Analiza matematyczna

Robert Rałowski

12 marca 2020

Spis treści

0.1 Liczby naturalne

Peano zaksjomatyzował pojęcie zbioru liczb naturalnych zadając następujace postulaty tworzące aksjomatykę Peano.

Definicja 0.1.1 (Aksjomaty Peano) *Istnieje zbiór* $\mathbb{N}$ *oraz funkcja* $* \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, *które spełniają:*

1. $0 \in \mathbb{N}$,
2. $\neg(\exists n \in \mathbb{N}) *(n) = 0$,
3. $*$ *jest różnowartościowa na* $\mathbb{N}$ *tj.* $(\forall m, n \in \mathbb{N})\ m \neq n \longrightarrow *(m) \neq *(n)$,
4. $(\forall z)(0 \in z \wedge (\forall n \in \mathbb{N}) n \in z \longrightarrow *(n) \in z) \longrightarrow \mathbb{N} \subseteq z$.

Ostatni aksjomat jest tak zwana zasadą indukcji matematycznej. Ponadto, $*$ *jest tak zwaną funkcją następnika i wtedy przyjmujemy zasadę, że piszemy* $1 = *(0)$, $n+1$ *zamiast* $*(n)$, *dalej* $2 = 1+1$, $3 = 2+1$, *itd.*

W **dodatku** można znaleźć więcej informacji o tematyce poswięconej aksjomatom Peano, mianowicie z niesprzecznosci teori mnogości **ZFC**, wynika istnienie zbioru liczb naturalnych (który spełania wszystkie aksjomaty Peano).

Tak więc ostatni aksjomat możemy zapisać jako

Definicja 0.1.2 (Zasada indukcji matematycznej) *Jesli* z *jest zbiorem takim że*

1. $0 \in z$ *oraz*
2. $(\forall n \in \omega) n \in z \longrightarrow n+1 \in z$,

to wtedy $\mathbb{N} \subset z$.

Fakt 0.1.1 $(\forall n \in \mathbb{N})\ n \neq 0 \longrightarrow (\exists m \in \mathbb{N})\ m+1 = n$.

Dowod. Niech $z = \{0\} \cup \{n \in \mathbb{N} : (\exists m \in \mathbb{N}) n = m+1\}$, oczywiście $0 \in z$, załóżmy że $n \in z$, to jest $m \in \mathbb{N}$ taka że $n = m+1$, więc $n+1 = (m+1)+1$, stad $n+1 \in z$. Z zasady indukcji matematycznej wynika że $\mathbb{N} \subseteq z$ i dostajemy tezę. ■

Fakt 0.1.2 $(\forall n \in \mathbb{N})\ \neg(n = n+1)$.

Dowod. Niech $z = \{n \in \mathbb{N} : \neg(n = n + 1)\}$, to z pierwszego aksjomatu $0 \in z$, załóżmy że $n \in z$, wtedy na podstawie aksjomatu 3 mamy $n + 1 \neq (n + 1) + 1$, więc $n + 1 \in z$ i na podstawie aksjomatu 4 mamy $\mathbb{N} \subseteq z$. Teza twierdzenia została udowodniona. ■

W zbiorze liczb naturalnych możemy wprowadzić dodawanie i mnożenie. Wprowadzimy dwuargumentowe działanie dodawania na zbiorze $\mathbb{N}$ w sposób następujący:

- $(\forall n \in \mathbb{N})\ n + 0 = n$,
- $(\forall m, n \in \mathbb{N})\ m + (n + 1) = (m + n) + 1$.

Podobnie definiujemy mnożenie:

- $(\forall n \in \mathbb{N})\ n \cdot 0 = 0$,
- $(\forall m, n \in \mathbb{N})\ m \cdot (n + 1) = (m \cdot n) + m$.

Jako ćwiczenie, można udowodnić, że obydwa działania są łączne, przemienne oraz zachodzi prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania.

Podamy parę przykładów w których wykorzystana zostanie zasada o indukcji matematycznej.

Przykład 0.1.1 *Dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$ ma miejsce nastepująca równość:*

$$0 + 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Niech będzie dany zbiór:

$$z = \{n \in \mathbb{N} : \quad 0 + 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n + 1)}{2}\}.$$

Oczywiście $0 \in z$. Niech teraz $n \in \mathbb{N}$, pokażemy, że $n + 1 \in z$, co na mocy zasady indukcji matematycznej $\mathbb{N} \subset z$. Wiec rozważmy wyrażenie $0 + 1 + 2 + \ldots + n + n + 1$, to wtedy

$$0+1+2+\ldots+n+n+1 = \frac{n(n+1)}{2}+n+1 = \frac{n(n+1)+2(n+1))}{2} = 0+1+2+\ldots+n = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

co świadczy, że również $n + 1 \in z$. Tak więc $\mathbb{N} \subset z$, więc mamy tezę.

Przykład 0.1.2 *Pokażemy, że dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $6|7^n - 1$. Niech*

$$z = \{n \in \mathbb{N} : \quad 6|7^n - 1\}.$$

Oczywiście $0 \in z$, niech $n \in \mathbb{N}$, to wtedy

$$7^{n+1} - 1 = 7^n \cdot 7 - 1 = 7^n(6 + 1) - 1 = 7^n \cdot 6 + 7^n - 1.$$

Pierwszy składnik jest podzielny przez 6, natomiast $7^n - 1$ jest podzielne przez 6 (bo $n \in z$) a więc $7^{n+1} - 1$ jest podzielne przez 6. Tak więc $n + 1 \in z$, co na mocy zasady indukcji matematycznej dostajemy $\mathbb{N} \subset z$. Więc własność podzielności o jakiej tu mowa została wykazana.

0.2 Liczby rzeczywiste.

Definicja 0.2.1 (Liczby rzeczywiste) *Za zbiór liczb rzeczywistych* $(\mathbb{R}, \cdot, +, 0, 1, <)$ *możemy uznać każdy zbiór spełniający następujące aksjomaty:*

1. $(\mathbb{R}, \cdot, +, 0, 1)$ *jest ciałem (abelowym),*

2. $(\mathbb{R}, <)$ *jest porządkiem liniowym takim że:*

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) \ \ x < y \ \textit{to} \ x + z < y + z,$$

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \ \ x > 0, y > 0 \ \textit{to} \ xy > 0,$$
$$x > 0 \ \textit{to} \ \neg(-x > 0),$$

3. **(Aksjomat Dedekinda)** *jeśli* $A, B \subset \mathbb{R}$ *niepusty podział* $\mathbb{R}$*, to istnieje liczba rzeczywista* $c \in \mathbb{R}$*, taka że* $c \in A$ *i* c *jest największym elementem zbioru* A *lub* $c \in B$ *i* c *jest najmniejszym elementem zbioru* B*.*

Definicja 0.2.2 (Ograniczenie górne) *Mówimy, że zbiór* $A \subset X$ *jest ograniczony z góry wtedy i tylko wtedy gdy*
$$(\exists c \in X)(\forall a \in A) \ \ a \leq c.$$

Definicja 0.2.3 (Kres górny) *Mówimy, że zbiór ograniczony z góry* $A \subset X$ *ma kres górny* $c \in X$ *wtedy i tylko wtedy gdy* c *jest najmniejszym ograniczeniem górnym zbioru* A *(*$A \subset X$ *jest ograniczony z góry wtedy i tylko wtedy gdy istnieje* $c \in X$ *takie że* $a \in A$ *to* $a \leq c$*).*

Twierdzenie 0.2.1 (O kresie górnym) *Każdy niepusty podzbiór ograniczony z góry* $D \subset \mathbb{R}$ *ma kres górny.*

Dowod. Niech $D \subset \mathbb{R}$ jest podzbiorem ograniczonym z góry. Rozpatrzmy następujący podział $A, B \subset \mathbb{R}$ zbioru liczb rzeczywistych:

$$x \in A \equiv (\exists a \in D) \ \ x \leq a, \ \text{oraz} \quad B = \mathbb{R} \setminus A.$$

Oczywiście A, B są niepuste z założenia. Jeśli by istniały elementy $x \in A$ i $y \in B$ takie że $y < x$ to istniałby $a \in A$ taki że $x \leq a$ i z przechodniości relacji mniejszości mamy $y < a$ więc $y \in A$ co jest niemożliwe ($y \in \mathbb{R} \setminus A$). więc

$$x \in A, y \in B \text{ to } x < y.$$

Więc rzeczywiście A, B jest niepustym podziałem $\mathbb{R}$. Z aksjomatu Dedekinda wynika istnienie elementu $c \in \mathbb{R}$ takiego że $c \in A$ jest największym elementem zbioru A lub $c \in B$ najmniejszym zbioru B. Oczywiście c jest ograniczeniem górnym zbioru $D \subset A$ (c jest największym w A o ile $c \in A$, $c \in B$ to $a \in A$ to $a < c$ bo A, B jest podziałem $\mathbb{R}$). Teraz udowodnimy, że c jest najmniejszym ograniczeniem zbioru D. Przypuśćmy że istnieje mniejsze ograniczenie górne zbioru D np $c' < c$, to oczywiscie $c' < c" := \frac{c'+c}{2} < c$ i $c"$ jest ograniczeniem zbioru A a więc D. Oczywiście $c" \in B$ więc tym bardziej $c \in B$ wiec c jest najmnieszym elementem w B z aksjomatu Dedekinda co jest sprzeczne z faktem że $c" < c$ ($c" \in B$) co kończy dowód naszego twierdzenia. ■

Uwaga 0.2.1 *Analogicznie definiuje się pojęcie ograniczenia dolnego zbioru oraz kresu dolnego zbioru i oczywiscie zachodzi* **Twierdzenie o kresie dolnym**.

