i ustaloną liczbą dodatnią spełniającą warunek  $k < \frac{\epsilon}{2T}$ . Wtedy oczywiście mamy  $v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = M + \epsilon$  oraz  $k(t_0 - t) \leq kT$ . Zauważmy, że  $v(x, 0) = u(x, 0) + kt_0 \leq M + kT < M + \frac{\epsilon}{2}$  oraz podobnie dla  $u(0, t)$  i  $u(L, t)$ . Ponieważ funkcja  $v$  jest ciągła jako suma dwóch funkcji ciągłych musi przyjąć swoje maksimum w pewnym punkcie  $(x_1, t_1)$ . Z tego, co przed chwilą zauważyliśmy musimy mieć  $v(x_1, t_1) \geq v(x_0, t_0) = M + \epsilon$ . Ponieważ na bokach  $t = 0$ ,  $x = 0$  i  $x = L$  zachodzi  $v \leq M + \frac{\epsilon}{2}$  to  $(x_1, t_1)$  musi należeć do wnętrza prostokąta lub jego boku  $t = T$ . W tym punkcie

$$v_{xx}(x_1, t_1) = u_{xx}(x_1, t_1) \geq 0, \quad (6.111)$$

oraz

$$v_t(x_1, t_1) = u_t(x_1, t_1) - k \geq 0, \quad (6.112)$$

co daje ostrą nierówność  $u_t(x_1, t_1) > 0$ . Istnieje zatem taki punkt, w którym równanie ciepła nie jest spełnione. Sprzeczność.  $\square$

Najważniejszym wnioskiem z zasady maksimum jest twierdzenie o jednoznaczności rozwiązania równania ciepła. Istnienie już pokazaliśmy konstruując *explicite* rozwiązania na różnych obszarach.

**Twierdzenie 8 (Jednoznaczność).** Niech dwie funkcje ciągłe  $u_1$  i  $u_2$  są określone na  $[0, L] \times [0, T]$  spełniają równanie ciepła

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} + f, \quad (x, t) \in (0, l) \times (0, \infty) \quad (6.113)$$

z identycznymi warunkami początkowymi oraz brzegowymi dla każdej z nich. Wtedy  $u_1 \equiv u_2$ .

*Dowód.* Zdefiniujmy  $v := u_2 - u_1$  i zauważmy, że  $v$  jest również rozwiązaniem równania ciepła ale tym razem z zerowymi warunkami początkowymi. Ponadto jest ciągła i z zasady maksimum przyjmuje swoje maksimum dla  $t = 0$ ,  $x = 0$  lub  $x = L$ . Zerowanie się warunków pociąga za sobą  $v \equiv 0$ , czyli  $u_1 \equiv u_2$ .  $\square$

**Przykład. (Rozwiązania nieograniczone)** Zauważmy, że istotnym składnikiem dowodu jednoznaczności jest znikanie rozwiązania w nieskończoności czyli (fizycznie uzasadniona) ograniczoność. Gdy zrezygnujemy z tego wymagania to sytuacja się poważnie komplikuje. Niech

$$w(x, t) := \frac{x e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}^{\frac{3}{2}}} = -2G_x(x, t), \quad (6.114)$$

gdzie  $G$  jest jądrem ciepła oraz dla uproszczenia i bez utraty ogólności przyjęliśmy  $\alpha = 1$ . Bezpośrednim rachunkiem możemy pokazać, że  $w$  spełnia równanie ciepła  $w_t = w_{xx}$  na prostej. Ponadto,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} w(x, t) = 0, \quad t > 0 \quad \text{oraz} \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} w(x, t) = 0, \quad x > 0, \quad (6.115)$$

czyli zarówno warunki brzegowe oraz początkowy są zerowe. Zatem jeśli  $u$  jest rozwiązaniem równania ciepła z dowolnym warunkiem początkowym (6.69) to  $u + Cw$  również nim jest dla dowolnej stałej  $C \in \mathbb{R}$ . Co jest zatem nie tak? Funkcja  $w$  jest tak naprawdę nieograniczona. Zobaczyc to można sprawdzając jej wartość w  $t \rightarrow 0^+$  podążając po krzywej  $x = 2\sqrt{t}$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} w(2\sqrt{t}, t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1}}{\sqrt{\pi t}} = \infty. \quad (6.116)$$

Zatem jeśli nie kierujemy się fizyką to możemy otrzymać naprawdę nieintuicyjne rezultaty!

## 6.4 Dyfuzje nieliniowe

W wielu zastosowaniach konieczne jest aby współczynnik dyfuzji zależał od koncentracji badanej substancji.

**Przykład.** (*Insekty*) Załóżmy, że populacja insektów rozprzestrzenia się dyfuzyjnie. Sensownie jest założyć, że strumień takiego ruchu zależy nieliniowo od liczności populacji (istnieje presja populacyjna do szybkości zdobywania nowego terenu). Wtedy równanie dyfuzji ma postać

$$u_t = (D(u)u_x)_x. \quad (6.117)$$

Można je rozpisać jako

$$u_t = D'(u)u_x^2 + D(u)u_{xx}, \quad (6.118)$$

czyli dzięki nieliniowości pojawia się dodatkowy człon konwekcyjny.

**Przykład.** (*Ciekły hel*) W niskich temperaturach ciepło w ciekłym helu jest transportowane zgodnie z innym prawem niż Fouriera. Opisuje je równanie Gorter-Mellinka

$$u_t = \left(kT_x^{\frac{1}{3}}\right)_x. \quad (6.119)$$

Zauważmy, że równanie ma osobliwość dla  $T_x \rightarrow 0$ .

**Przykład.** (*Ośrodek porowaty*) Niech  $u = u(x, t)$  oznacza wilgotność objętościową gleby w punkcie  $x$  i czasie  $t$ . Jeśli zaniedbamy grawitację to zgodnie z prawem Darcy'ego woda w nienasyconym ośrodku porowatym rozprzestrzenia się zgodnie z gradientem ciśnienia kapilarnego, czyli

$$q = -k \frac{dp}{dx}, \quad (6.120)$$

gdzie  $k$  jest związane z rozkładem porów w ośrodku. Eksperyment pokazuje, że ciśnienie kapilarne jest monotoniczną funkcją wilgotności. Zatem

$$q = -k \frac{dp}{du} \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (6.121)$$

Zachowanie masy daje nam teraz

$$u_t = (D(u)u_x)_x, \quad (6.122)$$

gdzie zdefiniowaliśmy dyfuzyjność ośrodka. W bardzo wielu przypadkach ta wielkość jest funkcją potęgową, czyli

$$u_t = D_0(u^m u_x)_x, \quad (6.123)$$

gdzie  $m > 0$  oraz  $D_0 > 0$ . Powyższe równanie nosi nazwę *równania ośrodka porowatego*. Jest ono osobliwe dla  $u \rightarrow 0$ .

**Przykład.** (*Lodowce*) Rozważmy ogromną masę lodu - lodowiec lub lądolód. Niech  $h = h(x, t)$  będzie wysokością lodowca w punkcie  $x$  i czasie  $t$  (jak zwykle ma to miejsce, lodowiec porusza się głównie w jednym kierunku więc sensowne wydaje się przybliżenie jednowymiarowe). Jeśli  $v$  oznacza prędkość lodowca, a  $M$  tempo opadu śniegu to zachowanie masy daje

$$h_t + (vh)_x = M. \quad (6.124)$$

Prawo konstytutywne mówiące o prędkości lodowca pochodzi od Glena i Nye i mówi

$$v = kh\tau^n, \quad (6.125)$$



gdzie  $k$ ,  $n$  są stałymi, a  $\tau$  jest naprężeniem wywołującym ruch lodowca. Zwykle  $n \approx 3$ . Ponieważ lodowiec porusza się głównie dzięki swojemu ciężarowi to naprężenie dane jest prawem hydrostatycznym (zaniedbujemy tutaj ciśnienie atmosferyczne)

$$\tau = -\rho g h h_x. \quad (6.126)$$

Podstawiając wszystko do prawa zachowania mamy

$$h_t = K \left( h^{n+2} |h_x|^{n-1} h_x \right)_x + M, \quad (6.127)$$

gdzie  $K$  jest kolejną stałą. Jest to wysoce nieliniowe podwójnie zdegenerowane równanie paraboliczne.

**Przykład. (Reakcja-dyfuzja)** Wiele zjawisk w przyrodzie zawiera zarówno elementy dyfuzyjne jak i reakcyjne. Można to opisać równaniem

$$u_t - Du_{xx} = f(u), \quad (6.128)$$

gdzie  $f$  odpowiada za człon reakcyjny. Na przykład, jeśli założymy że  $u$  opisuje licznosc populacji dyfundującej w przestrzeni oraz rozmnażającej się zgodnie z prawem logistycznym to otrzymujemy równanie Fishera

$$u_t - Du_{xx} = ru \left( 1 - \frac{u}{K} \right). \quad (6.129)$$

**Przykład. (Równanie Burgersa)** Prototypowym równaniem nieliniowej konwekcji-dyfuzji jest równanie Burgersa

$$u_t + uu_x = Du_{xx}. \quad (6.130)$$

Pierwszy człon tego równania spotkaliśmy już wcześniej przy okazji badania fal uderzeniowych. Okazuje się, że człon dyfuzyjny działa przeciwko nieliniowej konwekcji i potrafi załagodzić katastrofę gradientową. Powyższe równanie powstaje jako najprostszy model konwekcji płynu lepkiego, wtedy  $D$  jest lepkością kinematyczną płynu. Istnieje zadziwiający wzór zwany *transformacją Cole-Hopfa* przeprowadzający równanie Burgersa w liniowe równanie ciepła.

Niech najpierw  $u = w_x$  dla pewnej funkcji  $w$ . Wtedy (6.130) daje nam

$$u_{xt} + w_x w_{xx} - Dw_{xxx} = 0, \quad (6.131)$$

co można od razu scałkować

$$u_t + \frac{1}{2} w_x^2 - Dw_{xx} = 0, \quad (6.132)$$

gdzie stała całkowania się zeruje ponieważ zakładamy, że w nieskończoności rozwiązania znikają. W końcu podstawy

$$w = -2D \ln v. \quad (6.133)$$

Obliczając pochodne cząstkowe  $w$  możemy napisać

$$0 = w_t + \frac{1}{2} w_x^2 - Dw_{xx} = -\frac{2D}{v} (v_t - Dv_{xx}). \quad (6.134)$$

Zatem podstawienie  $u = -2Dv^{-1}v_x$  co daje pozwala nam zamienić (6.130) w

$$v_t = Dv_{xx}. \quad (6.135)$$

Jeśli  $u$  spełnia warunek początkowy  $u(x, 0) = \phi(x)$ , to  $v$  spełnia

$$v(x, 0) = \exp\left(-\frac{1}{2D} \int_0^x \phi(y) dy\right) =: \psi(x). \quad (6.136)$$

Od razu możemy zatem zapisać rozwiązanie naszego zagadnienia początkowego dla równania Burgersa

$$v(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi, t) \psi(\xi) d\xi, \quad (6.137)$$

a po powrocie do zmiennej wyjściowej mamy

$$u(x, t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-\xi}{t} e^{-\frac{K(\xi, x, t)}{2D}} d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{K(\xi, x, t)}{2D}} d\xi}, \quad (6.138)$$

gdzie

$$K(\xi, x, t) = \frac{(x - \xi)^2}{2t} + \int_0^x \phi(y) dy. \quad (6.139)$$

Otrzymaliśmy zatem wzór analityczny na rozwiązanie zagadnienia początkowego dla równania Burgersa. Jest to jeden z niewielu przypadków, gdzie trudne równanie nieliniowe może być rozwiązane za pomocą jawnego wzoru. Nie należy jednak przeceniać znaczenia faktu, że posiadamy rozwiązanie analityczne - w końcu jest ono bardzo skomplikowane i na pierwszy rzut oka nic nam nie mówi. Istnieje jednak szereg technik aproksymacyjnych, które pozwalają na zbadanie zachowania się rozwiązania dla różnych granic oraz szczególnych warunków początkowych. Najważniejszym przypadkiem granicznym jest oczywiście  $D \rightarrow 0$ . Możemy wtedy zobaczyć jak z gładkiego rozwiązania tworzy się fala uderzeniowa. Nie będziemy jednak robić tego tutaj.

#### 6.4.1 Rozwiązania samopodobne

Nieliniowe równania paraboliczne stanowią ogromną gałąź współczesnej matematyki. Nie ma ogólnych metod ich rozwiązywania a nawet badania ich rozwiązań. Jednakże bardzo użyteczna jest metoda poszukiwania rozwiązań samopodobnych. Nie daje ona odpowiedzi na zagadnienia początkowe czy brzegowe ale bardzo często pozwala na znalezienie kandydatów na postaci asymptotyczne innych rozwiązań.

Metoda rozwiązań samopodobnych ma swoje źródła w geometrycznej teorii grup Liego ale tutaj zobaczymy jednak jej praktyczną wersję. Załóżmy, że mamy równanie

$$u_t = (D(u)u_x)_x, \quad (6.140)$$

lub jakiegokolwiek inne równanie paraboliczne nieliniowe. Przykładowo zajmijmy się równaniem ośrodka porowatego  $D(U) = U^m$ . Poszukajmy rozwiązań postaci

$$u(x, t) = t^a U(\eta), \quad \eta = xt^b, \quad (6.141)$$

gdzie stałe  $a$  i  $b$  trzeba wyznaczyć. Obliczając pochodne mamy

$$u_t = at^{a-1}U(\eta) + bxt^{a+b-1}U'(\eta), \quad u_x = t^{a+b}U'(\eta). \quad (6.142)$$

Możemy podstawić je do równania i otrzymać

$$at^{a-1}U + bt^{a-1}\eta U' = t^{a+2b+ma} (U^m U')'. \quad (6.143)$$

Zatem aby równanie miało sens to  $a - 1 = a + 2b + ma$ . Musimy jeszcze znaleźć drugie równanie aby wyznaczyć stałą  $a$ . Można to zrobić z warunków brzegowych (o ile tylko jest to możliwe). Dla

przykładu założmy, że w chwili  $t = 0$  uwolniona zostaje stała ilość substancji w punkcie  $x = 0$ . Oznacza to, że całkowita masa jest stała

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx = t^a \int_{-\infty}^{\infty} U(xt^b) dx = t^{a-b} \int_{-\infty}^{\infty} U(\eta) d\eta. \quad (6.144)$$

Zatem aby powyższe równanie miało sens musimy mieć  $a = b$ . Pierwsze równanie na parametry daje nam zatem  $a = -\frac{1}{2+m}$ . Rozwiązanie samopodobne ma postać

$$u(x, t) = t^{-\frac{1}{2+m}} U\left(xt^{-\frac{1}{2+m}}\right), \quad (6.145)$$

gdzie  $U$  spełnia

$$-\frac{1}{2+m} (U + \eta U') = (U^m U')'. \quad (6.146)$$

Od razu możemy zapisać

$$-\frac{1}{2+m} (\eta U)' = (U^m U')', \quad (6.147)$$

czyli

$$-\frac{1}{2+m} \eta U = U^m U', \quad (6.148)$$

gdzie wzięliśmy stałą całkowania równą zero. Od razu możemy otrzymać gotowe rozwiązanie w jawnej postaci

$$U(\eta) = \left( K - \frac{1}{2} \frac{m}{2+m} \eta^2 \right)_+^{\frac{1}{m}}. \quad (6.149)$$

Znak  $+$  w indeksie dolnym oznacza, że wzór jest poprawny jedynie dla dodatnich wyrażeń pod pierwiastkiem. Resztę uzupełniamy przez zero.

Zobaczmy teraz jeszcze inny przykład, w którym pojawia się równanie paraboliczne.

**Przykład.** (*Zamarzanie jeziora*) Rozważmy jezioro i przez  $u(x, t)$  oznaczmy jego temperaturę na głębokości  $x$  i czasie  $t$ . Wiemy, że początkowo  $u(x, 0) = \phi(x)$ . Założmy, że na powierzchni panuje pewna (ujemna) temperatura, czyli  $u(0, t) = u_0$  a jezioro zaczyna zamarzać. Po czasie  $t$  granica między lodem a wodą oznaczona jest przez  $s = s(t)$ . Zauważmy, że punkt styku wody i lodu nie jest znany i musi być znaleziony jako część rozwiązania.

