1 Ekstrema lokalne funkcji wielu zmiennych

Definicja 1.1 (Ekstremum lokalne) *Niech będa $x_0 \in U \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n$. Niech będzie dana funkcja $f : D \to \mathbb{R}$, to f ma maksimum lokalne w x_0 jeśli istnieje $\delta > 0$ taka że*

$$\forall x \in K(x_0, r) x \neq x_0 \longrightarrow f(x) < f(x_0).$$

Analogicznie definiujemy minimum lokalne w x_0. Ponadto, f ma ekstremum lokalne x_0 jeżeli f ma maksimum lokalne albo minimum lokalne.

Przykład 1.1 *$f(x, y) = |x - 2|^2 + |x + 1|$ ma minimum lokalne w $(2, -1)$. Zauważmy, że $f(2, -1) = 0 < |x - 2|^2 + |x + 1| = f(x, y)$ dla dowolnego $(x, y) \neq (2, -1)$.*

Twierdzenie 1.1 (Fermata - warunek konieczny) *Jeżeli f ma ekstremum lokalne w x_0 i wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu istnieją w x_0, to są one równe zeru*

Dowòd. *Niech f ma na przykład maksimum w x_0 i dla $k \in \{1, \ldots, n\}$ pochodna cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)$ istnieje w x_0. Wtedy istnieje $r > 0$ takie że dla dowolnego $x \in K(x_0, r)$ $f(x) \leq f(x_0)$, Niech $x_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ i $x = (x_1^0 \ldots, x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0) \in K(x_0, r)$. Jeżeli $x_k^0 < x_k$ wtedy*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x_k - x_k^0} \leq 0,$$

więc $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) \leq 0$. Jeżeli $x_k^0 < x_k$, to wtedy

$$0 \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x_k - x_k^0},$$

więc $0 \leq \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)$. Ponieważ $\frac{f(x)-f(x_0)}{x_k-x_k^0}$ istnieje, więc $\frac{f(x)-f(x_0)}{x_k-x_k^0} = 0$, Ponieważ k zostało wybrane w sposób dowolny, więc twierdzenie jest udowodnione. ■

Przykład 1.2 *Pokażemy że warunek w powyższym twierdzeniu nie jest wystarczający. Niech $f(x, y) = x^2 - y^2$, wtedy dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ $f(\frac{1}{n+1}, 0) > 0$ i $f(0, \frac{1}{n+1}) < 0$. Więc f nie osiąga ekstremum w $(0, 0)$. Zauważmy, że*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 2x|_{(0,0)} = 0 \quad i \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = -2y|_{(0,0)} = 0.$$

Definicja 1.2 (Macierz dodatnio określona) *Powiemy, że macierz $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$ zachodzi*

$$x \cdot A \cdot x^T > 0$$

Tutaj A^T jest transpozycją macierzy A ($[A^T]_{ij} = [A]_{ji}$ dla dowolnych $i, j \in \{1, \ldots, n\}$).

Kwadratowa macierz A jest symetryczna jeżeli zachodzi $A^T = A$.

Twierdzenie 1.2 *Symetryczna macierz $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $k \in \{1, \dots, n\}$ zachodzi*

$$(\forall k \in \{1, \dots, n\}) \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ & \cdots & \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0.$$

.

Twierdzenie 1.3 (Warunek wystarczający) *Niech $x_0 \in U \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n$ i U otwarty w $\mathbb{R}^n$. Niech $f : D \to \mathbb{R}$ będzie funkcją taką że*

1. *wszystkie pochodne cząstkowe istnieją i są ciągłe na zbiorze otwartym U,*
2. *dla kazdego $k \in \{1, \dots, n\}$ $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) = 0$.*

Wtedy mamy:

1. *jeżeli dla każdego $k \in \{1, \dots, n\}$*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k}(x_0) \\ & \cdots & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_k}(x_0) \end{vmatrix} > 0$$

   to wtedy f ma minimum lokalne w x_0,

2. *jeżeli dla każdego $k \in \{1, \dots, n\}$*

$$(-1)^k \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k}(x_0) \\ & \cdots & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_k}(x_0) \end{vmatrix} > 0$$

   to wtedy f ma maksimum lokalne w x_0.

Dowód. *Założmy że mamy do czynienia z pierwszą sytuacją (minimul lokalne). Ponieważ wszystkie pochodne cząstkowe są ciągłe na U. To istnieje $r > 0$ takie, że że dla każdego $x \in K(x_0, r)$ i dla każdego $k \in \{1, \dots, n\}$ zachodzi*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k}(x) \\ & \cdots & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_k}(x) \end{vmatrix} > 0.$$

Więc dla dowolnego $x \in K(x_0, r)$ macierz $[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)]_{ij=1}^n$ jest dodatnio określona. Więc

$$0 < (x - x_0) \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right]_{i,j=0}^n (x - x_0)^T = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \Delta x_i \Delta x_j,$$

gdzie $x_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *oraz* $\Delta x_i = x_i - x_i^0$ *dla dowolnego* $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Niech $x \in K(x_0, r)$ *będzie dowolnym elementem różnym od* x_0. *To stosując rozwinięcie Taylora z drugą resztą Lagrange'a istnieje* $t \in (0,1)$ *takie że*

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\Delta x_i + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0 + t(x - x_0))\Delta x_i \Delta x_j =$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0 + t(x - x_0))\Delta x_i \Delta x_j > 0.$$

Zauważmy, że z drugiego założenia pochodne cząstkowe pierwszego rzędu zerują się w x_0 *i stąd mamy równość w powyższym wzorze. Więc dla dowolnego* $x \in K(x_0, r)$ *różnego od* x_0 *mamy* $f(x_0) < f(x)$, *co oznacza że funkcja* f *osiaga minimum lokalne w* x_0.

Aby udowodnić wersję z maksimum, wystarczy zauważyć, że macierz

$$H = -\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ & \cdots & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

jest dodatnio określona w pewnym otoczeniu punktu x_0. *Reszta dowodu przebiega analogicznie do przedstawionego przed chwilą.* ■

Definicja 1.3 (Hesjan) *Niech* $x_0 \in U \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n$, U *otwarty w* $\mathbb{R}^n$. *Niech* $f : D \to \mathbb{R}$ *będzie taką funkcją ze istnieją wszystkie pochodne drugiego rzędu w* x_0, *to macierz* $H(f, x_0) \in M_{nn}(\mathbb{R})$ *nazywamy hesjanem funkcji* f *w punkcie* x_0 *jeżeli*

$$(\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}) \;\; [H(f, x_0)]_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0).$$