Twierdzenie 0.2.2 *Zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ jest nieograniczony w $\mathbb{R}$.*

Dowod. Przypuścmy, że teza jest nieprawdziwa, tzn. $\mathbb{N}$ jest ograniczony. Więc na mocy poprzedniego twierdzenia o kresach zbiór $\mathbb{N}$ ma kres górny $g \in \mathbb{R}$. Więc

1. $n \in \mathbb{N}$ to $n \leq g$.
2. $g' < g$ to istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie że $g' < n_0$.

Jeśli $g' = g - 1$ to z 2) mamy

$$g - 1 < n_0 \longrightarrow g < n_0 + 1 \leq g \longrightarrow g < g,$$

gdzie skorzystaliśmy z definicji liczb naturalnych ($n \in \mathbb{N}$ to $n+1 \in \mathbb{N}$), a stąd otrzymujemy sprzeczność. ■

Twierdzenie 0.2.3 *Jeśli $a, b \in \mathbb{R}$ i $a < b$, to istnieje $c \in \mathbb{Q}$ takie że $a < c < b$.*

Dowod. Możemy oczywiście założyć że $0 < a < b$, to korzystając z faktu że liczby naturalne $\mathbb{N}$ są zbiorem nieograniczonym w $\mathbb{R}$ istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie że

$$\frac{1}{b-a} < n_0.$$

Niech

$$m_0 = \max\left\{m \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \frac{m}{n_0} \leq a\right\},$$

wtedy mamy następujące nierówności:

$$a < \frac{m_0 + 1}{n_0} = \frac{m_0}{n_0} + \frac{1}{n_0} < a + (b - a) = b$$

co kończy dowód biorąc za $c = \frac{m_0+1}{n_0}$. ■

Twierdzenie 0.2.4 (Liczba $\sqrt{2}$) *Istnieje dodatnia liczba rzeczywista $a \in \mathbb{R}$, taka że $a^2 = 2$.*

Dowod. Niech $A = \{x \in \mathbb{R} : \ 0 < x \wedge x^2 < 2\}$, to $1 \in A$ oraz jeżeli $x \in A$, to $x^2 < 2 < 4$. Gdyby $2 < x$ i $x \in A$, to $4 = 2^2 < x^2 < 2$ co dałoby $4 < 2$, sprzeczność. Więc zbiór A jest nepusty i ograniczony z góry. Na mocy twierdzenia 0.2.1 istnieje liczba rzeczywista $a \in \mathbb{R}$, która jest kresem górnym zbioru A.

Pokażemy że $\neg(a^2 < 2)$ oraz $\neg(2 < a^2)$, co daje nam tezę twierdzenia, mianowicie że zachodzi $a^2 = 2$.

Załóżmy że mamy $a^2 < 2$, pokażemy że istnieje $x \in A$, taka że $a < x$ co jest niemożliwe na mocy faktu że a jest kresem górnym zbioru A. Tutaj x będzie postaci $a + \frac{1}{n}$ dla pewnej dodatniej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$. Zauważmy że $1 \leq a$ i $(a + \frac{1}{n})^2 < 2 \longleftrightarrow a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < 2$ i wystarczy znaleźć nasze $n > 0$, takie aby $a^2 + \frac{3a}{n} < 2$. Ponieważ mamy

$$a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} \leq a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{an}{n^2} = a^2 + \frac{3a}{n} < 2.$$

Niech $y = \frac{3a}{2-a^2}$, to $0 < y$ i na mocy twierdzenia 0.2.2 istnieje dodatnia liczba naturalna $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ taka że $y = \frac{3a}{2-a^2} < n$. Ponieważ $2 - a^2 > 0$, to mamy

$$\frac{3a}{2-a^2} < n \longleftrightarrow 2 > a^2 + \frac{3a}{n} \geq a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} = (a + \frac{1}{n})^2 = x^2 > a^2$$

i wtedy $x = (a + \frac{1}{n}) \in A$ jest większe od a, co jest niemożliwe bo a jest kresem górnym zbioru A.

Teraz załóżmy że $2 < a^2$. Znajdziemy takie dodatnie $y \in \mathbb{R}$ że $y < a$ i takie że dla każdego $x \in A$ $x < y$, co oznaczałoby że a nie jest najmniejszym ograniczeniem górnym zbioru A a więc a i w tym przypadku też mie byłoby kresem górnym zbioru A. Tutaj znajdziemy dodatnią liczbą naturalną $n \in \mathbb{N}$, że nasze y będzie postaci $a - \frac{1}{n}$. Nierówność $2 < y$ zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy $2 < a^2 - \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2}$. Zauważmy że $a^2 - \frac{2a}{n} < a^2 - \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2}$, więc wystarczy znaleźć taką dodatnią liczbę $n \in \mathbb{N}$ że $2 < a^2 - \frac{2a}{n}$. Niech $t = \frac{2a}{a^2-2}$, to istnieje dodatnia liczba naturalna $n \in \mathbb{N}$ taka że $\frac{2a}{a^2-2} < n$, co wobec założenia że $a^2 - 2 > 0$ daje

$$2 < a^2 - \frac{2a}{n} < a^2 - \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} = (a - \frac{1}{n})^2 = y^2 < a^2.$$

Niech $x \in A$ będzie dowolne, gdyby $y \leq x$, to wtedy $y^2 \leq x^2 < 2$, więc $y^2 < 2$, co jest niemożliwe. Stąd dla każdego $x \in A$ mamy $x < y$ ale też mamy $y < a$, więc a nie byłoby najmniejszym ograniczenie górnym zbioru A i w konsekwencji, a nie byłoby kresem górnym zbioru A wbrew założeniu o liczbie a. ■

Twierdzenie 0.2.5 *Jeśli $a, b \in \mathbb{Q}$ i $a < b$, to istnieje $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, takie że $a < c < b$.*

Dowod. Tak jak w poprzednim dowodzie, możemy założyć że $0 \leq a < b$. Oczywiście łatwo sprawdzić, że $d := \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Korzystając z nieogrniczoności $\mathbb{N}$ w $\mathbb{R}$ isnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ że

$$\frac{\sqrt{2}}{b-a} < n_0,$$

podobnie jak w poprzednim dowodzie niech

$$m_0 = \max\left\{m \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \frac{m\sqrt{2}}{n_0} \leq a\right\},$$

wtedy mamy

$$a < \frac{(m_0+1)\sqrt{2}}{n_0} = \frac{m_0\sqrt{2}}{n_0} + \frac{\sqrt{2}}{n_0} < a + (b-a) = b$$

co kończy dowód naszego twierdzenia. ■

Otrzymujemy z powyższych twierdzeń wniosek.

Wniosek 0.2.1 *Wniosek Jeścli $a, b \in \mathbb{R}$ są liczbami rzeczywistymi $a < b$, to isnieją $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ oraz liczba wymierna $d \in \mathbb{Q}$ że*

$$a < c < b \text{ oraz } a < d < c.$$

0.2.1 Nierówności

Nierówności w analizie matematycznej odgrywają kluczową rolę, choćby przy zagadnieniach związanych z istnieniem granic ciągów czy też funkcji, badaniem monotoniczności ciągów i wiele wiele innych problemów.