Aby dopełnić formułowania problemu potrzebujemy zadać drugi warunek brzegowy. Podczas każdej przemiany fazowej następuje wymiana ciepła utajonego  $L$  (na jednostkę masy) z otoczeniem przy zachowaniu stałej temperatury. Gdy granica między fazami zmienia się o  $\Delta s$  w czasie  $\Delta t$  to uwolnione zostaje ciepło  $\rho \Delta s L$ . Aby energia była zachowana, powyższe ciepło musi równać się różnicy ciepł między fazami

$$(k_1 u_x(s(t)^-, t) - k_2 u_x(s(t)^+, t)) \Delta t = L \rho \Delta s, \quad (6.150)$$

przechodząc do granicy otrzymujemy *warunek Stefana*

$$k_1 u_x(s(t)^-, t) - k_2 u_x(s(t)^+, t) = L \rho s'(t), \quad (6.151)$$

gdzie primem oznaczyliśmy pochodną zwyczajną po czasie. Tutaj  $k_i$  oznaczają współczynniki przewodności cieplnej każdej z faz.

Kompletny problem można sformułować następująco. Temperatura zmienia się zgodnie z równaniem ciepła

$$u_t = \alpha(x, s(t))^2 u_{xx} \quad \text{gdzie} \quad \alpha(x, s(t)) = \begin{cases} \alpha_1, & 0 < x < s(t) \\ \alpha_2, & x \geq s(t) \end{cases}. \quad (6.152)$$

Mamy zadane warunki brzegowy oraz początkowy

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad u(0, t) = u_0. \quad (6.153)$$

Na granicy między fazami temperatura jest ciągła

$$u(s(t)^-, t) = u(s(t)^+, t) = 0, \quad (6.154)$$

oraz następuje wymiana ciepła utajonego (warunek Stefana)

$$k_1 u_x(s(t)^-, t) - k_2 u_x(s(t)^+, t) = L \rho s'(t). \quad (6.155)$$

Podkreślmy, że  $s(t)$  nie jest znane od samego początku i musi zostać znalezione. Warunek brzegowy jest zatem zadany na nieznannej granicy faz. Jest to jeden z zagadnień ze *swobodnym brzegiem*.

Spróbujmy rozwiązać zagadnienie Stefana za pomocą metody rozwiązań samopodobnych. Niech  $u(x, 0) = c$ . Gdyby nasze zagadnienie było jedynie problem z jedną fazą to wiemy z poprzednich rozważań, że rozwiązanie równania ciepła na półprostej jest funkcją  $x/\sqrt{t}$ . Spróbujmy zatem poszukać

$$u(x, t) = U(\eta), \quad \eta = \frac{x}{\sqrt{t}}. \quad (6.156)$$

Wtedy też musimy mieć

$$s(t) = s_0 \sqrt{t}, \quad (6.157)$$

dla pewnego  $s_0 > 0$ . Równanie ciepła zapisać możemy wtedy w postaci

$$-\frac{1}{2}\eta U' = \alpha(\eta)^2 U'' \quad \text{gdzie} \quad \alpha(\eta) = \begin{cases} \alpha_1, & 0 < \eta < s_0 \\ \alpha_2, & \eta \geq s_0 \end{cases}. \quad (6.158)$$

Zauważmy, że teraz nieznaną granicą faz jest stała. Równanie zwyczajne można od razu rozwiązać (ponieważ  $\alpha(\eta)$  jest kawałkami stałe)

$$U(\eta) = A_{1,2} + B_{1,2} \operatorname{Erf}\left(\frac{\eta}{2\alpha_{1,2}}\right), \quad (6.159)$$

gdzie indeksy dolne 1, 2 oznaczają, że dla każdej dziedziny  $0 < \eta < s_0$  oraz  $x \geq 0$  mamy inne stałe całkowania. Warunek początkowy tłumaczy się na  $c = u(x, 0) = U(\infty)$ , z kolei warunek brzegowy w  $x = 0$  daje  $u_0 = u(0, t) = U(0)$ . Aby były spełnione musimy zatem mieć

$$A_1 = u_0, \quad A_1 + B_2 = c. \quad (6.160)$$

Ciągłość  $u$  w punkcie  $\eta = s_0$  oznacza

$$A_{1,2} + B_{1,2} \operatorname{Erf}\left(\frac{s_0}{2\alpha_{1,2}}\right) = 0. \quad (6.161)$$

Powyższy układ równań można rozwiązać i otrzymać

$$A_1 = u_0, \quad A_2 = -\frac{c \operatorname{Erf}\left(\frac{s_0}{2\alpha_2}\right)}{1 - \operatorname{Erf}\left(\frac{s_0}{2\alpha_2}\right)}, \quad B_1 = -\frac{u_0}{\operatorname{Erf}\left(\frac{s_0}{2\alpha_1}\right)}, \quad B_2 = \frac{c}{1 - \operatorname{Erf}\left(\frac{s_0}{2\alpha_2}\right)}. \quad (6.162)$$

Do znalezienia pozostała jeszcze stała  $s_0$ , która może zostać wyznaczona z warunku Stefana. Otrzymujemy równanie przestępne, które należy rozwiązać numerycznie.

## 7 Teoria dystrybucji

### 7.1 Motywacja

Wyberzemy się teraz na krótką wyprawę w kierunku z pozoru niezwiązanego z równaniami cząstkowymi. Zarówno w teorii jak i w praktyce bardzo użyteczne jest rozważanie odwzorowań, które są ogólniejsze niż funkcje. Widzieliśmy już, że jądro ciepła staje się coraz bardziej skoncentrowane w  $x = 0$  przy  $t \rightarrow 0^+$ . Jednocześnie jego całka była stale równa jedności. Graniczna postać takiego wyrażenia nie jest funkcją co stoi w sprzeczności do potocznie używanej nazwy takiego tworu - „funkcji Diraca” (my będziemy mówić „delta Diraca” lub „miara Diraca”). Fizycznie, delta Diraca oznacza skoncentrowany w punkcie ładunek lub masę (powyższe przejście graniczne uzasadnia tę interpretację).

Niektórzy (błędnie) definiują deltę Diraca jako funkcję  $\delta$ , która ma własność taką że  $\delta(x) = 0$  dla  $x \neq 0$  oraz  $\int \delta(x) dx = 1$ . Oczywiście taka funkcja nie istnieje ponieważ znika ona na zbiorze miary zero więc jej całka jest również równa zero (a nie 1). Miejscami spotkać można również inną, karkołomną, definicję która kładzie  $\delta(0) = \infty$ . Oprócz powyższej sprzeczności, tym razem wartości delty wychodzą poza zbiór liczb zespolonych (nie wiadomo co tutaj oznacza symbol  $\infty$ ).

Powyższe intuicyjne definicje są używane współcześnie i pokazują trudność w ścisłym zdefiniowaniu czym dokładnie jest granica jądra ciepła przy  $t \rightarrow 0^+$ . Historycznie, idee związane z „funkcjami uogólnionymi” pojawiły się już w drugiej połowie XIX w. Były później używane formalnie przez Heaviside’a oraz Diraca. Dopiero jednak w latach pięćdziesiątych XX w. wszystkie pojęcia zostały należycie sformalizowane przez Laurenta Schwartza. Zajmijmy się teraz prześledzeniem odpowiedniej ścisłej konstrukcji.

Jądro ciepła nie jest wyjątkowe w przybliżaniu delty Diraca. Zwłaszcza jeśli chodzi o własność filtrowania wartości funkcji.

**Twierdzenie 9** (Przybliżenie jedności). *Niech  $f$  będzie dodatnią funkcją całkowalną taką, że*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1. \quad (7.1)$$

*Zdefiniujmy  $f_n(x) = \frac{1}{n} f\left(\frac{x}{n}\right)$ . Jeśli  $\varphi$  jest różniczkowalna na  $\mathbb{R}$  oraz ograniczona przez  $M > 0$  to*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f_n(x) dx = \varphi(0). \quad (7.2)$$

*Dowód.* Mamy oczywiście  $\int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = 1$ . Niech teraz  $\cdot$ . Zapiszmy

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f_n(x) dx - \varphi(0) \right| \leq \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x) - \varphi(0)| f\left(\frac{x}{n}\right) dx, \quad (7.3)$$

ponieważ całka z  $f_n$  wynosi 1. Idea dowodu polega na rozdzieleniu całki na obszary, w którym raz  $\varphi(x)$  jest bliskie  $\varphi(0)$ , a raz ogon całki z  $f$  jest mały. Ustalmy  $A > 0$  i zapiszmy

$$\frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x) - \varphi(0)| f\left(\frac{x}{n}\right) dx = \frac{1}{n} \left( \int_{-\infty}^{-A} + \int_{-A}^A + \int_A^{\infty} \right). \quad (7.4)$$

Ogon możemy oszacować poprzez

$$\frac{1}{n} \int_A^{\infty} |\varphi(x) - \varphi(0)| f\left(\frac{x}{n}\right) dx \leq 2M \int_{nA}^{\infty} f(y) dy, \quad (7.5)$$

gdzie podstawiliśmy  $x = ny$ . Podobnie postępujemy z całką po  $(-\infty, A]$ . Następnie mamy

$$\frac{1}{n} \int_{-A}^A |\varphi(x) - \varphi(0)| f\left(\frac{x}{n}\right) dx \leq \max_{x \in [-A, A]} |\varphi(x) - \varphi(0)| \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x}{n}\right) dx = \max_{x \in [-A, A]} |\varphi(x) - \varphi(0)|. \quad (7.6)$$

Korzystając z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej mamy

$$\frac{1}{n} \int_{-A}^A |\varphi(x) - \varphi(0)| f\left(\frac{x}{n}\right) dx \leq \max_{x \in [-A, A]} |\varphi'(\xi)| |x| \leq A \max_{x \in [-A, A]} |\varphi'(\xi)|, \quad (7.7)$$

gdzie  $\xi$  jest pomiędzy 0 a  $x$ . Jeśli teraz wybierzemy  $A = \frac{1}{\sqrt{n}}$  to zgodnie z (7.5) ogony całki dążą do zera, a z ciągłości pochodnej mamy

$$\frac{1}{n} \int_{-A}^A |\varphi(x) - \varphi(0)| f\left(\frac{x}{n}\right) dx \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{x \in [-\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}]} |\varphi'(\xi)| \rightarrow 0. \quad (7.8)$$

Zatem  $f_n$  ma dokładnie taką samą własność filtrowania jak jądro ciepła.  $\square$

Widzimy zatem, że istnieje nieskończenie wiele ciągów funkcyjnych, których granice mogą być kandydatami na deltę Diraca. Zauważmy również, że w powyższym przykładzie lokalne zachowanie się funkcji  $\varphi$  jest przybliżone przez całkę policzoną po całej dziedzinie. Jeśli zatem formalnie zapiszemy  $f_n \rightarrow \delta$ , to wydaje się sensowne zapisać

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0), \quad (7.9)$$

dla odpowiednio regularnych funkcji  $\varphi$ . Tę własność możemy uczynić ścisłą jeśli rozważymy całkę jako *funkcjonał* odwzorowujący  $\varphi$  w pewną liczbę.

## 7.2 Funkcje próbne i funkcjonały

Okazuje się, że najbardziej użyteczną klasą funkcji, na których nasze funkcjonały mają dział są funkcje próbne.

**Definicja 19.** Funkcja próbna  $\varphi$  to funkcją należącą do klasy  $C^\infty(\mathbb{R})$  znikającą poza pewnym skończonym przedziałem. Przestrzeń wszystkich funkcji próbnych oznaczamy przez  $\mathcal{D}$ .

Być może nie jest do końca jasne, że funkcje o podanej wyżej własności istnieją. Pokazuje to jednak poniższy przykład.

**Przykład.** Funkcja

$$\varphi(x) = \exp\left(\frac{1}{x^2 - 1}\right) \chi_{(-1,1)}, \quad (7.10)$$

gdzie  $\chi$  jest funkcją charakterystyczną odcinka, jest funkcją próbną. Dla dowodu wystarczy pokazać, że  $\varphi$  jest różniczkowalna w  $x = 1$  nieskończenie wiele razy (punkt  $x = -1$  jest analogiczny). Licząc pochodną pokazujemy, że

$$\varphi'(x) = -\frac{2x}{(x^2 - 1)^2} \exp\left(\frac{1}{x^2 - 1}\right), \quad (7.11)$$

dla  $x \in (-1, 1)$ . Podobnie można pokazać, że dowolna pochodna  $\varphi$  będzie kombinacją liniową iloczynów funkcji wykładniczej oraz wymiernej, której mianownik zawiera  $(x^2 - 1)^n$  dla pewnej liczby  $n$ . Ponieważ funkcja wykładnicza rośnie szybciej niż jakikolwiek wielomian (przypomnij sobie jak to pokazać!), mamy że

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(x^2 - 1)^n} \exp\left(\frac{1}{x^2 - 1}\right) = 0. \quad (7.12)$$

Zatem każda pochodna znika w  $x = -1$  i jest tam ciągła.

**Przykład.** Inne funkcje próbne można tworzyć za pomocą powyższej przez odpowiednie translacje oraz dylatacje. Zbiór funkcji próbnych jest przestrzenią liniową nad ciałem  $\mathbb{R}$ .

Potrzebne nam będzie również pojęcie zbieżności w przestrzeni  $\mathcal{D}$ . To znaczy, zdefiniować musimy co oznacza że ciąg funkcji z  $\mathcal{D}$  zbiega (punktowa oraz jednostajna zbieżność nie jest wystarczająco silna dla dalszych zastosowań).

**Definicja 20.** Niech  $\varphi_n \in \mathcal{D}$  będzie ciągiem funkcji próbnych znikających poza wspólnym przedziałem domkniętym. Mówmy, że  $\varphi_n$  zbiega do  $\varphi \in \mathcal{D}$  w  $\mathcal{D}$  jeśli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi_n^{(k)}(x) - \varphi^{(k)}(x)| = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (7.13)$$

czyli każda pochodna  $\varphi_n$  zbiega jednostajnie do pochodnej  $\varphi$ .

Możemy teraz przejść do definicji dystrybucji.

**Definicja 21.** Funkcjonałem na przestrzeni funkcji próbnych nazywamy odwzorowanie  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ . Jego działanie na funkcji próbnej  $\varphi$  będziemy oznaczać poprzez  $(f, \varphi)$ .

**Definicja 22.** Dystrybucją nazywamy funkcjonal liniowy przekształcający  $\mathcal{D}$  w  $\mathbb{R}$  będący ciągłym w następującym słabym sensie. Niech  $\varphi_n$  będzie ciągiem funkcji próbnych znikających poza wspólnym przedziałem. Jego jednostajną granicę oznaczmy przez  $\varphi$ . Wtedy funkcjonal  $f$  jest ciągły jeżeli

$$(f, \varphi_n) \rightarrow (f, \varphi) \quad \text{gdy} \quad n \rightarrow \infty. \quad (7.14)$$

Zbiór wszystkich dystrybucji będziemy oznaczać przez  $\mathcal{D}'$ .

Oczywiście wyrażenie w powyższym wzorze oznacza zbieżność liczb. Wreszcie możemy podać ścisłą definicję delty Diraca.

**Definicja 23.** Deltą Diraca (lub dystrybucją Diraca) nazywamy taką dystrybucję  $\delta \in \mathcal{D}'$ , która zdefiniowana jest następującym wzorem

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0), \quad \varphi \in \mathcal{D}. \quad (7.15)$$

Na ćwiczeniach pokażemy, że powyższa definicja jest poprawna.

**Przykład.** Inne funkcjonały można tworzyć za pomocą funkcji całkowanych lokalnie  $f$  to jest takich, dla których  $\int_I |f(x)| dx < \infty$  gdzie  $I \subset \mathbb{R}$  jest odcinkiem domkniętym. Niech  $f$  będzie lokalnie całkowalna. Wtedy definiuje ona dystrybucję za pomocą wzoru

$$(f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}. \quad (7.16)$$

Dowód tego faktu pokażemy na ćwiczeniach.