Zdefiniujmy wartość bewzględną z liczby rzeczywistej w sposób następujący:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Wtedy mamy następujące nierówności:

1. $(\forall x \in \mathbb{R})\ x \leq |x|$,
2. $(\forall x \in \mathbb{R})\ 0 \leq |x|$,
3. $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ |x+y| \leq |x| + |y|$,
4. $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ ||x| - |y|| \leq |x - y|$,
5. $(\forall x, y, r \in \mathbb{R})\ |x+y| < r \longleftrightarrow x - r < y < x + r$.

Ponadto, mamy $|x| = \big||x|\big| = |-x|$ oraz $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in \mathbb{R}$.

Przykład 0.2.1 (Nierówność Bernouliego)

$$(\forall x \geq -1)(\forall n \in \mathbb{N})\ (1+x)^n \geq 1 + n \cdot x.$$

Udowodnimy tę nierówność stosując indukcję matematyczną. Dla $n = 0$ *nierówność jest oczywista:* $(1+x)^0 = 1 \geq 1 = 1 + 0 \cdot x$. *Ustalmy teraz dowolną liczbę naturalną* $n \in \mathbb{N}$ *i załóżmy, że nierówność* $(a+x)^n \geq 1 + n \cdot x$ *jest prawdziwa. Wtedy dla* $n+1 \in \mathbb{N}$ *mamy*

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+x+nx+x^2 \geq 1+nx+x = 1+(n+1)\cdot x$$

a stąd nierówność Bernouliego dla $n+1$ *też jest prawdziwa. Z zasady indukcji matematycznaj mamy więc że dla dowolnej liczby naturalnej* $n \in \mathbb{N}$ *i* $x \geq -1$ *mamy* $(1+x)^n \geq 1+n\cdot x$, *co należało dowieść.*

Przykład 0.2.2 *Stosując indukcję matematyczną, udowodnimy prawdziwość następującego zdania*

$$(\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})(\forall x_1, \ldots x_n \in (0,\infty))\ \ x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = 1 \longrightarrow n \leq x_1 + \ldots + x_n.$$

Dla $n = 1$ *nierówność jest prawdziwa* $x_1 = 1 \longrightarrow x_1 \geq 1$. *Załóżmy że dla liczby naturalnej* $n \in \mathbb{N}$ *prawdziwe jest zdanie*

$$(\forall x_1, \ldots x_n \in (0,\infty))\ \ x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = 1 \longrightarrow n \leq x_1 + \ldots + x_n$$

Dla $n+1$ *rozważmy ciąg dodatnich liczb rzeczywistych* $x_1, \ldots, x_{n+1}$ *takich że* $x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n+1} = 1$. *Bez straty ogólności możemy założyć, że* x_n *jest najmniejszą liczbą w tym ciągu a* x_{n+1} *jest największą. Wtedy* $1 - x_n \geq 0$ *i* $x_{n+1} - 1 \geq 0$ *a stąd mamy*

$$0 \leq (1-x_n)(x_{n+1}-1) = x_n + x_{n+1} - 1 - x_n x_{n+1} \longrightarrow x_n x_{n+1} \leq x_1 + x_{n+1} - 1.$$

Kładąc $y_1 = x_1, \ldots, y_{n-1} = x_{n-1}$ *oraz* $y_n = x_n x_{n+1}$, *widzimy że*

$$y_1 \ldots y_n = x_1 \ldots x_{n-1}(x_n x_{n+1}) = 1.$$

Stosując załozenie inducyjnę mamy $n \leq y_1 + \ldots + y_n = x_1 + \ldots + x_{n-1} + x_n x_{n+1}$. *Stosując powyższą nierówność mamy*

$$n \leq y_1 + \ldots + y_n = x_1 + \ldots + x_{n-1} + x_n x_{n+1} \leq x_+ \ldots + x_{n-1} + x_n + x_{n+1} - 1,$$

więc w koncu dla dowolnych dodatnich liczb $x_1, \ldots, x_{n+1}$, *takich że* $x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n+1} = 1$ *mamy żadaną nierówność*

$$n + 1 \leq x_1 + \ldots + x_{n+1}.$$

Z zasady o indukcji matematycznej udowodniliśmy żądaną nierówność dla dowolnej dodatniej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$.

Przykład 0.2.3 (Nierówność Cauchy'ego) *Dla dowolnej dodatniej liczby naturalnej* $n \in \mathbb{N}$, *dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych* $a_1, \ldots, a_n$ *zachodzi nierówność*

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

Niech $A = \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$ *i dla* $k \in \{1, \ldots, n\}$ $x_k = \frac{a_k}{A}$. *Oczywiście każda liczba* x_k *jest dodatnia oraz*

$$x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = \frac{a_1}{A} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{A} = \frac{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}{A^n} = \frac{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} = 1.$$

Na mocy nierówności udowodnionej w poprzednim przykładzie, mamy

$$n \leq x_1 + \ldots + x_n = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{A}$$

a więc

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} = A \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n},$$

co należało dowieść.

Jeżeli w ostatnim przykładzie dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych $x_1, \ldots x_n$ podstawimy za $a_1 = \frac{1}{x_1}, \ldots, a_n = \frac{1}{x_n}$, to otrzymamy

$$\frac{1}{\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}} = \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = \frac{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_1}}{n},$$

a stąd mamy

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_1}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

Reasumując, dla dowolnej dodatniej liczby naturalnej n, dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych $a_1, \ldots, a_n$ mamy

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_1}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

Tutaj, pierwsze wyrażenie jest średnią harmoniczną, drugie średnią geometryczną a ostatnie stanowi średnią arytmetyczną liczb $a_1, \ldots, a_n$.

Zadania: liczby naturalne i rzeczywiste

Stosując aksjomatykę Peano (omówioną na wykładzie), definiujemy dodawanie i mnożenie w sposób rekurencyjny:

D1: $(\forall n \in \mathbb{N})\ n + 0 = n$,

D2: $(\forall m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ n + S(m) = S(n + m)$.

M1: $(\forall n \in \mathbb{N})\ n \cdot 0 = 0$,

M2: $(\forall m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ n \cdot S(m) = (n \cdot m) + n$.

Zadanie 1 *Proszę udowodnić następujące własności liczb naturalnych:*

1. $(\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})(\exists m \in \mathbb{N})\ \ n = S(m)$,
2. $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ n \neq S(n)$.

Zadanie 2 *Proszę udowodnić następujace własności dodawania i mnożenia liczb naturalnych:*

1. $(\forall m, n, k \in \mathbb{N})\ \ (m + n) + k = m + (n + k)$.
   Wsk. Rozważyć zbiór $Z = \{k \in \mathbb{N} : \ \ (\forall m, n \in \mathbb{N})\ (m + n) + k = m + (n + k)\}$.
2. $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ S(0) \cdot n = n$,
3. $(\forall m, n, k \in \mathbb{N})\ \ (m + n) \cdot k = (m \cdot k) + (n \cdot k)$,
4. $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ 0 \cdot n = 0$,
5. $(\forall m, n \in \mathbb{N})\ \ m \cdot n = n \cdot m$,
6. $(\forall m, n, k \in \mathbb{N})\ \ (m \cdot n) \cdot k = m \cdot (n \cdot k)$.

Zadanie 3 *Stosując zasadę skończonej indukcji matematycznej, proszę udowodnić, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi:*

- $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + \ldots + n \cdot (n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$,
- $10^n - 4^n$ *jest podzielna przez* 6,
- $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq \frac{2n}{n+1}$
- $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ \ x^n + y^n \leq (x + y)^n$.

Zadanie 4 **(Zasada Archimedesa)** *Proszę wykazać, że*

$$(\forall x > 0)(\forall y > 0)(\exists n \in \mathbb{N})\ \ x < n \cdot y,$$

tutaj $x, y \in \mathbb{N}$.

Zadanie 5 * *Proszę udowodnić, ze pomiędzy dwiema różnymi liczbami rzeczywistymi można znaleźć liczbę wymierną oraz liczbę niewymierną.*

Zadanie 6 *Proszę pokazać, że liczby* $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ *sa niewymierne.*

Zadanie 7 *Proszę wyznaczyć* **kres górny** *oraz* **kres dolny** *dla następujących zbiorów:*

1. $A = \left\{ \frac{1}{m} - \frac{1}{n} :\ m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$,

2. $B = \left\{ \frac{2}{m} + \frac{3}{n} : \ m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$,

3. $C = \left\{ \frac{n}{n+2} : \ \ n \in \mathbb{N} \right\}$.

Które z powyzszych kresów są osiągane ?

Zadanie 8 *Proszę wykazać następujace nierównosci:*

1. $(\forall x, y \in \mathbb{R}) \ \ |x + y| \leq |x| + |y|$,

2. $(\forall x, y \in \mathbb{R}) \ \ \big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$.