W związku z tym, że wiele dystrybucji jest generowanych przez funkcje będziemy używać następującej notacji dla delty Diraca

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0). \quad (7.17)$$

Należy jednak pamiętać, że jest to jedynie notacja - tak zwana „użyteczna fikcja”. Powróćmy jeszcze do pierwszego przykładu w tym rozdziale. Pokazaliśmy tam, że jeśli  $f$  jest całkowalna to dla każdej funkcji próbnej zachodzi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \varphi(x) dx = \varphi(0). \quad (7.18)$$

Jak należy interpretować taką granicę? Wiemy, że prawa strona powyższej równości jest definicją delty Diraca, zatem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \delta(x) \varphi(x) dx. \quad (7.19)$$

Ponieważ ciąg  $f_n$  definiuje ciąg dystrybucji to chciałoby się zapisać  $f_n \rightarrow \delta$ . Okazuje się, że jest to dobra definicja zbieżności ciągów dystrybucji.

**Definicja 24.** Niech  $f_n \in \mathcal{D}'$ . Jeśli istnieje taka dystrybucja  $f$ , że zachodzi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n, \varphi) = (f, \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}, \quad (7.20)$$

to mówimy, że  $f_n$  zbiega do  $f$  dystrybucyjnie (lub \*słabo).

Zauważmy, że powyższa definicja zakłada istnienie granicy będącej dystrybucją. Pokazanie, że dany ciąg dystrybucji posiada lub nie posiada granicy jest trudną sprawą. Zbieżność dystrybucyjna jest czymś zupełnie innym niż zbieżność punktowa.

**Przykład.** Wiemy, że  $f_n(x) = \sin(nx)$  nie ma granicy punktowej dla  $x \neq 0$ . Jest to oczywiście funkcja lokalnie całkowalna i dlatego definiuje dystrybucję

$$(f_n, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} \sin(nx) \varphi(x) dx. \quad (7.21)$$

Ponieważ  $\varphi$  jest funkcją próbną to jest również ograniczona przez, powiedzmy,  $M$ . Załóżmy, że znika poza przedziałem  $[a, b]$ . Mamy teraz

$$|(f_n, \varphi)| \leq M \left| \int_a^b \sin(nx) dx \right| \leq \frac{2M}{n}, \quad (7.22)$$

ponieważ  $|\cos(nx)| \leq 1$ . Widzimy teraz, że prawa strona powyższej nierówności zbiega do zera wraz z  $n \rightarrow \infty$ . Ostatecznie  $f_n$  zbiegają do dystrybucji zerowej.

Na dystrybucjach można wykonywać podstawowe operacje. Poniższe definicje wynikają z własności dystrybucji generowanej przez funkcje lokalnie całkowalne.

**Definicja 25.** Niech  $f \in \mathcal{D}'$  oraz  $\varphi \in \mathcal{D}$ . Definiujemy następujące operacje.

- (Translacja)  $(f(x - y), \varphi(x)) = (f(x), \varphi(x + y))$ .
- (Dylatacja)  $(f(\alpha x), \varphi(x)) = \frac{1}{|\alpha|} (f(x), \varphi(\frac{x}{\alpha}))$  dla  $\alpha \neq 0$ .
- (Mnożenie przez funkcję) Jeśli  $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$  to  $(\psi f, \varphi) = (f, \psi \varphi)$ .

Zauważmy również, że mnożenie dwóch dystrybucji przez siebie jest często nieokreślone. Na przykład wyrażenie  $\delta(x)^2$  nie ma sensu.



### 7.3 Różniczkowanie dystrybucji

Dystrybucje mają jeszcze jedną bardzo użyteczną własność, dzięki której są bardzo często używane w równaniach różniczkowych. Okazuje się, że każdą dystrybucję można różniczkować dowolnie wiele razy. Żeby zobaczyć dlaczego tak jest weźmy dowolną funkcję różniczkowalną  $f$ . Wiemy, że jej pochodna definiuje dystrybucję wzorem

$$(f', \varphi) = \int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}. \quad (7.23)$$

Całując przez części otrzymujemy

$$(f', \varphi) = - \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)dx = -(f, \varphi'), \quad (7.24)$$

gdzie skorzystaliśmy z tego, że  $\varphi$  jako funkcja próbna jest tożsamościowo równa zero w nieskończoności. Widzimy zatem, że do definicji pochodnej powyższej dystrybucji wystarczy znajomość samej funkcji  $f$ . Motywuje to następującą definicję.

**Definicja 26.** Pochodna dystrybucji  $f$  jest zdefiniowana następującym wzorem

$$(f^{(n)}, \varphi) = (-1)^n (f, \varphi^{(n)}), \quad \varphi \in \mathcal{D}. \quad (7.25)$$

To, że powyższa definicja jest poprawna, to znaczy pochodna dystrybucji jest dystrybucją, od razu wynika z liniowości oraz własności funkcji próbnych.

**Przykład.** Niech  $H(x)$  będzie funkcją Heaviside'a czyli skokiem jednostkowym w zerze

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1, & x \geq 0. \end{cases} \quad (7.26)$$

Funkcja ta generuje dystrybucję standardowym wzorem. Zgodnie z definicją pochodnej dystrybucyjnej mamy

$$(H', \varphi) = -(H, \varphi') = - \int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi'(x)dx = - \int_0^{\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0) = (\delta, \varphi). \quad (7.27)$$

Widzimy zatem, że pochodną dystrybucyjną funkcji Heaviside'a jest delta Diraca. Jest to ściśle potwierdzenie intuicyjnego faktu wynikającego z różniczkowania ciągu funkcji przybliżających deltę Diraca.

**Przykład.** Podobnie możemy postąpić z pochodnymi delty Diraca

$$(\delta^{(n)}, \varphi) = (-1)^n (\delta, \varphi^{(n)}) = (-1)^n \varphi^{(n)}(0). \quad (7.28)$$

Zauważmy, że różniczkowalność dystrybucji jest, tak naprawdę, konsekwencją różniczkowalności funkcji próbnych. Jest to jeden z powodów dla których wybraliśmy właśnie taką klasę funkcji, na których nasze funkcjonały mają działać.

**Przykład.** Niech  $L$  będzie operatorem różniczkowym

$$L := a_n(x) \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{d}{dx} + a_0(x), \quad (7.29)$$

gdzie  $a_i(x)$  są funkcjami rzeczywistymi. Jeśli  $f \in \mathcal{D}'$  to

$$(Lf, \varphi) = \left( \sum_{i=0}^n a_i(x) \frac{d^i f}{dx^i}, \varphi \right) = \left( f, \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{d^i}{dx^i} (a_i(x) \varphi(x)) \right) = (f, L^* \varphi), \quad (7.30)$$

gdzie operator różniczkowy  $L^*$  jest tak zwanym *formalnym sprzężeniem* do  $L$ . Powyższy wzór jest oczywisty w przypadku, gdy  $f$  jest lokalnie całkowaną funkcją. Dla dowolnej dystrybucji jest to po prostu definicja.

Mamy już wszystkie składniki, które pozwalają nam wykorzystywać dystrybucje w równaniach różniczkowych. Często okazuje się, że wymaganie aby równanie różniczkowe posiadało klasyczne rozwiązanie jest zbyt restrykcyjne. Spotkaliśmy się już z takimi uogólnionymi rozwiązaniami przy okazji badania fal uderzeniowych. Dzięki dystrybucjom możemy podać najłagodniejszą wersję rozwiązania równania różniczkowego. Dla prostoty skupimy się jedynie na równaniach zwyczajnych jednak dla cząstkowych praktycznie wszystkie kroki uogólnia się w trywialny sposób.

Rozpatrzmy na początek najprostsze równanie

$$f' = 0. \quad (7.31)$$

Szukamy zatem dystrybucji, których pochodna jest równa zero. Oznacza to, że

$$0 = (f', \varphi) = -(f, \varphi'), \quad \varphi \in \mathcal{D}. \quad (7.32)$$

Dystrybucja  $f$  będzie zatem rozwiązaniem równania różniczkowego wtedy i tylko wtedy, gdy  $(f, \psi) = 0$  dla wszystkich funkcji próbnych  $\psi$  będących pochodną innej funkcji próbnej. Wiemy z ćwiczeń, że jest to równoważne temu, że  $\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 0$ . Niech teraz  $\varphi$  będzie dowolną funkcją próbną oraz  $\varphi_0$  jakąkolwiek inną o własności  $\int_{\mathbb{R}} \varphi_0(x) dx = 1$  (zawsze możemy tak przeskalować funkcję o niezerowej całce aby miała normę 1). Możemy wtedy zapisać

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx + \underbrace{\left[ \varphi(x) - \varphi_0(x) \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx \right]}_{\psi}. \quad (7.33)$$

Widzimy, że funkcja  $\psi$  ma znikającą całkę. Jeśli teraz  $f$  jest rozwiązaniem równania  $f' = 0$  to musimy mieć

$$(f, \varphi) = \left( f, \varphi_0 \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx \right) = \left( \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx \right) (f, \varphi_0) = C \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = (C, \varphi), \quad (7.34)$$

gdzie zdefiniowaliśmy stałą  $C$  niezależną od  $\varphi$ . Powyższy napis oznacza, że rozwiązaniem równania  $f' = 0$  jest  $f = C$  w sensie dystrybucyjnym. Wynik ten jest w pełnej zgodzie z klasyczną wersją równań różniczkowych.

Rozpatrzmy teraz ogólne niejednorodne równanie liniowe rzędu  $n$

$$Lf = g, \quad L := \sum_{i=0}^n a_i(x) \frac{d^i}{dx^i}. \quad (7.35)$$

Jeśli teraz będziemy traktować lewą i prawą stronę powyższego równania jako dystrybucje to z definicji mamy

$$(Lf, \varphi) = (g, \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}. \quad (7.36)$$

W powyższym przykładzie znaleźliśmy operator formalnie sprzężony do  $L$ , czyli

$$(f, L^* \varphi) = (g, \varphi). \quad (7.37)$$

Dystrybucja  $f$  jest rozwiązaniem równania różniczkowego (7.35) jeśli powyższa równość jest spełniona dla każdej funkcji próbnej  $\varphi \in \mathcal{D}$ . Takie rozwiązanie należy do jednej z trzech kategorii.

1. Jeśli rozwiązanie  $f$  okaże się funkcją, która jest  $n$ -krotnie różniczkowalna to mówimy, że jest **rozwiązaniem klasycznym**.
2. Jeśli rozwiązanie  $f$  jest funkcją, która jest mniej niż  $n$ -krotnie różniczkowalna to mówimy, że jest **rozwiązaniem słabym**.
3. Jeśli rozwiązanie  $f$  nie jest funkcją to mówimy, że jest **rozwiązaniem dystrybucyjnym**.

Powyższe przypadki są uszeregowane w kolejności od najbardziej regularnego do tego najmniej regularnego.

W szczególności możemy wziąć  $g(x) = \delta(x - \xi)$  i szukać rozwiązania równania

$$LG_\xi(x) = \delta(x - \xi). \quad (7.38)$$

Wtedy jeśli znajdziemy rozwiązanie powyższego to dystrybucja  $f$  zdefiniowana wzorem

$$(f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} (G_\xi, \varphi) d\xi, \quad \varphi \in \mathcal{D}, \quad (7.39)$$

jest rozwiązaniem równania  $Lf = g$ . Dystrybucję  $G_\xi$  nazywamy **funkcją Greena** (ponieważ prawie zawsze jest ona funkcją).

**Przykład.** Rozwiązaniem równania  $xf' = 0$  jest funkcja Heaviside'a  $H(x)$ . Rzeczywiście,

$$(xH', \varphi) = - (H, (x\varphi)') = - \int_{\mathbb{R}} H(x)(x\varphi(x))' dx = \int_0^\infty (x\varphi(x))' dx = 0. \quad (7.40)$$

Ponieważ  $H$  nie jest różniczkowalne to jest rozwiązaniem słabym. Jeśli szukalibyśmy jedynie klasycznych rozwiązań, to była by nim jedynie stała.

Na koniec pokażmy związek z rozwiązaniami dystrybucyjnymi a funkcją Greena. Dla przykładu weźmy zagadnienie rozchodzenia się ciepła

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} + f, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T), \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R} \\ u(-\infty, t) = 0, \quad u(\infty, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases} \quad (7.41)$$

Pokazaliśmy powyżej, że jego rozwiązanie dane jest wzorem

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^\infty G(x - \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (7.42)$$

gdzie  $G$  jest funkcją Greena. Zauważmy, że jeśli  $f(x, t) = \delta(x)\delta(t)$ , i rozumiemy wszystko w sensie dystrybucyjnym to

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^\infty G(x - \xi, t - \tau) \delta(\xi) \delta(\tau) d\xi d\tau = G(x, t). \quad (7.43)$$

Co potwierdza naszą intuicję, że funkcja Greena jest temperaturą w punkcie  $x$  i czasie  $t$  wywołaną umieszczeniem punktowego źródła ciepła w punkcie  $x = 0$  i czasie  $t = 0$ .

## 8 Równania Laplace'a i Poissona

Zajmiemy się teraz kolejnymi bardzo ważnymi równaniami cząstkowymi: Laplace'a i Poissona. Są to równania eliptyczne i zobaczymy, że ich rozwiązania wykazują zupełnie inne własności od rozwiązań równań parabolicznych. Najpierw jednak zobaczymy gdzie takie równania mogą powstać.

**Przykład.** (*Stacjonarny rozkład temperatury*) Już dobrze wiemy, że ewolucja temperatury na pewnym obszarze rządzi się równaniem ciepła

$$u_t = \alpha^2 \Delta u + f, \quad (8.1)$$

gdzie  $\Delta$  jest Laplasjanem. Jeżeli teraz poczekamy odpowiednio długo to stan naszego obszaru powinien zostać ustalony i wszelkie zmiany temperatury w czasie powinny ustać, to jest  $u_t = 0$ . Jak przykład możemy sobie wyobrazić ogrzewanie zimnego pokoju włączonymi co dopiero grzejnikami. Najpierw temperatura w całym pomieszczeniu zaczyna wzrastać aż osiągnie tę, która ustawiona jest na termostacie. Wyszczególnić można wtedy dwie fazy: przejściową (*transient*) oraz ustaloną (*steady-state*). Niech zatem pochodna po czasie znika, równanie ciepła przyjmuje postać

$$-\Delta u = \frac{f}{\alpha^2}. \quad (8.2)$$

To równanie nazywane jest *równaniem Poissona* a w przypadku braku źródeł, *równaniem Laplace'a*

$$\Delta u = 0. \quad (8.3)$$

Widzimy od razu, że dwa powyższe równania są jedynie ciekawe dla wymiarów większych lub równych 2, gdyż na prostej bezpośrednio całkowanie daje nam od razu wynik. Funkcje spełniające równanie Laplace'a nazywamy *funkcjami harmonicznymi*.

**Przykład.** (*Potencjał*) Bardzo ważne zastosowanie równań eliptycznych występuje w teorii potencjału zarówno grawitacyjnego jak i elektrostatycznego ale również potencjału prędkości w mechanice płynów. Tutaj skupimy się na polu grawitacyjnym.