0.3 Ciągi liczbowe

Definicja 0.3.1 (Ciąg liczbowy) *Ciągiem liczbowym nazywamy każdą funkcję $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$.*

Uwaga 0.3.1 *Ciąg liczbowy $a : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ oznaczamy również jako*

$$a = \big(a(1), a(2), \dots\big) \quad \text{lub } (a_n)_{n=1}^{\infty} \quad \text{oraz jako } (a_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Jednym z najważniejszych pojęć w teorii ciągów liczbowych jest pojęcie granicy ciagu

Definicja 0.3.2 *Niech będzie dany ciąg liczbowy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, to liczbę rzeczywistą $g \in \mathbb{R}$ nazyway granicą ciągu liczbowego jeśli*

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} n > n_0 \text{ to } |a_n - g| < \epsilon$$

Uwaga 0.3.2 *Granicę ciągu liczbowego oznaczamy przez*

$$\lim_{n\to\infty} a_n.$$

Przykład 0.3.1 ($\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$) *Niech będzie dana dodatnia liczba $\epsilon > 0$. Korzystając z faktu że $\mathbb{N}$ jest nieoganiczony z góry w zbiorze $\mathbb{R}$, istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ taka że $\frac{1}{\epsilon} < n_0$. Niech $n \in \mathbb{N}$ będzie dowolną liczbą naturalną $n \in \mathbb{N}$ większą od n_0. Wtedy mamy*

$$0 < \frac{1}{\epsilon} < n \longrightarrow 0 < \frac{1}{n} < \epsilon \longrightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon.$$

Ostatecznie mamy że dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$, takie że dla dowolnego $n > n_0$ zachodzi

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon,$$

co należało dowieść.

Przykład 0.3.2 ($\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$) *Niech $\epsilon > 0$ będzie dowolną liczbą dodatnią rzeczywistą. Więdząc że zbiór $\mathbb{N}$ jest nieograniczony w $\mathbb{R}$ wynika, że istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ dla którego zachodzi*

$$\frac{2}{\epsilon^2} + 1 < n_0,$$

tak więc jeśli $n > n_0$ to wtedy

$$\frac{2}{\epsilon^2} + 1 < n \longrightarrow 1 < \frac{n-1}{2}\epsilon^2 \longrightarrow n < \frac{n(n-1)}{2}\epsilon^2 = \binom{n}{2}\epsilon^2 < \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\epsilon^2 = (1+\epsilon)^n$$

stąd mamy

$$0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \epsilon \text{ dla } n > n_0 = n_0(\epsilon)$$

a więc ostatecznie dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ że jeśli $n > n_0$ to

$$|\sqrt[n]{n} - 1| < \epsilon,$$

co jest równoważne że $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Zachodzi następujące

Twierdzenie 0.3.1 *Jeśli ciąg ma granicę, to ma jedyną*

Dowod. *Niech ciąg będzie zbieżny do dwóch liczb $g_1, g_2 \in \mathbb{R}$, załóżmy więc, że $|g_1 - g_2| = \epsilon$. Wtedy istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $n > n_0$ to $|a_n - g_i| < \frac{\epsilon}{2}$, a więc*

$$\epsilon = |g_1 - g_2| \leq |a_n - g_1| + |a_n - g_2| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

co daje sprzeczność. ■

Twierdzenie 0.3.2 (Warunek Cauchy'ego) *Ciąg a_n jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m > n_0)\ |a_n - a_m| < \epsilon.$$

Dowod. *Dowód w jedną stronę jest prawie oczywisty, bo mamy*

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - g| + |a_m - g| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

dla pewnej liczby $n_0 \in \mathbb{N}$ i każdego $n > n_0$.

Natomiast w drugą stronę, z naszego warunku (kładąc $\epsilon = 1$) dostajemy ograniczoność naszego ciągu. Więc zbiór

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} :\ |\{n \in \mathbb{N} :\ a_n > x\}| = \aleph_0 \right\}$$

jest niepusty i ograniczony z góry, więc ma kres górny $g = \sup A \in \mathbb{R}$. Udowodnimy, że $g = \lim_{n\to\infty} a_n$. Niech $\epsilon > 0$ będzie dowolną dodatnią liczbą rzeczywistą, to wtedy na mocy kraesu górnego zbioru A, zbiór

$$A_\epsilon = \left\{ n \in \mathbb{N} :\ g + \epsilon \leq a_n \right\}$$

jest skończony, więc istnieje $n_0 \geq \max A_\epsilon$, że dla $n > n_0$ $a_n < g + \epsilon$. Pokażemy teraz, że istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ $n > n_0$ to $g - \epsilon < a_n$. Gdyby tak nie było, to

$$\left\{ n \in \mathbb{N} :\ a_n \leq g - \epsilon \right\}$$

byłby nieskończony, ale $g - \frac{\epsilon}{2} < g$, to istnieje również nieskończenie wiele wyrazów ciągu a_n, że $g - \frac{\epsilon}{2} < a_n$. Jeśli $n_0 \in \mathbb{N}$ jest dowolne, to istnieje takie $m, n > n_0$ że $a_m < g - \epsilon$ oraz $g - \frac{\epsilon}{2} < a_n$, to wtedy

$$a_n - a_m \geq g - \frac{\epsilon}{2} - (g - \epsilon) = \frac{\epsilon}{2}$$

a stąd otrzymujemy sprzeczność z naszym warunkiem Cauchy'ego ■

Definicja 0.3.3 (Ciąg ograniczony) *Niech będzie dany ciąg liczbowy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, to powiemy że jest on*

ograniczony z góry: *gdy* $(\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \leq M$,

ograniczony z dołu: *gdy* $(\exists m \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})\ m \leq a_n$,

ograniczony: *gdy jednocześnie jest ograniczony z góry i jest ograniczony z dołu.*

Oczywiście mamy następujący fakt

Fakt 0.3.1 *Ciąg liczbowy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony wtedy i tylko wtedy gdy*

$$(\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})\ |a_n| \leq M.$$

Przykład 0.3.3 *Rozważmy dwa ciągi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$,*

- *jeżeli dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ $a_n = \frac{1}{n+1}$, to wtedy $0 \leq \frac{1}{n+1} \leq 1$, więc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony,*
- *jeżeli dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ $b_n = n^2$, to wtedy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $0 \leq b_n$ i dla dowolnej liczby rzeczywistej $M \in \mathbb{R}$ istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie że $M < n_0$ ale mamy również $n \leq n^2$ dla każdej liczby naturalnej n. Więc ostatecznie dla każdej $M \in \mathbb{R}$ istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie że $M < n_0^2 = b_{n_0}$. Reasumując, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem ograniczonym z dołu ale nie jest ciągiem ograniczonym z góry.*

Twierdzenie 0.3.3 (Weierstrassa) *Każdy ciąg ograniczony zawiera podciąg zbieżny.*

Dowod. *Załóżmy, że ciąd $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest oganiczony, weźmy pod uwagę następujący zbiór:*

$$P \equiv \left\{ x \in \mathbb{R} :\ |\{n \in \mathbb{N} :\ a_n < x\}| < \aleph_0 \right\}$$

Zauważmy, że nasz zbiór jest niepusty i nie jest całą prostą $\mathbb{R}$, co wynika z tego, że istnieje takie $m, M \in \mathbb{R}$, że $m < a_n < M$ dla dowowlnego $n \in \mathbb{N}$ (ciąg ograniczony). Niech $x \in P$ i $y < x$, to wtedy prawdziwa jest inkluzja

$$\{n \in \mathbb{N} :\ a_n < y\} \subset \{n \in \mathbb{N} :\ a_n < x\}$$

ale ten większy zbiór jest skończony, więc $\{n \in \mathbb{N} :\ a_n < y\}$ jest skończony a stąd $y \in P$, więc P jest przedziałem ograniczonym z góry. Stąd istnieje kres górny $g \in \mathbb{R}$ zbioru P. Niech $k \in \mathbb{N}$ to $\{n \in \mathbb{N} : a_n < g - \frac{1}{k}\}$ jest skończony oraz $\{n \in \mathbb{N} : a_n < g + \frac{1}{k}\}$ jest nieskończony, więc

$$\left| \left\{ n \in \mathbb{N} :\ \ g - \frac{1}{k} < a_n < g + \frac{1}{k} \right\} \right| = \aleph_0.$$

Więc istnieje $m_k > k$, że $a_{m_k} \in (g - \frac{1}{k}, g + \frac{1}{k})$, ale $k \in \mathbb{N}$ jest dowolne, co kończy dowód naszego twierdzenia. ■

Zachodzi w pewnym sensie twierdzenie odwrotne do poprzedniego.