Zgodnie z Prawem Powszechnego Ciężenia zaproponowanego przez Newtona dwie punktowe masy  $m$  i  $M$  przyciągają się siłą grawitacji proporcjonalną do odwrotności kwadratu ich odległości

$$\mathbf{F} = G \frac{Mm}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (8.4)$$

gdzie  $\mathbf{r}$  jest wektorem łączącym dwie masy a  $r := |\mathbf{r}|$  jego długością. Ponieważ siła jest wektorem musieliśmy w powyższym wzorze dodać wersor  $\mathbf{r}/r$  wskazujący kierunek i zwrot działania tej siły. Wyobraźmy sobie, że  $M$  jest masą pewnego dużego ciała a  $m$  masą próbną. Aby skupić się jedynie na polu wytworzonym przez to duże ciało warto zdefiniować *pole grawitacyjne* jako wektor

$$\mathbf{g} := \frac{\mathbf{F}}{m}. \quad (8.5)$$

Jest to również nic innego jak przyspieszenie grawitacyjne wytworzone przez masę  $M$ . Ponieważ  $\mathbf{F}$  jest siłą potencjalną to istnieje taki potencjał  $u = u(\mathbf{x})$ , że

$$\mathbf{g} = -\nabla u, \quad (8.6)$$

oraz nietrudno zobaczyć, że

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{GM}{|\mathbf{x}|} = \frac{GM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{GM}{r}, \quad r \neq 0. \quad (8.7)$$

Gdy chcielibyśmy znaleźć pole wytworzone przez dwie masy to wypadkowe  $\mathbf{g}$  byłoby sumą dwóch składowych, z których każda pochodziła by od każdej masy z osobna. W ogólności, dla dyskretnego rozkładu mas mamy

$$\mathbf{g}_j = \sum_{i \neq j} G m_i \frac{\mathbf{r}_{ij}}{(r_i - r_j)^3}, \quad (8.8)$$

co daje nam pole grawitacyjne działające na  $j$ -tą masę wytworzone przez wszystkie inne ciała. Wygodnie jest jednak wprowadzić ciągłą zmieniającą się gęstość objętościową rozkładu masy  $\rho = \rho(\mathbf{x})$  dającą pole w punkcie  $\mathbf{x}$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = G \iiint_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{y}) \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} d\mathbf{y}. \quad (8.9)$$

Spodziewamy się, że dla ciągłego rozkładu masy musi również istnieć potencjał grawitacyjny. Najpierw założmy, że  $\rho$  znika w obszarze zawierającym  $\mathbf{x}$ . Wtedy

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = -G \iiint_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{y}) \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) d\mathbf{y} = -\nabla \left( \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{G\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y} \right) =: -\nabla u, \quad (8.10)$$

gdzie gradient jest brany po zmiennej  $\mathbf{x}$ . Z drugiej strony możemy policzyć, że

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = G \iiint_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{y}) \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \right) d\mathbf{y} = 0. \quad (8.11)$$

Porównując dwa powyższe równania mamy

$$0 = \nabla \cdot (-\nabla u) = -\Delta u, \quad (8.12)$$

czyli potencjał dla obszarów bez masy spełnia równanie Laplace'a.

Założmy teraz, że  $\rho$  może być niezerowe na obszarze zawierającym  $\mathbf{x}$ . Problemem jest oczywiście to, że potencjał punktowej masy nie jest określony w  $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ . Wyizolujmy zatem ten punkt. Niech  $B(\mathbf{x}, \epsilon)$  będzie kulą o środku w  $\mathbf{x}$  i promieniu  $\epsilon$  a  $\partial B$  jej powierzchnią (sferą). Możemy wtedy zapisać

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = G \iiint_{\mathbb{R}^3 - B(\mathbf{x}, \epsilon)} \rho(\mathbf{y}) \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} d\mathbf{y} + G \iiint_{B(\mathbf{x}, \epsilon)} \rho(\mathbf{y}) \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} d\mathbf{y}. \quad (8.13)$$

Wiemy, że dywergencja pierwszej całki jest równa zero dlatego wystarczy rozpatrzeć drugą z nich. Skorzystajmy z twierdzenia o wartości średniej dla całek i napiszmy

$$\iiint_{B(\mathbf{x}, \epsilon)} \rho(\mathbf{y}) \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} d\mathbf{y} = \rho(\mathbf{y}^*) \iiint_{B(\mathbf{x}, \epsilon)} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} d\mathbf{y}. \quad (8.14)$$

Biorąc dywergencję i używając twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego mamy

$$\nabla \cdot \iiint_{B(\mathbf{x}, \epsilon)} \rho(\mathbf{y}) \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} d\mathbf{y} = \rho(\mathbf{y}^*) \iiint_{B(\mathbf{x}, \epsilon)} \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \right) d\mathbf{y} = \rho(\mathbf{y}^*) \iint_{\partial B(\mathbf{x}, \epsilon)} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \cdot \mathbf{n} dS(\mathbf{y}). \quad (8.15)$$

Ponieważ w ostatniej całce  $\mathbf{y}$  należy do powierzchni kuli o środku w  $\mathbf{x}$  i promieniu  $\epsilon$  to

$$\nabla \cdot \iiint_{B(\mathbf{x}, \epsilon)} \rho(\mathbf{y}) \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} d\mathbf{y} = \rho(\mathbf{y}^*) \iint_{\partial B(\mathbf{x}, \epsilon)} \frac{\epsilon}{\epsilon^3} dS(\mathbf{y}) = \rho(\mathbf{y}^*) \frac{\epsilon}{\epsilon^3} 4\pi\epsilon^2 = 4\pi\rho(\mathbf{y}^*). \quad (8.16)$$

Możemy teraz przejść do granicy z  $\epsilon \rightarrow 0$  i otrzymać

$$\nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 4\pi G\rho(\mathbf{x}), \quad (8.17)$$

co nazywane jest *prawem Gaussa*. W języku potencjału dostajemy zatem

$$-\Delta u = 4\pi G\rho, \quad (8.18)$$

czyli rozkład masy  $\rho$  definiuje nam potencjał określony równaniem Poissona.

**Przykład.** (*Przepływ potencjalny*) Niech  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$  określa pole prędkości nielepkiego płynu w punkcie  $\mathbf{x}$ , które nie zależy od czasu (przepływ stacjonarny). Z prawa zachowania masy mamy

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (8.19)$$

gdzie  $\rho$  jest gęstością płynu. Jeśli jest ona stała to

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (8.20)$$

zatem przepływ jest bezźródłowy. Jest ponadto założymy, że jest bezrotacyjny to

$$\nabla \times \mathbf{u} = 0. \quad (8.21)$$

Istnieje zatem potencjał  $\varphi$  spełniający

$$\mathbf{u} = -\nabla \varphi. \quad (8.22)$$

Korzystając z warunku na znikającą dywergencję mamy ostatecznie

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{u} = -\nabla \cdot \nabla \varphi = -\Delta \varphi, \quad (8.23)$$

czyli  $\varphi$  spełnia równanie Laplace'a. Mimo swojej prostoty (Feynman nazywa tę sytuację „suchą wodą”), powyższe równanie jest bardzo użyteczne przy opisie przepływów płynów o małej lepkości z dala od brzegów obszaru. Ważnym przykładem jest opis przepływu dookoła skrzydła samolotowego.

**Przykład.** (*Funkcje analityczne*) W teorii funkcji zespolonych pokazuje się piękny wynik mówiący o tym, że dla różniczkowalności  $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$  w sensie zespolonym (tak zwane funkcje *analityczne* lub *holomorficzne*) potrzeba i wystarcza aby spełnione były równania Cauchy-Riemanna

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x. \quad (8.24)$$

Obliczając drugie pochodne otrzymujemy

$$u_{xx} = v_{yx} = v_{xy} = -u_{yy}, \quad (8.25)$$

zatem  $\Delta u = 0$ . Podobnie  $\Delta v = 0$  czyli funkcje analityczne są harmoniczne.

## 8.1 Rozdzielanie zmiennych

Podobnie jak w przypadku równania ciepła również dla równań eliptycznych metoda rozdzielania zmiennych pozwala na znalezienie rozwiązań zagadnień początkowych. Należy się jednak spodziewać, że będzie ona działała jedynie dla prostych obszarów, z których prostokąt jest najłatwiejszy. Tutaj zajmiemy się okręgiem. Rozważmy zatem następujące zagadnienie

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u|_B = f, \end{cases} \quad (8.26)$$

gdzie  $B$  jest okręgiem jednostkowym o środku w  $0$ . Zagadnieniem Laplace'a na kuli zajmiemy się później. Oczywiście naturalnym jest przejście do współrzędnych biegunowych i napisanie  $u = u(r, \theta)$ . Nasze zagadnienie ma zatem postać

$$\begin{cases} \frac{1}{r} (ru_r)_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0, & 0 < r < 1, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi, \\ u(1, \theta) = f(\theta), & -\pi \leq \theta \leq \pi. \end{cases} \quad (8.27)$$

Ponieważ współrzędne biegunowe są osobliwe w  $r = 0$  możemy się spodziewać, że rozwiązanie równania również będzie posiadało singularność. Aby być w zgodzie z interpretacją fizyczną zażądajmy, żeby

$$|u(0, \theta)| \leq C. \quad (8.28)$$

Okresowość współrzędnych biegunowych również musi być wzięta pod uwagę dlatego wymagamy aby  $u(r, \cdot)$  oraz  $u_\theta(r, \cdot)$  były  $2\pi$ -okresowe. Rozdzielmy zatem zmienne i napiszmy

$$u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta). \quad (8.29)$$

Dzięki takiemu rozłożeniu zmiennych okresowe warunki brzegowe muszą być spełnione przez funkcję  $\Theta$

$$\Theta(-\pi) = \Theta(\pi), \quad \Theta'(-\pi) = \Theta'(\pi). \quad (8.30)$$

Przechodząc do równania otrzymujemy

$$\frac{1}{r} (rR')' \Theta + \frac{1}{r^2} R\Theta'' = 0, \quad (8.31)$$

co po podzieleniu przez  $R\Theta$  daje nam

$$\frac{r}{R} (rR')' = -\frac{1}{\Theta} \Theta'' = \lambda, \quad (8.32)$$

gdzie  $\lambda$  jest stałą, której dodatni znak antycypujemy z uwagi na przyszłe wyniki. Zajmijmy się najpierw równaniem na  $\Theta$

$$\Theta'' + \lambda\Theta = 0, \quad (8.33)$$

z warunkami (8.30). Rozwiązaniem tego zagadnienia jest oczywiście

$$\Theta(\theta) = C \cos(\sqrt{\lambda}\theta) + D \sin(\sqrt{\lambda}\theta), \quad (8.34)$$

z

$$\lambda = n^2, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (8.35)$$

Dzięki temu równanie na  $R$  przyjmuje postać

$$r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0, \quad (8.36)$$

co jest równaniem drugiego rzędu o zmiennych współczynnikach zwanym *równaniem Eulera*. Jest to jedno z nielicznych równań tego typu, dla których możemy podać rozwiązania analityczne. Aby je odgadnąć zauważmy, że różniczkowanie wielomianu obniża jego stopień o jeden. Dlatego spodziewamy się, że rozwiązaniem (8.36) jest

$$R(r) = r^\alpha, \quad (8.37)$$

dla pewnej stałej  $\alpha$ . Załóżmy, że  $n \neq 0$  i podstawmy ten ansatz do (8.36) otrzymujemy równanie kwadratowe na  $\alpha$

$$\alpha(\alpha - 1) + \alpha - n^2 = 0. \quad (8.38)$$

Rozwiązaniem jest

$$\alpha = \pm n, \quad (8.39)$$

czyli rozwiązaniem ogólnym (8.36) jest

$$R(r) = A_n r^n + B_n r^{-n}, \quad n \neq 0. \quad (8.40)$$

Dla  $n = 0$  równanie Eulera przyjmuje postać

$$r^2 R'' + r R' = 0, \quad (8.41)$$

czyli  $R(r) = A_0 + B_0 \ln r$ . Widzimy teraz, że dla ograniczoności funkcji  $u$  w  $(0, \theta)$  musimy mieć  $B_n = 0$  dla  $n \in \mathbb{N}$ . Zatem

$$u_n(r, \theta) = r^n (C_n \cos(n\theta) + D_n \sin(n\theta)), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (8.42)$$

Jako, że powyższa funkcja jest rozwiązaniem równania Laplace'a dla każdego  $n$  to spodziewamy się, że rozwiązanie ogólne ma postać

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [C_n \cos(n\theta) + D_n \sin(n\theta)] r^n, \quad 0 < r < 1, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi. \quad (8.43)$$

Współczynniki  $C_n$  i  $D_n$  jak zwykle zostaną znalezione z danego warunku, który w naszym przypadku jest warunkiem brzegowym

$$f(\theta) = u(1, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(n\theta) + D_n \sin(n\theta). \quad (8.44)$$

Jest to zwyczajny szereg Fouriera dla okresowej funkcji  $f$ , więc współczynniki wyliczyć można ze wzorów Eulera

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta, \quad C_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta, \quad D_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta. \quad (8.45)$$

Nie będziemy się zatrzymywać nad zbieżnością tak zdefiniowanego szeregu ale można pokazać, że definiuje on rozwiązanie równania Laplace'a w kole jednostkowym.

Podobnie jak w przypadku równania ciepła sprawdźmy, czy możemy otrzymać postać rozwiązania daną poprzez całkę z jądrem będącym funkcją Greena. Umieścimy (8.45) w (8.43) i zamieńmy kolejność sumowania oraz całkowania

$$u(r, \theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\cos(n\phi) \cos(n\theta) + \sin(n\phi) \sin(n\theta)) r^n \right] f(\phi) d\phi. \quad (8.46)$$

Uprośćmy wyrażenie w nawiasie kwadratowym

$$(\cos(n\phi) \cos(n\theta) + \sin(n\phi) \sin(n\theta)) r^n = \cos(n(\phi - \theta)) r^n, \quad (8.47)$$

zatem,

$$u(r, \theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n(\phi - \theta)) r^n \right] f(\phi) d\phi. \quad (8.48)$$

Sumę nieskończonego szeregu również można wyliczyć w sposób jawny. Aby zrobić to w najłatwiejszy sposób skorzystajmy z zespolonej reprezentacji funkcji trygonometrycznych

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n(\phi - \theta)) r^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (e^{in(\phi - \theta)} + e^{-in(\phi - \theta)}) r^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (re^{i(\phi - \theta)})^n + (re^{-i(\phi - \theta)})^n. \quad (8.49)$$



Każdy z szeregów jest szeregiem geometrycznym dlatego

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (re^{i(\phi-\theta)})^n + (re^{-i(\phi-\theta)})^n = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{1}{1 - re^{i(\phi-\theta)}} + \frac{1}{1 - re^{-i(\phi-\theta)}} - 2 \right], \quad (8.50)$$

zatem

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n(\phi - \theta)) r^n = \frac{1}{2} \frac{(1 - re^{i(\phi-\theta)}) + (1 - re^{-i(\phi-\theta)}) - (1 - re^{i(\phi-\theta)})(1 - re^{-i(\phi-\theta)})}{(1 - re^{i(\phi-\theta)})(1 - re^{-i(\phi-\theta)})}. \quad (8.51)$$

Co po uproszczeniu daje nam

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n(\phi - \theta)) r^n = \frac{1}{2} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\phi - \theta)}, \quad (8.52)$$

co nazywane jest *jądrem Poissona*. Powracając do całki otrzymujemy reprezentację rozwiązania

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\phi - \theta)} f(\phi) d\phi. \quad (8.53)$$

## 8.2 Funkcja Greena

Z funkcją Greena spotkaliśmy się już przy okazji równania ciepła. Zobaczymy teraz, że jest to bardzo użyteczne narzędzie do rozwiązywania równań eliptycznych. Historycznie to właśnie w rozwiązaniu równania Poissona Green wprowadził swoją funkcję. Nasze podejście będzie oparte na dystrybucji Diraca, którą zdefiniujemy w dość heurystyczny sposób a dokładniejszą analizę odłożymy do dodatku.

**Definicja 27.** Dystrybucją Diraca nazywamy odwzorowanie  $\delta$ , który spełnia następujące własności

1. Skupienie w zerze,

$$\delta(x) = 0, \quad x \neq 0. \quad (8.54)$$

2. Unormowanie,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (8.55)$$

Od razu udowodnimy własność filtrowania Delty Diraca

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (f(x) - f(x_0)) \delta(x - x_0) dx + \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0) \delta(x - x_0) dx. \quad (8.56)$$

Z definicji Delty Diraca ostatnia całka wynosi po prostu  $f(x_0)$  ponieważ tę wartość możemy wyłączyć przed całkę. Dla pozostałej całki mamy

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(x) - f(x_0)) \delta(x - x_0) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R} - (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)} (f(x) - f(x_0)) \delta(x - x_0) dx = 0, \quad (8.57)$$

z pierwszej własności Delty Diraca. Zatem

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0). \quad (8.58)$$

Wielowymiarową Deltę Diraca definiujemy jako iloczyn jednowymiarowych delt

$$\delta(\mathbf{x}) = \delta(x_1)\delta(x_2)\dots\delta(x_n), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (8.59)$$

Będziemy jeszcze potrzebować wzorów Greena

$$\iiint_D (u\Delta v - v\Delta u) \, d\mathbf{x} = \iint_{\partial D} (u\nabla v - v\nabla u) \cdot \mathbf{n} \, dS, \quad (8.60)$$

oraz

$$\iiint_D (u\Delta v - v\Delta u) \, d\mathbf{x} = \oint_{\partial D} (u\nabla v - v\nabla u) \cdot \mathbf{n} \, dS. \quad (8.61)$$

Podamy teraz bardzo ogólną definicję funkcji Greena, która jak się okaże, jest zgodna z naszym intuicyjnym podejściem

**Definicja 28.** Funkcją Greena  $G = G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$  dla równania eliptycznego  $Lu = f$  z warunkiem Dirichleta  $u|_{\partial D} = g$  nazywamy funkcję będącą rozwiązaniem

$$LG(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (8.62)$$

gdzie operator różniczkowy  $L$  działa na zmienną  $\mathbf{x}$  oraz  $G(\cdot, \mathbf{x}_0)|_{\partial D} = 0$  dla każdego  $\mathbf{x}_0$ .

My oczywiście zajmiemy się jedynie przypadkiem  $L = \Delta$ , czyli równaniem Poissona. Myśląc w terminach potencjału, funkcja Greena jest rozwiązaniem równania przy masie (lub ładunku elektrycznym) skoncentrowanym w punkcie  $\mathbf{x}_0$ . Gdy założymy, że warunek brzegowy jest jednorodny  $g \equiv 0$  to Możemy pomyśleć, że sumując takie punktowe ładunki otrzymamy rozwiązanie naszego równania, to jest jeśli

$$u(\mathbf{x}) := \iiint_D G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)f(\mathbf{x}_0)d\mathbf{x}_0, \quad (8.63)$$

to formalnie mamy (tak naprawdę takie przejście graniczne było udowodnione w szczególnym przypadku w Przykładach)

$$Lu(\mathbf{x}) = \iiint_D LG(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)f(\mathbf{x}_0) \, d\mathbf{x}_0 = \iiint_D \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)f(\mathbf{x}_0) \, d\mathbf{x}_0 = f(\mathbf{x}). \quad (8.64)$$

Czyli  $u$  zdefiniowane powyżej jest rozwiązaniem równania eliptycznego  $Lu = f$ . Jest to główny powód wprowadzenia funkcji Greena. Powyższy rachunek jest czysto formalny jednak z pomocą wzorów Greena możemy uściślić wynik. Weźmy  $L = \Delta$  i we wzorze (8.60) połączmy  $v(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$

$$\iiint_D (u\Delta G - G\Delta u) \, d\mathbf{x} = \iint_{\partial D} (u\nabla G - G\nabla u) \cdot \mathbf{n} \, dS. \quad (8.65)$$

Z definicji funkcji Greena, równania oraz z warunku brzegowego na  $u$  mamy

$$\iiint_D (u\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - G\Delta u) \, d\mathbf{x} = \iint_{\partial D} g\nabla G \cdot \mathbf{n} \, dS. \quad (8.66)$$

Ostatecznie

$$u(\mathbf{x}) = \iiint_D G(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})f(\mathbf{x}_0) \, d\mathbf{x}_0 + \iint_{\partial D} g\nabla_{\mathbf{x}_0} G \cdot \mathbf{n} \, dS, \quad (8.67)$$

gdzie zmieniliśmy nazwy zmiennych i jawnie oznaczyliśmy po jakiej zmiennej liczony jest gradient. Rozwiązaliśmy zatem równanie Poissona z niejednorodnym warunkiem brzegowym. Musimy oczywiście znać funkcję Greena dla obszaru  $D$  co zwykle nie jest łatwo otrzymać. Wzór dla dwóch wymiarów jest równie prosty do uzyskania.

Znajdziemy teraz funkcję Greena dla kilku szczególnych obszarów. Zaczniemy od całej przestrzeni  $D = \mathbb{R}^3$  (przypadek dwuwymiarowy zostawimy do zadań). Ponieważ żaden kierunek w  $\mathbb{R}^3$  nie jest wyróżniony spodziewamy się, że funkcja Greena zależy jedynie od odległości od ustalonego punktu  $\mathbf{x}_0$ . Położmy zatem  $r := |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ . Wtedy

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = G(r), \quad (8.68)$$

a z definicji funkcji Greena

$$\frac{1}{r} (rG')' = \delta(r). \quad (8.69)$$

Czyli dla  $r \neq 0$  mamy  $\frac{1}{r} (rG')' = 0$ , czego rozwiązaniem jest

$$G(r) = \frac{C}{r} + D, \quad r \neq 0. \quad (8.70)$$

Stałe  $C$  oraz  $D$  muszą być znalezione z drugiego warunku na Deltę Diraca, to jest jej unormowanie. Aby to zrobić zastosujemy dokładnie taki sam sposób jak w przypadku przykładu z potencjałem. Wybierzmy małą kulkę  $B(\epsilon)$  o promieniu  $\epsilon$  i środku w  $\mathbf{x}_0$ . Mamy

$$1 = \iiint_{\mathbb{R}^3} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) d\mathbf{x} = \iiint_{B(\epsilon)} \Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) d\mathbf{x} = \iiint_{B(\epsilon)} \nabla \cdot \nabla G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) d\mathbf{x} = \iint_{\partial B(\epsilon)} \nabla G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (8.71)$$

Ponieważ funkcja Greena zależy tylko od odległości od punktu  $\mathbf{x}_0$  oraz  $\nabla G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{n} = G'(r)$  mamy

$$1 = 4\pi\epsilon^2 G'(\epsilon), \quad (8.72)$$

co jest prawdziwe dla każdego  $\epsilon > 0$ . Dlatego odpowiedni warunek normalizacji to

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 G(\epsilon) = \frac{1}{4\pi}. \quad (8.73)$$

Stąd od razu znajdujemy stałe  $C = -\frac{1}{4\pi}$  oraz  $D = 0$ . Stąd

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}. \quad (8.74)$$

Jest to oczywiście potencjał grawitacyjny jaki znaleźliśmy wcześniej. Nasz wzór na reprezentację całkową rozwiązania równania Poissona (8.67) znaleźliśmy przy założeniu ograniczoności obszaru  $D$ . Inaczej całka powierzchniowa pozbawiona byłaby sensu. Aby znaleźć wersję dla całej przestrzeni musimy rozważać coraz to większe kule, które w granicy wypełniają całą przestrzeń. Wtedy rozwiązaniem  $\Delta u = f$  z  $u \rightarrow 0$  gdy  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$  jest

$$u(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} f(\mathbf{x}_0) d\mathbf{x}_0, \quad (8.75)$$

co jest identyczne z naszym wcześniejszym fizycznym wynikiem dotyczącym potencjału wywołanego ciągłym rozkładem masy. Jednak dla poprawności powyższego wzoru musimy mieć odpowiedni warunek malenia

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (u + ru_r) = 0. \quad (8.76)$$

Istnieją funkcje będące rozwiązaniem równania Poissona na całej przestrzeni, które nie spełniają powyższego warunku (na przykład różniące się o  $x$ ).

Znalezienie funkcji Greena dla obszarów ograniczonych wcale nie jest łatwe ale możemy skorzystać z wyników, które już znamy dla całej przestrzeni. Ponieważ znaleźliśmy funkcję, która ma osobliwość odpowiedniego typu w  $x_0$ , to znaczy  $\Delta G(x, x_0) = \delta(x - x_0)$ , możemy ją lekko zmodyfikować aby zapewnić jej znikanie na brzegu obszaru. To znaczy położymy

$$G(x, x_0) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - x_0|} + v(x, x_0), \quad (8.77)$$

gdzie  $v$  jest odpowiednią poprawką pochodzącą od brzegu. Mamy oczywiście

$$\Delta v = 0, \quad v|_{\partial D} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - x_0|}, \quad (8.78)$$

zatem  $v$  jest rozwiązaniem równania Laplace'a z niejednorodnym warunkiem Dirichleta. Znalezienie  $v$  jest dużo prostsze od szukania od nowa funkcji, której Laplasjan daje Deltę Diraca. Dla prostych obszarów można to zrobić na przykład za pomocą rozdzielania zmiennych. My zademonstrujemy inną technikę, zwaną *metodą odbić* (podobnie jak w przypadku równania ciepła) zastosowaną do sfery. Zauważmy, że równanie Laplace'a zostało już rozwiązane dla dwuwymiarowego koła.

Niech dana będzie sfera o promieniu 1. Chcemy znaleźć taką funkcję Greena  $G$ , żeby  $\Delta G(x, x_0) = \delta(x - x_0)$  oraz  $G(x, x_0) = 0$  dla  $|x| = 1$  oraz dowolnego  $x_0$ . Z tego, co powiedzieliśmy wcześniej musimy mieć

$$G(x, x_0) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - x_0|} + v(x, x_0), \quad (8.79)$$

gdzie  $v$  spełnia równanie Laplace'a. Przypomnijmy sobie, że funkcja Greena jest potencjałem w punkcie  $x$  wywołanym jednostkowym ładunkiem umieszczonym w  $x_0$ . Spróbujmy tak dobrać  $v$ , żeby potencjał na sferze był równy zero. Umieśćmy zatem inny jednostkowy (ujemny) ładunek w punkcie  $y_0$  tak, aby dla  $|x| = 1$  funkcja Greena  $G(x, x_0) = 0$ . Oczywiście  $y_0$  powinien być odpowiednio dobrany do  $x_0$ , co właśnie uczynimy. Skoro umieściliśmy ujemny ładunek to

$$G(x, x_0) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - x_0|} + \frac{1}{4\pi} \frac{C}{|x - y_0|}, \quad (8.80)$$

gdzie  $C$  jest stałą oznaczającą wielkość ładunku. Zostanie ona znaleziona później. Musimy zatem tak dobrać  $y_0$  aby

$$|x - x_0| = \frac{1}{C} |x - y_0|, \quad (8.81)$$

dla  $|x| = 1$ . Niech  $\phi$  będzie kątem między  $x$  a  $x_0$ . Jest to ten sam kąt, co pomiędzy  $x$  a  $y_0$  (Rys.). Mamy

$$|x - x_0|^2 = |x|^2 + |x_0|^2 - 2|x||x_0| \cos \phi, \quad (8.82)$$

oraz podobnie

$$|x - y_0|^2 = |x|^2 + |y_0|^2 - 2|x||y_0| \cos \phi. \quad (8.83)$$

Aby (8.81) był prawdziwy na sferze musimy mieć

$$1 + |x_0|^2 - 2|x_0| \cos \phi = \frac{1}{C^2} (1 + |y_0|^2 - 2|y_0| \cos \phi). \quad (8.84)$$

Zobaczmy, czy istnieje taki punkt  $y_0$ , który leży na prostej przechodzącej przez  $x_0$  oraz 0, to jest  $y_0 = \alpha x_0$

$$1 + |x_0|^2 - 2|x_0| \cos \phi = \frac{1}{C^2} (1 + \alpha^2 |x_0|^2 - 2\alpha |x_0| \cos \phi). \quad (8.85)$$

Aby powyższe równanie było spełnione dla każdego kąta musimy mieć

$$1 + |\mathbf{x}_0|^2 = \frac{1}{C^2} (1 + \alpha^2 |\mathbf{x}_0|^2), \quad 1 = \frac{\alpha}{C^2}, \quad (8.86)$$

co daje nam  $\alpha = C^2$  skąd  $C = \frac{1}{|\mathbf{x}_0|}$  a zatem

$$\mathbf{y}_0 = \frac{\mathbf{x}_0}{|\mathbf{x}_0|^2}, \quad (8.87)$$

czyli  $|\mathbf{x}_0||\mathbf{y}_0| = 1$  to znaczy,  $\mathbf{x}_0$  oraz  $\mathbf{y}_0$  są sprzężonymi do siebie punktami w *inwersji względem sfery*. Stąd otrzymujemy

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} + \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x}_0|} \frac{1}{|\mathbf{x} - \frac{\mathbf{x}_0}{|\mathbf{x}_0|^2}|}. \quad (8.88)$$

Jest to funkcja Greena dla sfery. Zauważmy od razu, że tutaj podobnie jak wcześniej  $G$  jest symetryczna ze względu na zamianę  $\mathbf{x}$  oraz  $\mathbf{x}_0$ . Dzięki niej możemy napisać rozwiązanie równania Poissona z warunkiem na tym obszarze

$$\Delta u = f, \quad u|_{\partial D} = g. \quad (8.89)$$

Zgodnie ze wzorem (8.67) rozwiązanie dane jest całką z funkcji Greena. W szczególności, dla równania Laplace'a ( $f \equiv 0$ ) mamy

$$u(\mathbf{x}) = \iint_{\partial D} g \nabla_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{n} \, dS, \quad (8.90)$$

gdzie skorzystaliśmy z symetrii funkcji Greena. Obliczmy pochodną w kierunku wektora normalnego do sfery czyli kierunku prostej łączącej  $0$  z punktem na sferze. Mamy

$$\nabla_{\mathbf{x}} \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \right) = -\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^{\frac{5}{2}}}, \quad (8.91)$$

oraz podobnie

$$\nabla_{\mathbf{x}} \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0/|\mathbf{x}_0|^2|} \right) = -\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0/|\mathbf{x}_0|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0/|\mathbf{x}_0|^2|^{\frac{5}{2}}}. \quad (8.92)$$

Wektor normalny do sfery  $|\mathbf{x}| = 1$  to oczywiście

$$\mathbf{n} = \mathbf{x}, \quad (8.93)$$

czyli

$$\nabla_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{4\pi} \left[ -\frac{1 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{|\mathbf{x}_0|} \frac{1 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_0/|\mathbf{x}_0|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0/|\mathbf{x}_0|^2|^{\frac{5}{2}}} \right], \quad (8.94)$$

na sferze. Zgodnie z konstrukcją funkcji Greena na sferze mamy

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = \frac{1}{|\mathbf{x}_0|} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0/|\mathbf{x}_0|^2|, \quad (8.95)$$

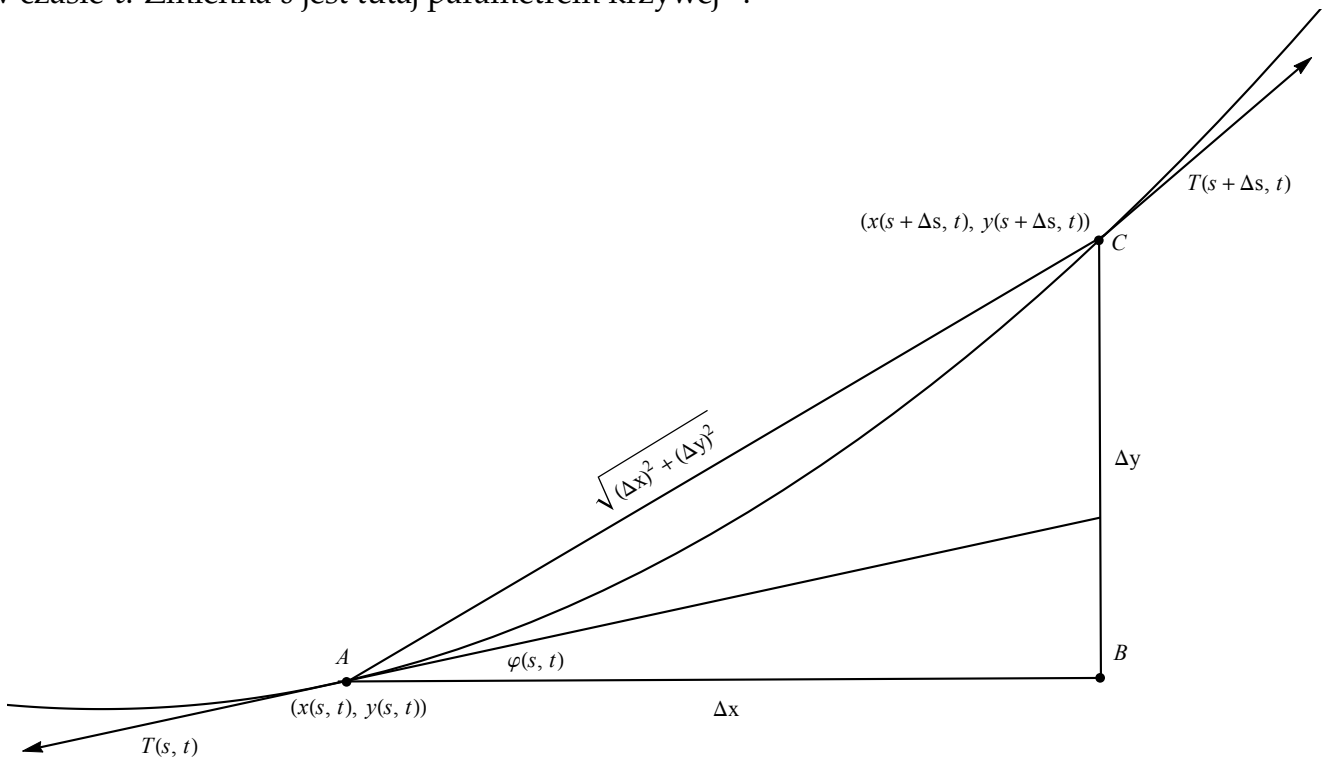
co implikuje

$$\nabla_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^{\frac{5}{2}}} \left[ -\frac{1 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_0}{1} + \frac{|\mathbf{x}_0|^{\frac{3}{2}}}{1} \frac{1 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_0/|\mathbf{x}_0|^2}{1} \right], \quad (8.96)$$

## 9 Równanie fali

Przechodzimy do badania równań hiperbolicznych drugiego rzędu, które opisują niektóre zjawiska falowe. Zaczniemy najpierw od przykładów, w których pojawiają się te równania.