Twierdzenie 0.3.4 *Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.*

Dowod. *Jeśli ciąg* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *jest zbieżny, to biorąc* $\epsilon = 1 > 0$ *istnieje* $n_0 \in \mathbb{N}$*, że jeśli* $n > n_0$*, to* $g-1 < a_n < g+1$*. Biorąc* $m, M \in \mathbb{R}$ *takie, że* $m+1 = \min\{\min\{a_n \in \mathbb{R} : \ n \leq n_0\}, g-1\}$ *oraz* $M-1 = \max\{\max\{a_n \in \mathbb{R} : \ n \leq n_0\}, g+1\}$ *mamy* $m < a_n < M$ *dla wszystkich* $n \in \mathbb{N}$*.* ■

Twierdzenie 0.3.5 (o trzech ciągach) *Niech dane będą trzy ciągi liczbowe* a_n, b_n, c_n *mające następujące własności:*

1. *istnieje* $n_0 \in \mathbb{N}$ $n > n_0$*, to* $a_n \leq c_n \leq n_n$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

to ciąg c_n *jest też zbieżny oraz*

$$\lim_{n\to\infty} = g.$$

Dowod. *Niech* $\epsilon > 0$ *będzie dowolną dodatnią liczbą rzeczywistą, to istnieje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takie że* $n > n_0$ *to*

$$g - \epsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < g + \epsilon$$

co daje $|c_n - g| < \epsilon$*, dowód jest więc zakończony.* ■

Twierdzenie 0.3.6 (o ciągu monotonicznym i ograniczonym) *Niech ciąg* a_n *jest rosnący (malejący) i ograniczony z góry (z dołu) odpowiednio, to jest zbieżny.*

Dowod. *Ciąg* a_n *jest ograniczony, więc zbiór*

$$\left\{a_n \in \mathbb{R} : \quad n \in \mathbb{N}\right\}$$

jest również ograniczony w $\mathbb{R}$*, więc ma swój kres górny* $g \in \mathbb{R}$*. Więc dla każdego* $\epsilon > 0$ *mamy*

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}\right) \ a_n \leq g < g + \epsilon$$

oraz istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ *takie że,* $g - \epsilon < a_{n_0}$ *i jeśli* $n > n_0$ *to z faktu, że jest rosnący mamy*

$$g - \epsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq g < g + \epsilon$$

co kończy dowód naszego twierdzenia w przypadku gdy a_n *jest rosnący i ograniczony, dla drugiego przypadku dowód jest analogiczny.* ■

Przykład 0.3.4 *Zbadamy zbieżność szeregu*

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Pokażemy, że ciąg e_n jest rosnący:

$$\begin{aligned} e_n =& \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!n^k} \\ =& 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1(1-\frac{1}{n})\ldots(1-\frac{k-1}{n})}{k!} \leq 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1(1-\frac{1}{n+1})\ldots(1-\frac{k-1}{n+1})}{k!} \\ &+ \frac{1(1-\frac{1}{n+1})\ldots(1-\frac{n+1-1}{n+1})}{(n+1)!} = e_{n+1} \end{aligned}$$

Ograniczoność z góry wynika następująco:

$$\begin{aligned} e_n =& 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1(1-\frac{1}{n})\ldots(1-\frac{k-1}{n})}{k!} \\ \leq& 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \leq 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \leq 2 + \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 + 1 = 3. \end{aligned}$$

Korzystając z poprzedniego twierdzenia wnosimy, ze granica ciągu e_n istnieje:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Przykład 0.3.5 *Niech $a_n = \sqrt[n]{n}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Oczywiście nasz ciąg jest ograniczony z dołu $1 \leq a_n$. Pokażemy, że jest malejący od pewnego miejsca. Ciąg jest malejący, gdy $n > n_0 \in \mathbb{N}$ to $a_{n+1} \leq a_n$ a więc*

$$\begin{aligned} \sqrt[n+1]{n+1} \leq \sqrt[n]{n} \longleftrightarrow & (\sqrt[n+1]{n+1})^{n(n+1)} \leq (\sqrt[n]{n})^{n(n+1)} \longleftrightarrow (n+1)^n \leq n^{n+1} \\ \longleftrightarrow & \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq n \longleftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq n, \end{aligned}$$

więc jeśli $n > 3$ to

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3 < n$$

a stąd mamy

$$a_{n+1} = \sqrt[n+1]{n+1} \leq \sqrt[n]{n} = a_n, \quad \text{dla } n > 3.$$

Na podwtawie twierdzenia o zbieżności ciągu ograniczonego i monotonicznego, wnioskujemy, że nasz ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny.

Twierdzenie 0.3.7 (O arytmetyce granic) *Niech ciągi $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ będą ciągami zbieżnymi, wówczas mamy:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

4. *Jeśli* $b_n \neq 0$ *dla* $n \in \mathbb{N}$ *oraz* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$

5. *Jeśli* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > 0$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)^{(\lim\limits_{n\to\infty} b_n)}$.

Dowod. *Wykażemy dla przykładu prawdziwość (3) i (5). Wiemy, że ciąg* a_n *jest zbieżny, więc jest ograniczony: istnieje* $M > 0$ $n \in \mathbb{N}$ *to* $|a_n| < M$ *i* $b_n < M$. *Wybierzmy dowolne* $\epsilon > 0$, *więc istnieje* $n_0 \in \mathbb{N}$, *że jeśli* $n > n_0$ *to*

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2M} \text{ oraz } |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2M}.$$

Stąd mamy

$$|a_n b_n - ab| \leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| = |a_n||b_n - b| + |a_n - a||b| < M\frac{\epsilon}{2M} + \frac{\epsilon}{2m}M = \epsilon,$$

co kończy dowód punktu (3).

Dowód (5). Wpierw pokażemy, że $\lim\limits_{n\to\infty} c^{b_n} = c^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$ *dla dowolnego* $c > 0$. *Zauważmy, że*

$$\lim_{n\to\infty} c^{b_n} = \lim_{n\to\infty} c^{b_n - b} c^b = c^b \lim_{n\to\infty} c^{b_n - b} = c^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} \lim_{n\to\infty} c^{b_n - b}.$$

Oczywiście $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - b) = 0$. *Pokażemy, że jeśli* $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$ *to* $\lim\limits_{n\to\infty} c^{d_n} = 1$. *Możemy założyć wpierw, że* $c > 1$. *Niech* $\epsilon > 0$, *wtedy istnieje* $n_0 \in \mathbb{N}$, *że jeśli* $n \geq n_0$ *to*

$$1 \leq c^{\frac{1}{n_0}} < 1 + \epsilon, \text{ oraz } |d_n| < \frac{1}{n_0},$$

więc

$$\frac{1}{1+\epsilon} \leq c^{d_n} < c^{\frac{1}{n_0}} < 1 + \epsilon.$$

Mamy więc $\lim\limits_{n\to\infty} c^{d_n} = 1$ *a stąd mamy* $\lim\limits_{n\to\infty} c^{b_n} = c^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$. *Jeśli* $c \in (0,1)$ *to* $\frac{1}{c} > 1$ *i wtedy*

$$\lim_{n\to\infty} c^{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\frac{1}{c})^{b_n}} = \frac{1}{(\frac{1}{c})^b} = c^b = c^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

Niech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$ *i niech* $0 < \epsilon$ *jest takie, że* $0 < a - \epsilon$, *to*

$$(a - \epsilon)^{b_n} < a_n^{b_n} < (a + \epsilon)^{b_n}.$$

Niech $S = \{x \in \mathbb{R} : \ \exists (k_n)_{n=1}^{\infty} \lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n}^{b_{k_n}} = x\}$ *będzie zbiorem punktów skupienia ciągu* $a_n^{b_n}$*, to wtedy dla każdego* $\epsilon > 0$ *i każdego* $x \in S$ *istnieje podciąg ciągu* $a_n^{b_n}$ *zbieżny do* $x \in S$ *a wtedy*

$$(a-\epsilon)^b = \lim_{n\to\infty}(a-\epsilon)^{b_{k_n}} \leq \lim_{n\to\infty} a_{k_n}^{b_{k_n}} = x \leq \lim_{n\to\infty}(a+\epsilon)^{b_{k_n}} = (a+\epsilon)^b.$$