**Przykład.** (*Drgania struny*) Rozważmy jednowymiarową strunę<sup>15</sup> o gęstości liniowej  $\rho$ <sup>16</sup>, która w pozycji równowagi jest naprężona siłą  $T_0$  (naciąg) oraz działa na nią siła na jednostkę długości  $F$  (np. grawitacja, obciążenie)<sup>17</sup>. Bez straty ogólności dla naszych przyszłych rozważań możemy założyć, że siła  $F$  działa w kierunku pionowym, czyli  $F = (0, F)$ . Zakładamy tutaj, że struna jest bardzo cienka, czyli jej wymiar długości jest dużo większy niż jej grubość<sup>18</sup>. Dla uproszczenia wyobraźmy sobie, że nasza struna zaczepiona jest do gitary w punktach  $x = 0$  oraz  $x = L$ . Będziemy interesować się jedynie drganiami struny w kierunku prostopadłym do osi  $Ox$  (poprzecznymi), jednak bardzo pouczające jest wyprowadzenie równań, w których dopuszczamy drgania wzdłuż osi  $Ox$  (podłużne). Niech zatem  $(x(s, t), y(s, t))$  oznacza równanie parametryczne kształtu struny w czasie  $t$ . Zmienna  $s$  jest tutaj parametrem krzywej<sup>19</sup>.



Rysunek 16: Schematyczny rysunek fragmentu struny.

Ustalmy dowolną chwilę czasową  $t$ . Rozważmy mały kawałek struny, w którym punkty zmieniają się podczas przyrostu parametru  $s$  o  $\Delta s$  (Rys. 16). Oczywiście jest, że przyrost  $\Delta s$  powoduje również przyrosty  $\Delta x$  oraz  $\Delta y$ . Rozważmy jakie siły działają na ten mały odcinek struny. Są to: siła naciągu  $\mathbf{T} = \mathbf{T}(s, t)$  oraz z góry zadana siła na jednostkę długości  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(s, t)$ .

<sup>15</sup>Może to być też kabel, łańcuch czy cokolwiek o czym dla uproszczenia możemy założyć, że jest niemal jednowymiarowe.

<sup>16</sup>Czyli masa na jednostkę długości.

<sup>17</sup>Czcionką pogrubioną będziemy oznaczać wektory.

<sup>18</sup>Średnica standardowej struny E6 (czyli tej najgrubszej) to około 0.1cm a jej czynna długość wynosi 65cm (dla menzury 4/4). Widzimy zatem, że struna jest około 650 razy dłuższa niż grubsza. Możemy zdefiniować bezwymiarowy parametr grubości jako  $\epsilon = \text{grubość}/\text{długość}$ . Założenie o jednowymiarowości struny jest sensowne jeśli  $\epsilon \ll 1$ . W naszym przypadku  $\epsilon = 0.1/65 \approx 0.0015 \ll 1$  dla struny E6 oraz  $\epsilon = 0.025/65 \approx 0.0004 \ll 1$  dla najcieńszej struny E1.

<sup>19</sup>Na przykład dla struny, która ma ciągle kształt półokręgu mamy  $(x(s, t), y(s, t)) = L(\cos s, \sin s)$ .

Wypadkowa tych dwóch sił musi być równa masie odcinka pomnożonej przez przyspieszenie jakie on doznaje. Poniżej zapiszemy ten bilans sił.

Zauważmy, że dzięki założeniu o jednowymiarowości, siła naprężenia musi być skierowana w kierunku do niej stycznym. Możemy zatem zapisać

$$\mathbf{T}(s, t) = T(s, t)(\cos \varphi(s, t), \sin \varphi(s, t)), \quad (9.1)$$

gdzie  $\varphi = \varphi(s, t)$  jest kątem między struną a osią  $Ox$  (patrz Rys. 16) a  $T(s, t)$  długością wektora  $\mathbf{T}$ . Przypomnijmy sobie z analizy, że masa łuku krzywej parametrycznej o gęstości  $\rho(s)$  może być obliczona ze wzoru<sup>20</sup>

$$M(s) = \int_{s_0}^s \rho(v) \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}(v, t)\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}(v, t)\right)^2} dv. \quad (9.2)$$

W naszym przypadku, masa rozważanego odcinka wynosi

$$\begin{aligned} M(s + \Delta s) - M(s) &= \int_s^{s+\Delta s} \rho(v) \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}(v, t)\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}(v, t)\right)^2} dv = \\ &= \Delta s \rho(\sigma) \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}(\sigma, t)\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}(\sigma, t)\right)^2}, \end{aligned} \quad (9.3)$$

dla pewnego  $\sigma \in (s, s + \Delta s)$ . Skorzystaliśmy tutaj z twierdzenia o wartości średniej dla całek. Zauważmy, że  $\sigma \rightarrow s$  jeśli  $\Delta s \rightarrow 0$ . W podobny sposób możemy wyliczyć całkowitą siłę  $F$  działającą na odcinek  $\Delta s$ . Z założenia jej składowa  $x$ -owa jest równa 0, natomiast druga składowa wynosi

$$\int_s^{s+\Delta s} F(v, t) \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}(v, t)\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}(v, t)\right)^2} dv = \Delta s F(\omega, t) \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}(\omega, t)\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}(\omega, t)\right)^2}, \quad (9.4)$$

dla pewnego  $\omega \in (s, s + \Delta s)$ .

Wypadkowa siła naciągu działająca na odcinek  $\Delta s$  jest równa  $\mathbf{T}(s + \Delta s, t) - \mathbf{T}(s, t)$ . Możemy zatem zapisać składową  $x$ -ową bilansu sił

$$T(s + \Delta s, t) \cos \varphi(s + \Delta s, t) - T(s, t) \cos \varphi(s, t) = \rho(\sigma) \Delta s \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}(\sigma, t)\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}(\sigma, t)\right)^2} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}. \quad (9.5)$$

Podobnie, składowa  $y$ -owa ma postać

$$\begin{aligned} T(s + \Delta s, t) \sin \varphi(s + \Delta s, t) - T(s, t) \sin \varphi(s, t) &= \\ &= \rho(\sigma) \Delta s \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial s}(\sigma, t)\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial s}(\sigma, t)\right)^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \Delta s F(\omega, t) \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial s}(\omega, t)\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial s}(\omega, t)\right)^2}. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Możemy teraz podzielić oba powyższe równania przez  $\Delta s$  i przejść do granicy  $\Delta s \rightarrow 0$ . Otrzymujemy wtedy

$$\frac{\partial}{\partial s} (T(s, t) \cos \varphi(s, t)) = \rho(s) \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}(s, t)\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}(s, t)\right)^2} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \quad (9.7)$$

<sup>20</sup>Dla krzywej jednorodnej, masa jest równa gęstości pomnożonej przez jej długość. W przypadku dowolnego rozkładu masy, funkcja  $\rho$  musi znajdować się pod całką. Żeby lepiej zrozumieć ten wzór oblicz masę linii prostej. Następnie weź dowolną krzywą i przybliż ją łamaną.

oraz

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} (T(s, t) \sin \varphi(s, t)) &= \\ &= \rho(s) \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}(s, t)\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}(s, t)\right)^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}(s, t)\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}(s, t)\right)^2} F(s, t). \end{aligned} \quad (9.8)$$

Powyższe równania możemy nieznacznie uprościć i uwydatnić zależność między kątem  $\varphi$  a pochodnymi  $\partial x/\partial s$  oraz  $\partial y/\partial s$ . Zauważmy najpierw, że kąt  $\varphi_{\Delta s}(s, t) := \angle CAB$  dąży do kąta  $\varphi(s, t)$  gdy  $\Delta s \rightarrow 0$ . Z rysunku widać od razu, że mamy

$$\cos \varphi_{\Delta s}(s, t) = \frac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}, \quad \sin \varphi_{\Delta s}(s, t) = \frac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}. \quad (9.9)$$

Ułamki występujące w powyższych wzorach można rozszerzyć o  $1/\Delta s$ , co daje nam

$$\cos \varphi_{\Delta s}(s, t) = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta s}}{\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta s}\right)^2}}, \quad \sin \varphi_{\Delta s}(s, t) = \frac{\frac{\Delta y}{\Delta s}}{\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta s}\right)^2}}. \quad (9.10)$$

Przejście do granicy  $\Delta s \rightarrow 0$  pozwala nam ostatecznie otrzymać

$$\cos \varphi(s, t) = \frac{\frac{\partial x}{\partial s}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2}}, \quad \sin \varphi(s, t) = \frac{\frac{\partial y}{\partial s}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2}}, \quad (9.11)$$

gdzie pochodne cząstkowe wyliczone są w punkcie  $(s, t)$ . Ostatecznie, równania opisujące ruch punktu  $(x(s, t), y(s, t))$  struny mają postać

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( T(s, t) \frac{\frac{\partial x}{\partial s}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2}} \right) = \rho(s) \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \quad (9.12)$$

oraz

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( T(s, t) \frac{\frac{\partial y}{\partial s}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2}} \right) = \rho(s) \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2} F(s, t), \quad (9.13)$$

gdzie dla przejrzystości zapisu zaniechaliśmy pisania argumentów pochodnych. Nie spowoduje to już teraz żadnego nieporozumienia. Na pierwszy rzut oka równania (9.12) oraz (9.13) wyglądają *przerazająco!* Stanowią one układ dwóch nieliniowych równań cząstkowych drugiego rzędu. Na szczęście w niemal wszystkich zastosowaniach możemy poczynić pewne założenie, które upraszcza (9.12) oraz (9.13) w znaczący sposób. Wynik, który wtedy dostaniemy będzie jedynie przybliżeniem rzeczywistego zjawiska<sup>21</sup>. To przybliżenie, jednak, bardzo często jest rzędu wyższego niż błąd eksperymentu, który pozwala nam na zbadanie zjawiska. Nawet gdyby tak nie było, to uproszczone równanie jest zawsze pierwszym krokiem do zrozumienia rozwiązania pełnego równania.

Zanim przystąpimy do przybliżeń zauważmy, że mamy dwa równania: (9.12) oraz (9.13) a *trzy* niewiadome:  $x$ ,  $y$  oraz  $T$ . Czy w takim wypadku nasze zagadnienie jest dobrze postawione? Jak już zwróciliśmy uwagę, równania, które wyprowadziliśmy mogą opisywać drgania nie tylko strun

<sup>21</sup>Można się też spierać, że *każdy* model matematyczny jest pewną idealizacją, czyli przybliżeniem tego, co dzieje się wokół nas.



ale także wszelkich innych obiektów, które można uważać za istotnie jednowymiarowe. To, co odróżnia je od siebie to, oprócz gęstości  $\rho$ , rozkład siły naciągu  $\mathbf{T}$ . Aby dopełnić matematycznego opisu naszego zagadnienia musimy podać  $\mathbf{T}$ . Łatwo możemy sobie wyobrazić, że im większa siła naciągu tym większe odkształcenie struny. Tak też jest w rzeczywistości dla bardzo wielu materiałów<sup>22</sup>. Eksperyment pokazuje, że siła naprężenia jest funkcją *względnej* odkształcenia materiału. Jest to ogromnie ważna zależność w fizyce, mechanice oraz budownictwie. Względne odkształcenie (infinitesimalnie małego) kawałka struny wynosi  $((\partial x/\partial s)^2 + (\partial y/\partial s)^2)^{1/2} - 1$ , co można otrzymać rozważając geometrię zagadnienia<sup>23</sup>. Możemy zatem napisać, że długość wektora naprężenia wynosi

$$T(s, t) = \mathcal{T} \left( \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2} - 1, t \right), \quad (9.14)$$

dla pewnej funkcji  $\mathcal{T}$ . Powyższe równanie nazywane jest *równaniem konstytutywnym*. Opisuje ono własności materiałowe badanego zjawiska. Równania konstytutywne bardzo często są determinowane empirycznie. Praktycznie zawsze funkcja  $\mathcal{T}$  daje się rozwinąć w szereg Taylora względem odkształcenia

$$\mathcal{T} \left( \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2} - 1, t \right) = T_0 + E \left( \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2} - 1 \right) + \dots, \quad (9.15)$$

gdzie  $T_0$  jest naciągiem w pozycji równowagi (dlatego nie zależy od czasu),  $E$  jest tzw. *modułem Younga* a wielokropek zastępuje wyrazy wyższych rzędów. Widzimy, że dla małych odkształceń dobrym przybliżeniem dla relacji naprężenie-odkształcenie jest zależność liniowa. Jest to tak zwane *Prawo Hooke'a*.

Widzimy zatem, że do rozwiązania zagadnienia drgań struny potrzebne są trzy równania (9.12), (9.13) oraz (9.14). Pozwoli to na znalezienie wszystkich niewiadomych występujących w badanych równaniach. Zajmijmy się teraz szczególnym przypadkiem, który jest ogromnie ważny w zastosowaniach.

Założmy, że interesują nas jedynie drgania struny w pionie, to jest w kierunku poprzecznym do struny. Dla ustalenia uwagi możemy myśleć o szarpnięciu zamocowanej struny. Kiedy struna drga tylko w pionie, współrzędna  $x$ -owo dowolnego jej punktu pozostaje stała przez wszystkie chwile. Oznacza to, że

$$\frac{\partial x}{\partial t}(s, t) = 0, \quad \text{czyli } x = x(s), \quad (9.16)$$

dla wszystkich  $t$  i ustalonego  $s$ . Dzięki temu równania (9.12) oraz (9.13) przyjmują postać

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( T(s, t) \frac{\frac{\partial x}{\partial s}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2}} \right) = 0, \quad (9.17)$$

oraz

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( T(s, t) \frac{\frac{\partial y}{\partial s}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2}} \right) = \rho(s) \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2} F(s, t). \quad (9.18)$$

<sup>22</sup>Podobnie sprawa się ma z książkowym przykładem sprężyny: siła naciągu jest proporcjonalna do wychylenia.

<sup>23</sup>Odcinek struny w położeniu równowagi ma długość  $\Delta x = \Delta s$ . Kiedy struna doznaje wychylenia, ten mały segment odkształca się i uzyskuje długość  $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ . Przechodząc do granicy  $\Delta s \rightarrow 0$  pokaż, że *względne* odchylenie wynosi rzeczywiście tyle, ile podaliśmy wyżej.

Z (9.18) od razu możemy wywnioskować, że

$$T(s, t) \frac{\frac{dx}{ds}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2}} = T_0(t), \quad (9.19)$$

gdzie  $T_0(t)$  jest naciągami struny w punkcie  $(x(s, t), y(s, t))$  o własności  $dx/ds = 1$  oraz  $\partial y/\partial s = 0$  (ma on taką własność, że w tym punkcie styczna do krzywej jest równoległa do osi  $Ox$ ). Możemy teraz skorzystać z naszego równania konstytutywnego (9.15) i podstawić w nim  $dx/ds = 1$  oraz  $\partial y/\partial s = 0$ . Otrzymujemy wtedy  $T_0(t) = T_0$  dla wszystkich czasów  $t$ , czyli prawa strona równania (9.19) jest stałą równą naciągowi struny w pozycji równowagi<sup>24</sup>. Korzystając z tego wyniku jesteśmy w stanie uprościć równanie (9.18)

$$T_0 \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\frac{\partial y}{\partial s}}{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2} \right) = \rho(s) \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2} F(s, t). \quad (9.20)$$

Używanie krzywych określonych parametrycznie jest często użyteczne w rozważaniach teoretycznych, jednak w praktyce dużo lepiej jako parametr jest wybrać  $x$  jako zmienną niezależną<sup>25</sup>. Załóżmy, że struna w żadnej chwili nie jest pionowa, to znaczy

$$\frac{dx}{ds} \neq 0. \quad (9.21)$$

Dzięki temu istnieje jednoznacznie określona funkcja odwrotna  $s = s(x)$  i możemy zdefiniować

$$u(x, t) := y(s(x), t). \quad (9.22)$$

Wtedy z reguły łańcucha otrzymujemy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial s} \frac{ds}{dx} = \frac{\partial y}{\partial s} \left( \frac{dx}{ds} \right)^{-1} \quad \text{czyli} \quad \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{dx}{ds} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (9.23)$$

gdzie skorzystaliśmy z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej. Ponadto, również z reguły łańcucha możemy wyliczyć, że

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{dx}{ds} \frac{\partial}{\partial x}. \quad (9.24)$$

Dzięki dwóm powyższym równaniom jesteśmy w stanie zapisać (9.18) jako jednowymiarowe niejednorodne *nieliniowe równanie fali*

$$T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \rho(x) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} F(x, t), \quad (9.25)$$

gdzie dla przejrzystości zapisu wyraziliśmy funkcje  $\rho$  oraz  $F$  od razu w zmiennej  $x$ .

Równanie (9.29) ma bardzo ciekawe rozwiązanie stacjonarne. Załóżmy, że na strunę (choć teraz lepiej myśleć o kablu czy wiszącym łańcuchu<sup>26</sup>) działa siła grawitacji. Daje to nam  $F(x, t) = \rho(x)g$ . Dodatkowo załóżmy, że kabel osiągnął już swój stan ustalony, czyli  $\partial y/\partial t = 0$ . Otrzymujemy wtedy *równanie wiszącego kabla*

$$T_0 \frac{d^2 y}{dx^2} = \rho g \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \quad (9.26)$$

<sup>24</sup>Jest to ważne odkrycie ponieważ tę siłę naprężenia jesteśmy w stanie bardzo łatwo zmierzyć. Jeśli zmieniałyby się ona w czasie, to wykonanie odpowiedniego eksperymentu byłoby dużo trudniejsze.

<sup>25</sup>Spróbuj zobaczyć jak wyglądałyby równania (9.12) oraz (9.13), kiedy  $x$  byłoby parametrem.

<sup>26</sup>A także o łukach wspierających strop w katedrach.

które już dobrze znamy z wykładu o zagadnieniach brzegowych. Rozwiązaniem (9.26) jest cosinus hiperboliczny.

Zauważmy, że nigdzie do tej pory nie czyniliśmy żadnych upraszczających założeń a jedynie rozpatrywaliśmy szczególne przypadki. Powróćmy do równania (9.29) i poczyńmy teraz bardzo ważne założenie: zakładamy, że wychylenia naszej struny są *małe*<sup>27</sup>. Oznacza to, że

$$\left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| \ll 1. \quad (9.27)$$

Dzięki temu założeniu, wszystkie (większe od pierwszej) potęgi pochodnej  $\partial y/\partial x$  są co najmniej o rząd mniejsze niż ona sama. Dlatego jesteśmy usprawiedliwieni i bez straty większej dokładności możemy usunąć je wszystkie z naszego równania (9.29). Otrzymujemy wtedy jednowymiarowe niejednorodne *równanie falowe*

$$T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \rho(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + F(x, t). \quad (9.28)$$

Zauważmy też, że zgodnie z założeniem o małych wychyleniach, równanie konstytutywne (9.15) mówi nam, że siła naprężenia jest stała w każdym punkcie struny oraz każdym czasie. W bardzo wielu sytuacjach interesuje nas sytuacja, w której struna jest jednorodna (czyli  $\rho(x) = \rho = \text{const.}$ ) oraz nie działają na nią żadne siły zewnętrzne (czyli  $F \equiv 0$ ). Otrzymujemy wtedy *równanie falowe*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad (9.29)$$

gdzie  $c = \sqrt{T_0/\rho}$  okazuje się być prędkością fali biegnącej po strunie.

**Przykład.** (*Membrana i akustyka*) Okazuje się, że równanie falowe pojawia się ten przy opisie drgań membrany (2D) oraz powietrza przy przejściu fali akustycznej (3D). Nie jest ono jednak już tylko jednowymiarowe i ma postać

$$u_{tt} = c^2 \Delta u, \quad (9.30)$$

gdzie  $\Delta$  jest Laplasjanem w odpowiednim wymiarze. Równanie akustyki było wyprowadzone powyżej w części 4 na stronie 40. Równanie membrany wyprowadza się niemal identycznie do równania struny.

**Przykład.** (*Równania Maxwella*) Jednym z najbardziej fundamentalnych odkryć fizyki było ujednoczenie pól elektrycznego  $\mathbf{E}$  oraz magnetycznego  $\mathbf{B}$  przeprowadzone przez Maxwella. Podał on, że spełniają one równania

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c\nabla \times \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{J}, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c\nabla \times \mathbf{E}, \quad (9.31)$$

gdzie  $c$  jest prędkością światła w próżni,  $\rho$  gęstością ładunku, a  $\mathbf{J}$  gęstością prądu. Interpretacja równań jest następująca: prawo Coulomba, bezźródłowość pola magnetycznego, prawo Ampere'a (dla  $\mathbf{E}$  niezależnego od czasu) oraz prawo Faradaya. Aby spełnione było prawo Ampere'a musimy mieć  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ . W przypadku gdy nie jest to spełnione dla matematycznej zamkniętości równań potrzebny jest człon z pochodną czasową z  $\mathbf{E}$ . Dodanie jego pozwoliło Maxwellowi otrzymać jednolitą teorię pól elektrycznego oraz magnetycznego.

Zobaczmy, że pola  $\mathbf{E}$  oraz  $\mathbf{B}$  spełniają równanie fali (elektromagnetycznej). Policzmy drugą pochodną po czasie

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = c\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}). \quad (9.32)$$

<sup>27</sup>Dla struny gitarowej jest to bardzo odpowiednie założenie. Możemy się o tym przekonać czyniąc bardzo proste oszacowanie (*back-of-the-envelope*). Jak wspomnieliśmy powyżej, długość typowej struny gitarowej to 65cm. Wydaje się sensowne przyjąć, że jej typowe wychylenie podczas grania to 1 – 2mm. Wtedy  $|\partial y/\partial x| \approx 2/650 \approx 0.003 \ll 1$ .

Standardowa tożsamość analizy wektorowej (ćwiczenie) mówi, że  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E}$ . Z kolejnego równania Maxwella wynika

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \mathbf{E} - 4\pi c^2 \nabla \rho. \quad (9.33)$$

Przy zadanym ładunku jest to niejednorodne równanie fali. Podobnie można pokazać, że pole magnetyczne również spełnia równanie falowe

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \mathbf{B} + 4\pi c \nabla \times \mathbf{J}. \quad (9.34)$$

W bardzo wielu przypadkach powyższe równania można rozwiązać. Zauważmy, że matematyczna postać tych równań jest identyczna. Jest to właśnie unifikacja dwóch, z pozoru odmiennych, pól wektorowych. Widać również, że każda fala porusza się z prędkością światła.

**Przykład.** (*Fale na płytce wody*) Przypomnijmy, że równania płytkiej wody mają postać (4.3)-(4.9)

$$\begin{cases} h_t + (uh)_x = 0, \\ u_t + uu_x = -gh_x, \end{cases} \quad (9.35)$$

gdzie  $u = u(x, t)$  jest prędkością wody, a  $h = h(x, t)$  głębokością. Załóżmy, że fala ma małą amplitudę, to jest

$$h = H + \zeta, \quad u = U, \quad (9.36)$$

gdzie  $|\frac{\zeta}{H}| \ll 1$ ,  $|\frac{U}{u}| \ll 1$  oraz  $H$  jest średnią głębokością. Wtedy zostawiając składniki jedynie liniowego rzędu mamy

$$\zeta_t + HU_x = 0, \quad U_t + g\zeta_x = 0. \quad (9.37)$$

Kiedy zróżniczkujemy jedno równanie i wstawimy do drugiego otrzymamy

$$0 = \zeta_{tt} + HU_{xt} = \zeta_{tt} - gh\zeta_{xx}, \quad (9.38)$$

czyli liniowe równanie fali  $\zeta_{tt} = c^2 \zeta_{xx}$ , gdzie  $c$  jest prędkością fali. Podobnie pokazujemy, że prędkość spełnia dokładnie takie samo równanie.

## 9.1 Warunki brzegowe

Rozpocznijmy od jednowymiarowego równania falowego, czyli równania opisującego drgającą strunę

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f, \quad 0 < x < L. \quad (9.39)$$

Ponieważ to równanie zawiera drugą pochodną ze względu na czas to konieczne jest nałożenie zarówno warunku początkowego na wychylenie  $u$  jak i na prędkość  $u_t$ , zatem

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x). \quad (9.40)$$

Tak jak w poprzednich zagadnieniach, istnieje kilka różnych możliwości zadania warunków brzegowych.

1. (*Warunek Dirichleta*) Końce struny poruszają się zgodnie z góry zadaną funkcją

$$u(0, t) = \mu(t), \quad u(L, t) = \nu(t). \quad (9.41)$$

Jeśli  $\mu = \nu = 0$  to końce są nieruchome, czyli struna jest zaczepiona z obu stron.

2. (*Warunek von Neumanna*) Załóżmy, że na jeden koniec struny działa siła  $F$ , to jest zadana jest wartość naprężenia struny w jednym z jej końców. Ponieważ dla małych wychyleń siła naprężenia jest równa  $T_0 u_x$  to warunek brzegowy ma postać

$$u_x(0, t) = \mu(t) \quad \text{lub} \quad u_x(L, t) = \nu(t). \quad (9.42)$$

Przypadek, w którym  $\mu$  lub  $\nu$  wynosi 0 oznacza, że na odpowiedni koniec nie działają żadne siły - swobodnie poruszający się koniec.

3. (*Warunek Robina*) Jeśli jeden z końców zaczepiony jest do sprężystości do podłoża to działa na niego siła proporcjonalna do wychylenia, to jest  $T_0 u_x = -ku$  na tym końcu. Jeśli dodatkowo punkt równowagi sprężyny porusza się to mamy

$$u_x(0, t) = -\lambda_1(u(0, t) - \theta_1), \quad \text{lub} \quad u_x(L, t) = -\lambda_2(u(L, t) - \theta_2). \quad (9.43)$$

4. (*Obciążenie*) Ciekawy warunek brzegowy powstaje jeśli założymy, że jeden z końców obciążony jest masą  $m$ , która zaczepiona jest na sprężynie. Wtedy zgodnie z Prawem Newtona mamy

$$m u_{tt} = -k u_x + m g \quad \text{na jednym z końców}. \quad (9.44)$$

5. (*Warunek periodyczny*) Jeśli końce struny są ze sobą związane, to jest rozpatrujemy drgania pierścienia to z ciągłości funkcji i jej pochodnej musimy mieć

$$u(0, t) = u(L, t), \quad u_x(0, t) = u_x(L, t). \quad (9.45)$$

My zajmiemy się jedynie warunkiem Dirichleta, ponieważ jest on wystarczający aby zilustrować wiele zagadnień związanych z równaniem fali. Z liniowości możemy oczywiście rozbić zagadnienie z niejednorodnym obciążeniem  $f$ , warunkami początkowymi oraz brzegowymi na cztery osobne zagadnienia, w których występuje tylko jedna niejednorodność.

Na odcinku a także na prostych obszarach wielowymiarowych metoda rozdzielania zmiennych działa w podobny sposób jak w przypadku równania ciepła oraz Laplace'a. Nie będziemy się zatem zatrzymywać nad tą techniką.

## 9.2 Rozwiązanie d'Alemberta

Historycznie jednym z pierwszych rozwiązań analitycznych równań cząstkowych było rozwiązanie równania fali wyprowadzone przez d'Alemberta. Prześledzimy jego tok rozumowania dla równania określonego na całej prostej  $\mathbb{R}$ . Możemy tu myśleć o nieskończonej strunie. Rozwiążmy zatem

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & x \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \phi(x), \\ u_t(x, 0) = \psi(x). \end{cases} \quad (9.46)$$

Jest to zagadnienie początkowe dla równania fali zwane *zagadnieniem Cauchy'ego*. d'Alembert rozumował w sposób podobny do nas, kiedy mówiliśmy o klasyfikacji równań cząstkowych. Wprowadził on odpowiednią transformację zmiennych aby sprowadzić równanie falowe do postaci kanonicznej. Oczywiście, w tamtych czasach ogólna teoria równań różniczkowych nie była znana, dlatego jego rozumowanie jest bardzo nowatorskie oraz genialne. Aby prześledzić intuicję d'Alemberta zapiszmy równanie fali używając standardowej notacji dla pochodnych

$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u =: \square u, \quad (9.47)$$

gdzie operator  $\square$  zwany jest Dalembercjaniem. Postać prawej strony powyższego równania zachęca nas do faktoryzacji zupełnie jak we wzorach skróconego mnożenia. Należy jednak pamiętać, że do czynienia mamy tutaj z operatorami a nie liczbami. Mamy

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c\frac{\partial^2}{\partial x\partial t} + c\frac{\partial^2}{\partial t\partial x} - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad (9.48)$$

ponieważ pochodne mieszane komutują. Podobnie, mamy drugą faktoryzację

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad (9.49)$$

Równanie falowe ma zatem postać

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0 \quad \text{lub} \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0. \quad (9.50)$$

Zatem jeśli  $u$  jest funkcją spełniającą jedno z dwóch równań

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)u \quad \text{lub} \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)u, \quad (9.51)$$

to jest też rozwiązaniem równania falowego. My już dobrze wiemy, że odpowiednimi rozwiązaniami będą jakiegokolwiek funkcje  $F(x - ct)$  oraz  $G(x + ct)$ , dlatego z liniowości

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct). \quad (9.52)$$

Czyli rozwiązanie równania falowego składa się z dwóch fal biegnących w lewo i w prawo. Przez to, że zadaliśmy warunki początkowe możemy w sposób jednoznaczny wyznaczyć  $F$  i  $G$ . Przede wszystkim

$$\phi(x) = u(x, 0) = F(x) + G(x), \quad (9.53)$$

oraz

$$\psi(x) = u_t(x, 0) = -cF'(x) + cG'(x). \quad (9.54)$$

Czyli

$$-F(x) + G(x) = \frac{1}{c} \int_0^x \psi(s) ds + C, \quad (9.55)$$

gdzie  $C$  jest stałą całkowania. Od razu też pokazujemy

$$F(x) = \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x \psi(s) ds - \frac{C}{2}, \quad G(x) = \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x \psi(s) ds - \frac{C}{2}. \quad (9.56)$$

Zatem

$$u(x, t) = \frac{\phi(x - ct) + \phi(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds. \quad (9.57)$$

Powyższe wynik to właśnie *rozwiązanie d'Alemberta* równania falowego na  $\mathbb{R}$ . Widzimy, że składa się ono z dwóch części. Pierwsza i druga są wartościami średnimi warunku początkowego fal biegnących w prawo i w lewo. Widzimy, że początkowe wychylenie brane jest jedynie na czołach fali to prędkość jest całkowana po całym trójkącie wpływu.