Więc ostatecznie dla każdego $\epsilon > 0$ *mamy:*

$$S \subset ((a-\epsilon)^b, (a+\epsilon)^b).$$

Niech $\epsilon_n := \frac{a}{n}$ *dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ *to wtedy*

$$\lim_{n\to\infty}(a+\epsilon_n)^b = a^b \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\epsilon_n}{a}\right)^b = a^b \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{\frac{b}{n}} < a^b \lim_{n\to\infty} 3^{\frac{b}{n}} = a^b \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^b} = a^b 1 = a^b.$$

Podobnie

$$\lim_{n\to\infty}(a-\epsilon_n)^b = a^b \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\epsilon_n}{a}\right)^b = a^b \lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^{\frac{b}{n}} > a^b \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{b}{n}} = a^b \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^b}} = a^b.$$

Stąd ostatecznie mamy

$$\emptyset \neq S \subset \bigcap_{\epsilon>0}[(a-\epsilon)^b, (a+\epsilon)^b] \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}}[(a-\epsilon_n)^b, (a+\epsilon_n)^b] = \{a^b\}.$$

Więc zbiór punktów skupienia ciągu $a_n^{b_n}$ *jest jednoelementowy* $S = \{a^b\}$*, co dowodzi, że* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b$*, co kończy dowód p-ktu 5-tego.* ■

Twierdzenie 0.3.8 *Jeśli ciąg* $\lim\limits_{n\to\infty} = g \in \mathbb{R}$*, to*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} = g$*,*
2. *jeśli* $a_n \geq 0$ *to* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_n} = g$*.*

Dowod. *Pokażemy punkt (1), zakładając zbieżność ciągu* a_n*. Niech* $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$*, będzie dowolnę liczbą rzeczywistą dodatnią, to isnieje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *taka, że* $n > n_0$ *to* $|a_n - g| < \epsilon$*. Wtedy mamy*

$$\begin{aligned} 0 \leq \left|\frac{\sum_{i=1}^{n} a_n}{n} - g\right| &= \left|\frac{\sum_{i=1}^{n_0} a_i}{n} + \frac{\sum_{i=n_0+1}^{n} a_n - g}{n}\right| \\ &\leq \left|\frac{\sum_{i=1}^{n_0} a_i}{n}\right| + \left|\frac{\sum_{i=n_0+1}^{n}(a_n - g)}{n}\right| \leq \left|\frac{\sum_{i=1}^{n_0} a_i}{n}\right| + \frac{(n-n_0)\epsilon}{n} \\ &= \left|\frac{\sum_{i=1}^{n_0} a_i}{n}\right| + \frac{n-n_0}{n}\epsilon. \end{aligned}$$

Przechodząc do granicy mamy

$$0 \le \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\sum_{i=1}^{n} a_n}{n} - g \right| \le \lim_{n\to\infty} \left(\left| \frac{\sum_{i=1}^{n_0} a_i}{n} \right| + \frac{n-n_0}{n}\epsilon \right) = 0 + \epsilon = \epsilon,$$

co kończy dowód częsci pierwszej, bo $\epsilon > 0$ było dowolne. Drugą część twierdzenia dowodzi się analogicznie. ■

Twierdzenie 0.3.9 *Mamy dwa następujące zdania:*

1. *Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} - a_n = g$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = g$.*
2. *Jeśli $a_n > 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}_n = g$.*

Dowod. *Jeśli spełnione jest załozenie (1), to biorąc $b_n = a_n - a_{n-1}$ dla $n > 1$ oraz $b_1 = a_1$ i $a_0 = 0$ to wtedy z założenia $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = g$ więc z poprzedniego Twierdzenia mamy:*

$$g = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} b_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i - a_{i-1}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_0}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}.$$

Podobnie dowodzimy drugiego punktu (2), biorąc za $c_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ dla $n > 1$ oraz $c_1 = a_1$. To wtedy $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = g$, więc z poprzedniego twierdzenia mamy

$$g = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} c_i} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}_n,$$

co kończy dowód. ■

Przykład 0.3.6 *Niech $a_n = \sqrt[n]{n}$, to jesłi $b_n = n$ dla $n \in \mathbb{N}$ to wtedy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{b_{n-1}} = 1$, więc z poprzedniego twierdzenia mamy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, czyli*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Zadania: ciągi

Zadanie 9 *Proszę zbadać, czy następujące ciągi są ograniczone:*

a) $a_n = \sqrt[n]{n}$; *b)* $b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$; *c)* $c_n = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+n}$; *d)* $d_0 = 1 \wedge d_{n+1} = \sqrt{2 + d_n}$.

Zadanie 10 *Proszę zbadać, czy następujące ciągi są monotoniczne od pewnego miejsca:*

a) $a_n - \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{n}$; *b)* $b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$; *c)* $c_n = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+n}$;

d) $d_0 = 1 \wedge d_{n+1} = \sqrt{2 + d_n}$; *e)* $e_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}$ *f)* $f_n = \frac{n!}{n^n}$ *g)* $g_n = \sqrt[n]{n}$.

Zadanie 11 *Korzystajac z twierdzenia o ciągu ograniczonym i monotonicznym, proszę uzasadnić istnienie granic podanych ciągów a następnie je wyznaczyć:*

$$a)\ a_n = \frac{100^n}{n!};\quad b)\ b_0 = \sqrt{2} \wedge b_{n+1} = \sqrt{2 + b_n};\quad c)\ c_0 = 1 \wedge c_{n+1} = \frac{1}{1 + c_n}.$$

Zadanie 12 *Niech $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ bedzie dodatnią liczbą naturalną oraz dodatni ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, taki że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Proszę pokazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$.*

Zadanie 13 *Niech $x \in X^{\mathbb{N}}$ będzie ciągiem w przestrzeni metrycznej (X, d). Proszę udowodnić następujacy fakt:*

$$(\forall y \in X)(x \textit{jest zbieżny do } y \longleftrightarrow \textit{każdy podciag } x \textit{ jest zbieżny do } y).$$

Zadanie 14 *Korzystając z definicji granicy ciągu liczbowego, prosze uzasadnić że:*

$$a)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1-3n}{1+n} = -3;\quad b)\ b > 0 \longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b} = 1;\quad c)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n+1} = 0;\quad d)\ \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

Zadanie 15 *Korzystajac z twierdzenia o arytmetyce granic, proszę obliczyć granice następujacych ciągów:*

$$\frac{n^2 - 3n^3 + n^4}{n^4 - n^3 + n + 1};\quad \frac{1 + 2 + \ldots + n}{\sqrt{9n^4 + 1}};\quad \sqrt{n^2 + n} - n;\quad \frac{(\sqrt[3]{n} + 1)^{33}}{(\sqrt{n} + 1)^{22}}.$$

Zadanie 16 *Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach, proszę oliczyć granice następujacych ciagów:*

$$\sqrt[n]{2^n + 3^n + 5^n};\quad \frac{2 + n \cdot \sin n}{n^2 + 1};\quad \frac{[\sqrt{2} \cdot n]}{n};\quad \sqrt[n]{n};\quad \frac{2}{\sqrt{4^n + 2}} + \ldots + \frac{2^n}{\sqrt{4^n + 2^n}}.$$

Tutaj mamy $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{Z})([x] = n \longleftrightarrow n \leq x < n + 1)$.

Zadanie 17 *Proszę wyznaczyć granice podanych ciągów liczbowych:*

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n;\quad \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{3n};\quad \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{2n+1}.$$

Zadanie 18 *Korzystajac z definicji granicy niewłaściwej ciągiu liczbowego, prosze udowodnić, że:*

$$\lim_{n\to\infty} (2^n - 5) = \infty;\quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+1} = \infty;\quad \lim_{n\to\infty} (3 - \log_2 n) = -\infty.$$

Zadanie 19 *Korzystając z twierdzenia o dwóch ciagach, proszę wyznaczyć granice niewłaściwe podanych ciągów:*

$$(2 \cdot \cos n - 8) \cdot n^2;\quad \frac{1}{\sqrt{1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Zadanie 20 *Prosze udowodnic:*

$(\forall a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}})(\forall x \in \mathbb{R})(x$ *jest p-ktem skupienia ciągu* $a \longleftrightarrow$ *istnieje podciąg ciągu* a *zbieżny do* $x)$.

Zadanie 21 *Proszę podac przykłady ciągów liczbowych, dla których podane zbiory są zbiorami punktów skupienia tych ciągów:*

$$\{0, \infty\}; \quad \left\{\frac{1}{n+1} :\ n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}; \quad \mathbb{Z} \cup \{-\infty, \infty\}.$$

Zadanie 22 *Proszę udowodnić, że nie istnieje ciąg liczbowy, którego zbiorem punktów skupienia jest zbiór liczb wymiernych* $\mathbb{Q}$.

Zadanie 23 *Proszę wyznaczyć granice górne oraz granice dolne podanych ciągów liczbowych:*

$$(-1)^n; \quad \sin\frac{n\pi}{4} + \cos\frac{n\pi}{3}; \quad 3 \cdot (-1)^{[\frac{n}{2}]} + 5 \cdot (-1)^{[\frac{n}{3}]}.$$

Zadanie 24 *Prosze udowodnić:*

$$(\forall x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}})(\forall g \in \mathbb{R})(\lim_{n\to\infty} a_n = g \longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}\sup a_n = g = \lim_{n\to\infty}\inf a_n).$$

Zadanie 25 * *Niech* x_n *będzie liczbą zer na końcu liczby* $n!$ *(w układzie dziesiętnym). Czy istnieje granica ciągu* $y_n = \frac{x_n}{n}$ *dla liczb naturalnych* $n \in \mathbb{N}$*, takich że* $n > 0$ *?*

0.4 Szeregi liczbowe

W tym rozdziale zajmiemy się pojęciem szeregów liczbowych i iloczynów nieskończonych. Zaczniemy więc od definicji szeregu liczbowego.

Definicja 0.4.1 (Szereg liczbowy) *Niech dany będzie ciąg liczbowy $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, niech $N \in \mathbb{N}$ to N–tą sumą częściową nazywamy wyrazenie*

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n.$$

Szereg liczbowy ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny $\longleftrightarrow$ ciąg sum częściowych $(S_N)_{N=1}^{\infty}$ jest zbieżny. Wówczas oznaczamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n.$$

Natychmiast zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 0.4.1 (Cauchy'ego) *Szereg ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m > n_0) \quad m < n \longrightarrow \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \epsilon.$$

Dowod. *Prosta konsekwencja twierdzenia Cauchy'ego o ciągu sum częściowych S_N. Mianowicie, niech $\epsilon > 0$, wtedy istniaje liczba naturalna $n_0 \in \mathbb{N}$ taka że dla dowolnych liczb $m, n > n_n 0$ takich że jeżeli $m < n$, to wtedy*

$$\epsilon > |S_n - S_m| = |a_0 + \ldots + a_n - (a_0 + \ldots + a_m)| = |a_{m+1} + \ldots + a_n|.$$

■

Twierdzenie 0.4.2 (warunek konieczny) *Jeśli szereg ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny, to*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Dowod. *Załóżmy że ciąg sum częściowych S_N ciągu a_n jest zbieżny do S, to wtedy*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

■

Twierdzenie 0.4.3 (warunek konieczny) *Jeśli szereg ciągu malejącego $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny, to*

$$\lim_{n\to\infty} n a_n = 0.$$

Dowod. *Niech* $\epsilon > 0$, *to istnieje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takie że* $n, m > n_0$ *to dla* $n > n_0$

$$\epsilon > \left| \sum_{k=n_0}^{n} a_k \right| \geq (n - n_0)a_n \geq 0,$$

oczywiście z poprzedniego twierdzenia wynika, że $lim_{n\to\infty} n_0 a_n = 0$, *więc*

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq \epsilon.$$

Natomiast $\epsilon > 0$ *jest dowolne, więc mamy tezę naszego twierdzenia.* ■

Przykład 0.4.1 *Jeśli szereg*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

byl zbieżny, to korzystaiąc z tego że $a_n = \frac{1}{n}$ *jest malejący, mielibyśmy z poprzedniego twierdzenia następującą równość:*

$$0 = \lim_{n\to\infty} na_n = \lim_{n\to\infty} n\frac{1}{n} = 1,$$

co jest nieprawdą.

Twierdzenie 0.4.4 (Kryterium porównawcze) *Niech będą dane dwa szeregi o wyrazach dodatnich, takich, że istnieje* $n_0 \in \mathbb{N}$, *że dla* $n > n_0$ *mamy* $0 \leq a_n \leq b_n$, *to wtedy*

1. *jeśli szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jest zbieżny, to* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest również zbieżny,*
2. *jeśli szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny to* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jest rozbieżny.*

Dowod. *Niech dany szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *będzie zbieżny, to wtedy dla dowolnego* $\epsilon > 0$ *istnieje* $n_0 \in \mathbb{N}$, *że dla dowolnego* $n, m > 0$ *mamy* $|\sum_{k=m+1}^{k} b_k| < \epsilon$, *więc*

$$|\sum_{k=m+1}^{k} a_k| = \sum_{k=m+1}^{k} a_k \leq \sum_{k=m+1}^{k} b_k = |\sum_{k=m+1}^{k} b_k| < \epsilon$$

co wobec twierdzenia Cauchy'ego wnosimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny. Drugie zdanie wynika z pierwszego, co kończy dowód.* ■

Twierdzenie 0.4.5 (Kryterium ilorazowe) *Niech będą dane dwa ciągi dodatnie* $(a)_{n=1}^{\infty}, (b)_{n=1}^{\infty}$, *takie że* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = q \in (0, \infty)$, *to wtedy*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ jest zbieżny (rozb) wtedy i tylko wtedy gdy } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ jest zbieżny (rozb).}$$

Dowod. *Załóżmy, że szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny, niech* $\epsilon > 0$ *takie że* $0 < q - \epsilon$, *to istnieje* $n_0 \in \mathbb{N}$, *że* $n > n_0$ *to*

$$0 < q - \epsilon < \frac{a_n}{b_n} < q + \epsilon,$$

więc

$$0 < (q - \epsilon)b_n < a_n < (q + \epsilon)b_n$$

więc z kryterium porównawczego mamy zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} (q - \epsilon)b_n$ *a stąd mamy zbieżność szeregu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *co zakończyło dowód naszego twierdzenia.* ■

Twierdzenie 0.4.6 (o zagęszczaniu) *Niech będzie dany ciąg liczbowy spełniający warunki:*

1. *ciąg* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *jest malejący,*
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ *jest zbieżny.*

Dowod. *Niech dany szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *będzie zbieżny, to wtedy dla dowolnego* $\epsilon > 0$ *istnieje* $n_0 \in \mathbb{N}$, *że dla dowolnego* $n, m > 0$ *mamy* $|\sum\limits_{k=m+1}^{k} a_k| < \epsilon$, *więc*

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=2^{k-1}+1}^{2^k} 22^{k-1} a_{2^k} \leq 2 \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=2^{k-1}+1}^{2^k} a_i = 2 \sum_{k=1}^{2^n} a_k$$

szereg większy jest zbieżny więc na podstawie kryterium porównawczego mamy szereg zbieżny który jest mniejszy. i na odwrót:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leq a_1 + \sum_{k=1}^{2^n} a_k = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}} a_k \leq \sum_{i=0}^{n-1} 2^i a_{2^{i+1}} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} 2^{i+1} a_{2^{i+1}},$$

co kończy dowód twierdzenia. ■

Twierdzenie 0.4.7 *Jeśli szereg* $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ *jest zbieżny, to* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *zbieżny jest również.*

Dowod. *Jeśli* $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ *jest zbieżny, to dla dowolnego* $\epsilon > 0$ *istnieje* $n_0 \in \mathbb{N}$, *że dla dowolnego* $n, m > n_0$ *mamy*

$$\left|\sum_{k=n}^{m}|a_k|\right| < \epsilon,$$

więc

$$\left|\sum_{k=n}^{m}a_k\right| \leq \sum_{k=n}^{m}|a_k| = \left|\sum_{k=n}^{m}a_k\right| < \epsilon,$$

co kończy dowód naszego twierdzenia. ■

Twierdzenie 0.4.8 (Kryterium Cauchy'ego) *Niech będzie dany ciąg* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *to wtedy:*

1. *Jeśli* $\lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{|a_n|} = q < 1$ *to* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *jest zbieżny.*
2. *Jeżeli* $\{n \in \mathbb{N}: \ 1 \leq \sqrt[n]{|a_n|}\}$ *jest nieskończony, to* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *jest rozbieżny. W szczególności, jeśli* $\lim_{n\to\infty}\inf\sqrt[n]{|a_n|} = q > 1$, *to* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *jest rozbieżny.*

Dowod. *Niech* $\epsilon > 0$ *będzie taką liczbą rzeczywistą dodatnią, że spełniony jest warunek* $q + \epsilon < 1$ *to isnieje* $n_0 \in \mathbb{N}$, *że* $n \geq n_0$, *to* $\sqrt[n]{|a_n|} < q_0 := q + \epsilon < 1$ *więc* $|a_n| < {q_0}^n$ *a stąd mamy dla dowolnego* $M > n_0$

$$\left|\sum_{k=n_0}^{M}a_k\right| \leq \sum_{k=n_0}^{M}|a_k| \leq \sum_{k=n_0}^{M}{q_0}^k < \sum_{k=n_0}^{\infty}{q_0}^k = {q_0}^{n_0}\frac{1}{1-q_0}$$

co dowodzi przypadku pierwszego.