Powróćmy na chwilę do wzoru (9.52) na rozwiązanie ogólne równania fali. Tak jak już wspomnieliśmy, jest ono superpozycją dwóch fal biegnących w przeciwne strony. Mówiąc dokładniej, na diagramie  $x - t$  możemy narysować dwie proste  $x \pm ct$ , na których jedna część rozwiązania jest stała. Są to nasze znajome charakterystyki. Ponieważ równanie jest drugiego rzędu to jest

ono równoważne dwóm równaniom pierwszego rzędu<sup>28</sup> dlatego występuje tutaj dwie rodziny charakterystyk (Rys.). Informacja o warunkach początkowych jest zatem niesiona włąb czasoprzestrzeni poruszając z prędkością  $c$  po prostych. Zauważmy również, że dla ustalonej chwili  $t > 0$  i punktu  $x_0$  charakterystyki ograniczają trójkątny obszar o bokach  $t = 0$ ,  $x = \pm ct$ . Jest to *obszar wpływu* to jest zbiór, do którego doszła informacja o warunkach początkowych. Na wartość funkcji  $u$  w  $(x, t)$  ma wpływ jedynie wartość warunków początkowych w  $|x - x_0| \leq ct$ .

Rozważmy teraz kilka przykładów ilustrujących własności falowe rozwiązania. Zaczniemy najpierw od sygnału, który ma początkowe wychylenie oraz zerową prędkość. Wtedy (9.57) redukuje się do

$$u(x, t) = \frac{\phi(x - ct) + \phi(x + ct)}{2}, \quad (9.58)$$

czyli jedna część początkowej wartości funkcji podróżuje w lewo a druga w prawo. Dla przykładu wybierzmy impuls prostokątny (jest to prosty model szarpnięcia struny gitarowej)

$$u(x, 0) = \phi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq h; \\ 0, & |x| > h, \end{cases} \quad u_t(x, 0) = \psi(x) = 0. \quad (9.59)$$

Rozwiązanie jest najłatwiej zrozumieć przyglądając się diagramowi czasoprzestrzennemu.

Założmy teraz, że prędkość początkowa jest niezerowa, dla przykładu

$$u(x, 0) = \phi(x) = 0, \quad u_t(x, 0) = \psi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq h; \\ 0, & |x| > h, \end{cases} \quad (9.60)$$

Jest to prosty model uderzenia młoteczkiem w strunę fortepianową. Z rozwiązania d'Alemberta mamy

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds. \quad (9.61)$$

Jako bardziej złożone zastosowanie rozwiązania d'Alemberta zobaczymy jak wygląda rozwiązanie równania fali dla półprostej. Możemy myśleć o nieskończonej (w rzeczywistości bardzo długiej albo sytuacji, w której interesuje nas jedynie bezpośrednie otoczenie jednego z końców) strunie zaczeponiej w jednym końcu. Eksperyment, który obrazuje nasze rozważania to wąż ogrodowy przywiązany jednym końcem do wbitego w ziemię palika. Na wolnym końcu zadajemy impuls i obserwujemy jak się porusza. Startujemy z (9.52). Ponieważ warunki początkowe są zdefiniowane dla  $x > 0$  to kładąc  $t = 0$  mamy, że  $F$  i  $G$  mogą przyjmować jedynie dodatnie argumenty. Skoro w rozwiązaniu (9.52) występuje  $G(x + ct)$  a argument tej funkcji jest zawsze dodatni to pozostaje on bez zmian. Jeśli  $x > ct$  to oczywiście  $F(x - ct)$  też jest dobrze zdefiniowana przez (9.56). Problem stanowi obszar  $x < ct$ . Użyjmy zatem warunku brzegowego

$$0 = u(0, t) = F(-ct) + G(ct), \quad (9.62)$$

czyli  $F(-z) = -G(z)$  dla dowolnej zmiennej  $z > 0$ . To znaczy wartość funkcji  $F$  dla ujemnych argumentów jest nieparzystym odbiciem funkcji  $G$ . Dlatego, dla  $x < ct$  mamy

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct) = -G(ct - x) + G(ct + x) = \frac{\phi(ct + x) - \phi(ct - x)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{ct+x} \psi(s) ds, \quad (9.63)$$

dla  $x > ct$  prawdziwy jest oczywiście wzór d'Alemberta. Możemy łatwo zinterpretować ten wynik. Dla  $x > ct$  jedna część fali porusza się w lewo aż znajdzie się w obszarze  $x < ct$  gdzie zostaje odbita od brzegu i zaczyna poruszać się w prawo jako  $-G(ct - x)$ . Widzimy zatem, że

<sup>28</sup>Na przykład  $v_t = cu_x$  i  $u_t = -cv_x$ .

podobnie jak przy zagadnieniu ciepła na półprostej działa zasada odbicia - warunek początkowy jest odbity nieparzyście.

Na koniec zobaczymy jak rozwiązanie d'Alemberta może być wykorzystane do znalezienia rozwiązania równania falowego dla zaczepionej z obu stron struny. To zagadnienie bez problemów może być rozwiązane za pomocą metody rozdzielania zmiennych jednak podejście d'Alemberta dużo lepiej uwydatnia jakościowe cechy fali. Mamy zatem

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct). \quad (9.64)$$

Jeśli  $x > ct$  oraz  $x < L + ct$  to oczywiście rozwiązanie nie wie o warunkach brzegowych dlatego dane jest rozwiązaniem d'Alemberta (9.57). Jeśli  $x < ct$  lub  $x > L + ct$  to użyć musimy jednego z warunków brzegowych

$$0 = u(0, t) = F(-ct) + G(ct), \quad 0 = u(L, t) = F(L - ct) + G(L + ct). \quad (9.65)$$

Pierwsze równanie pociąga za sobą  $F(z) = -G(z)$ , co daje  $F(L + z) = F(L - z)$ , czyli funkcja  $F$  jest  $2L$ -okresowa. Podobnie dla  $G$ , czyli  $u$  jest również  $2L$ -okresowa. Widzimy, że podobnie jak dla nieskończonej struny zaczepionej w jednym końcu mamy odbicie w  $x = 0$ . Tym razem fala odbija się również w  $x = L$ . Ostateczne rozwiązanie najlepiej zobaczyć na diagramie czasoprzestrzennym (Rys.). Widzimy, że jeśli tylko przedłużymy warunki początkowe nieparzyście z okresem  $2L$  to rozwiązanie d'Alemberta dla całej prostej zredukuje się do rozwiązania na odcinku  $[0, L]$ . Takie rozwiązanie otrzymać jest dużo prościej niż rozwiązując równanie metodą Fouriera.

**Uzupełnić o falach!**

### 9.3 Fale płaskie oraz sferyczne

Bardzo często chcemy znaleźć rozwiązanie równania falowego dla sygnału rozchodzącego się w każdym kierunku. Jest to przykład *fali sferycznej* czyli takiej, która powstaje przy rozprzestrzenianiu się dźwięku w przestrzeni. Z kolei fala świetlna ma jasno ustalony kierunek propagacji i jeśli ma ściśle określoną częstotliwość to jest przykładem *fali płaskiej*. Zaczniemy od niej.

Rozważmy równanie fali w trzech wymiarach

$$u_{tt} = c^2 \Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (9.66)$$

Ponieważ równanie jest liniowe o stałych współczynnikach to spodziewamy się, że znajdziemy rozwiązania wykładnicze

$$u(x, t) = Ae^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad (9.67)$$

gdzie  $A$  jest liczbą zespoloną (amplitudą fali),  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ ,  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ . Poszukiwanie rozwiązań zespolonych jest użyteczne ponieważ upraszcza rachunki. Na końcu biorąc na przykład część rzeczywistą rozwiązania otrzymamy rozwiązanie rzeczywiste. Podstawiając (9.67) do (9.66) otrzymujemy

$$\omega^2 = c^2 k^2, \quad (9.68)$$

gdzie  $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ . Otrzymaliśmy zatem uogólnienie znanego wyniku dla fali jednowymiarowej - jest to związek dyspersyjny pomiędzy częstotliwością fali a liczbą falową. Dla jednego wymiaru mamy  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  czyli liczba falowa jest ilością fal na jednostkę przestrzeni (razy  $2\pi$ ). Ponadto  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi c}{\lambda}$ . Czyli  $\omega = ck$ . Naszym rozwiązaniem jest zatem

$$u(x, t) = Ae^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} \pm ckt)}. \quad (9.69)$$

Biorąc część rzeczywistą powyższego wyrażenia otrzymujemy

$$u(x, t) = A_r \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} \pm ckt) - A_i \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} \pm ckt), \quad (9.70)$$



gdzie  $A = A_r + iA_i$ . Wektor falowy  $\mathbf{k}$  ma bardzo ważną interpretację fizyczną. Z rozwiązania, które właśnie otrzymaliśmy widzimy, że fala przyjmuje dokładnie tę samą wartość na wszystkich  $(\mathbf{x}, t)$ , dla których  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} \pm ckt$  jest stałe, to znaczy

$$u = \text{const.} \quad \text{dla} \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} \pm ckt = C, \quad (9.71)$$

dla pewnego  $C$ . Jeśli ustalimy chwilę  $t$  to otrzymamy  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = \mp ckt + C$ , co jest równaniem płaszczyzny o wektorze normalnym  $\mathbf{k}$ . Właśnie stąd pochodzi nazwa fali płaskiej: jej faza jest stała na płaszczyznach prostopadłych do wektora falowego. Gdy zmienia się czas  $t$  to płaszczyzna o stałej fazie porusza się w kierunku wektora  $\mathbf{k}$ . Widać więc, że fala podróżuje w kierunku tego wektora.

Zbadajmy teraz falę sferyczną. Załóżmy, że rozwiązanie równania (9.66) przedstawia falę, która rozchodzi się w każdym kierunku (a nie tak jak było to poprzednio - w ustalonym). Sugeruje to wprowadzenie współrzędnych sferycznych

$$\frac{1}{c^2} u_{tt} = \frac{1}{r^2} (r^2 u_r)_r = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r. \quad (9.72)$$

gdzie założyliśmy, że rozwiązanie nie zależy od kątów (bo jest w każdym kierunku takie samo). Pomnóżmy to równanie obustronnie przez  $r$

$$\frac{r}{c^2} u_{tt} = r u_{rr} + 2u_r = (ru)_{rr}, \quad (9.73)$$

ponieważ pochodna z lewej strony liczona jest po czasie to mamy

$$(ru)_{tt} = c^2 (ru)_{rr}, \quad (9.74)$$

co jest dokładnie równaniem falowym dla funkcji  $ru$ . Wiemy, że jego rozwiązaniem jest

$$u(r, t) = \frac{1}{r} [F(r - ct) + G(r + ct)]. \quad (9.75)$$

Zatem amplituda fali sferycznej maleje wraz z odległością jak  $1/r$ .

Wynik ten może zostać wykorzystany do znalezienia rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego dla równania falowego w trzech wymiarach. Niech  $u$  będzie rozwiązaniem

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta u, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \\ u(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), \\ u_t(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (9.76)$$

Wprowadźmy nową funkcję  $U = U(r)$  będącą wartością średnią  $u$  na sferze o promieniu  $r$  i środku w ustalonym punkcie  $\mathbf{x}_0$

$$U(r, t) := \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\partial B(r, \mathbf{x}_0)} u dS. \quad (9.77)$$

Od razu mamy  $U(0, t) = u(\mathbf{x}_0, t)$ . Obliczmy teraz Laplasjan funkcji  $U$ . Ponieważ  $U$  nie zależy od kątów mamy podobnie jak wyżej

$$\Delta U = \frac{1}{r^2} (r^2 U_r)_r. \quad (9.78)$$

Scałkujmy (9.76) po kuli  $B(r, \mathbf{x}_0)$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \iiint_{B(r, \mathbf{x}_0)} u dx = \iiint_{B(r, \mathbf{x}_0)} \Delta u dx = \iint_{\partial B(r, \mathbf{x}_0)} \nabla u \cdot \mathbf{n} dS, \quad (9.79)$$

z twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego. W całce powierzchniowej można zmienić zmienną aby przejść do całkowania po sferze jednostkowej

$$\begin{aligned} \iint_{\partial B(r, \mathbf{x}_0)} \nabla u \cdot \mathbf{n} dS &= \iint_{\partial B(r, \mathbf{x}_0)} \nabla u(\mathbf{x}, t) \cdot \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{r} dS(\mathbf{x}) = r^2 \iint_{\partial B(1, 0)} \nabla u(\mathbf{x}_0 + r\mathbf{y}, t) \cdot \mathbf{y} dS(\mathbf{y}) \\ &= r^2 \frac{\partial}{\partial r} \iint_{\partial B(1, 0)} u(\mathbf{x}_0 + r\mathbf{y}, t) dS(\mathbf{y}) = 4\pi r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\partial B(r, \mathbf{x}_0)} u(\mathbf{x}, t) dS(\mathbf{x}) \right) = 4\pi r^2 U_r. \end{aligned} \quad (9.80)$$

Lewa strona powyższego równania może być zapisana jako całka po coraz większych sferach wypełniających kulę  $B(r, \mathbf{x}_0)$ , to jest wprowadzone mogą być współrzędne sferyczne

$$\iiint_{B(r, \mathbf{x}_0)} u d\mathbf{x} = \int_0^r \rho^2 d\rho \iint_{\partial B(\rho, \mathbf{x}_0)} u d\Omega = \int_0^r \rho^2 \left( \frac{1}{4\pi \rho^2} \iint_{\partial B(\rho, \mathbf{x}_0)} u dS \right) d\rho = 4\pi \int_0^r \rho^2 U(\rho) d\rho, \quad (9.81)$$

ponieważ element powierzchni i element kąta bryłowego są związane zależnością  $dS = \rho^2 d\Omega$ . Łącząc dwa powyższe wzory mamy

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^r \rho^2 U(\rho) d\rho = r^2 U_r. \quad (9.82)$$

Aby pozbyć się całki wystarczy pomnożyć przez  $r^2$  zróżniczkować ze względu na  $r$

$$\frac{1}{c^2} U_{tt} = \frac{1}{r^2} (r^2 U_r)_r, \quad (9.83)$$

co pokazuje, że  $U$  spełnia równanie fali i zależy tylko od promienia. Jest to dokładnie to samo równanie co (9.72) dlatego rozwiązaniem jest

$$rU(r, t) = F(r - ct) + G(r + ct), \quad (9.84)$$

gdzie  $F$  i  $G$  związane są z warunkami początkowymi. Aby znaleźć dokładną zależność podstawmy  $r = 0$ , wtedy

$$0 = F(-ct) + G(ct), \quad (9.85)$$

dlatego

$$rU(r, t) = F(r - ct) - F(r + ct). \quad (9.86)$$

Zróżniczkujmy teraz powyższy wzór ze względu na  $r$

$$U + rU_r = F'(r - ct) - F'(r + ct), \quad (9.87)$$

oraz podstawmy  $r = 0$

$$u(\mathbf{x}_0, t) = U(r, 0) = F'(-ct) - F'(ct). \quad (9.88)$$

Obliczenie pochodnej po  $t$  daje nam

$$rU_t = -c [F'(r - ct) + F'(r + ct)], \quad (9.89)$$

a dla  $r = 0$  mamy

$$F'(-ct) = -F'(ct), \quad (9.90)$$

czyli

$$u(\mathbf{x}_0, t) = U(r, 0) = 2F'(ct). \quad (9.91)$$

Dodając do siebie (9.89) oraz (9.87) mamy

$$c(rU)_r + (rU)_t = 2cF'(r + ct). \quad (9.92)$$

Co pociąga

$$u(\mathbf{x}_0, t) = \left[ (rU)_r + \frac{1}{c}(rU)_t \right]_{t=0, r=ct}. \quad (9.93)$$

Powracając do warunków początkowych i pomijając pisanie indeksu 0 dostajemy

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \iint_{B(ct, \mathbf{x})} \frac{\phi}{r} dS + \iint_{B(ct, \mathbf{x})} \frac{\psi}{r} dS \right]. \quad (9.94)$$

Jest to wzór Poissona. Zauważmy, że rozwiązanie zależy jedynie od wartości warunków początkowych na sferze a nie w jej wnętrzu. Jest to *zasada Huygensa*.