W drugim przypadku, biorąc za $q' \in \mathbb{R}$ *takie że* $1 < q' < q$ *to istnieje takie* $n_0 \in \mathbb{N}$, *że dla nieskończenie wielu* n $1 \leq \sqrt[n]{|a_n|}$. *Więc dla nieskończenie wiele liczb naturalnych* $n \in \mathbb{N}$ *may* $1 \leq |a_n|$. *To zaś implikuje, że nieprawdą jest* $\lim_{n\to\infty}a_n = 0$ *a więc z warunku koniecznego zbieżności szeregu, rozważany szereg* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *jest rozbieżny.* ■

Twierdzenie 0.4.9 (Kryterium D'Alamberta) *Niech będzie dany ciąg* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *oraz* $a_n \neq 0$ *dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ *to wtedy:*

1. *Jeśli* $\lim_{n\to\infty}\sup|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = q < 1$ *to* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *jest zbieżny.*

2. *Jeżeli istnieje liczba $n_0 \in \mathbb{N}$ taka, że dla dowolnego $n > n_0$ zachodzi $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geq 1$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny. W szczególności, jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} \inf |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = q > 1$, to $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.*

Dowod. *Wybierzmy $q_0 \in \mathbb{R}$ takie że $q < q_0 < 1$, więc istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n > n_0$ $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < q_0 < 1$. Więc dla $n > n_0$ mamy*

$$\left|\frac{a_n}{a_{n_0}}\right| = \prod_{k=n_0}^{n-1} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < {q_0}^n$$

a stąd

$$\left|\sum_{k=n_0}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=n_0}^{n} |a_k| < \sum_{k=n_0}^{n-1} {q_0}^k a_{n_0} \leq a_{n_0} {q_0}^{n_0} \sum_{k=0}^{\infty} {q_0}^k = \frac{1}{1-q_0}$$

co dowodzi pierwszego zdania.

W drugim przypadku, jeżeli istnieje liczba naturalna n_0 taka że dla dowolnego $n \geq n_0$ $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geq 1$. Wtedy dla dowolnego $n > n_0$ mamy

$$|a_{n_0+1}| \leq |a_{n_0+2}| \leq \ldots \leq |a_n|.$$

Więc nieprawdą jest że $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ a stąd $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Więc szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

■

0.5 Iloczyny nieskończone

Definicja 0.5.1 *Niech dany będzie ciąg liczbowy $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, to ciąg iloczynów częściowych $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ definiujemy jako:*

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

Jeśli ciąg iloczynów częściowych p_n jest zbieżny do $p \in \mathbb{R}$, to granicę tę nazywamy iloczynem nieskończony ciągu a_n i oznaczamy:

$$p = \prod_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

Jeśli $p = 0$ lub $p = \infty$, to iloczyn taki nazywamy rozbieżnym iloczynem nieskończonym.

Twierdzenie 0.5.1 (Cauchy'ego) *Niech będzie dany ciąg liczbowy $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, to iloczyn nieskończony $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy spełniony jest warunek:*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \;\; n > m > n_0 \quad \longrightarrow \quad \left|\prod_{k=m}^{n} a_k - 1\right| < \epsilon.$$

Dowod. *Nich nasz iloczyn będzie zbieżny do $p \in \mathbb{R}$ to oczywiście istnieją takie $d, g \in \mathbb{R}$, że $0 < d < p_n < g$ dla $n \in \mathbb{N}$, weźmy dowolną liczbe $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$, to instnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ $n, m > n_0$, to $|p_n - p_m| < d\epsilon$ a stąd*

$$\left|\frac{p_n}{p_m} - 1\right| < \frac{\epsilon d}{p_m} < \frac{\epsilon d}{d} = \epsilon,$$

więc dowód w jedną stronę został zakończony.

Załóżmy, że teraz spełniony jest warunek w twierdzeniu, to biorąc za $\epsilon = 1$ mamy

$$0 = \epsilon - 1 < \frac{p_n}{p_m} < \epsilon + 1 = 2 \text{ dla } n > m = n_0 + 1 > n_0.$$

w takim razie ciąg $p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$ jest ograniczony przez pewną liczbę $M \in \mathbb{R}$. Więc z naszego założenia wynika, że jeśli $\epsilon > 0$ jest dowolne, to iistnieje takie $n_0 \in \mathbb{N}$, że dla dowolnego $n > m > n_0$ zachodzi

$$\left|\frac{p_n}{p_m} - 1\right| < \frac{\epsilon}{M},$$

a stąd mamy

$$\left|p_n - p_m\right| < \frac{\epsilon p_m}{M} < \frac{\epsilon M}{M} = \epsilon.$$

wieć z twierdzenia Cauchy'ego o zbieżności ciągów wnosimy, że ciąg p_n jest zbieżny do pewnego $p \in \mathbb{R}$. Pozostało nam do udowodnienia, że $p \neq 0$. Gdyby tak niebyło, to istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ to

$$\left|\frac{p_n}{p_{n_0+1}} - 1\right| < \frac{1}{2},$$

a stąd mamy dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ większego od n_0

$$\frac{1}{2} < \frac{p_n}{p_{n_0+1}},$$

oraz

$$\frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} < \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{p_{n_0+1}} = \frac{\lim_{n\to\infty} p_n}{p_{n_0+1}} = 0$$

co prowadzi do sprzeczności. ■

Twierdzenie 0.5.2 (warunek konieczny zbieżności iloczynu) *Jeśli iloczyn nieskończony $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.*

Dowod. *Dowód tego twierdzenia jest elementarny.*■

Twierdzenie 0.5.3 *Niech będzie dany ciąg liczbowy $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ o wyrazach dodatnich. To wtedy iloczyn nieskończony $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + b_n)$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny.*

Dowod. *Niech* $p_n = \prod_{k=1}^{n}(1+b_k)$ *i* $s_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$. *Zauważmy, że*

$$1 + s_n \leq p_n \leq \prod_{k=1}^{n} e^{b_k} = e^{\sum_{k=1}^{n} b_k},$$

więc p_n *jest ograniczony wtedy i tylko wtedy gdy* s_n *jest ograniczony. Oczywiście oba ciągi* s_n, p_n *są rosnęce, więc ze zbieżności jednego ciągu wynika zbieżność drugiego. Pozostało udowodnić, że* $\lim_{n\to\infty} p_n \neq 0$, *ten fakt natychmiast wynika z nierówności*

$$1 \leq 1 + s_n \leq p_n \quad dla \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Dowód twierdzenia został zakończony. ■

0.6 Szeregi potęgowe

Definicja 0.6.1 *Niech będzie dany ciąg liczbowy* $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *to*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

nazywamy szeregiem potęgowym o środku x_0 *(o ile jest zbieżny w* x*).*

Definicja 0.6.2 (zbieżność jednostajna) *Niech* $f_n : D \mapsto \mathbb{R}$ *będzie ciągiem funkcyjnym na* $D \subset \mathbb{R}$ *oraz* $f : D \mapsto \mathbb{R}$ *to*

$$f_n \rightrightarrows f \;\; na \; D \longleftrightarrow \forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n > n_0 \; \forall x \in D \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Twierdzenie 0.6.1 *Niech* $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *będzie ciąg liczbowy oraz niech* $q = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}$, *to wtedy*

1. *jeśli* $x \in (-\frac{1}{q}, \frac{1}{q})$ *to* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *jest zbieżny bezwzględnie. Jeśli* $q = 0$, *to* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *jest zbieżny bezwzględnie dla każdego* $x \in \mathbb{R}$,
2. $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \rightrightarrows f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *na* $[-c, c] \subset (-\frac{1}{q}, \frac{1}{q})$,
3. *jeśli* $|x| > \frac{1}{q}$ *to* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *jest rozbieżny.*

Dowod. *1). Niech* $q = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}$, *i niech* $\epsilon > 0$ *będzie dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią, to istnieje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *że dla* $n > n_0$ *mamy* $q + \epsilon > \sqrt[n]{|a_n|}$. *To* $|a_n| < (q + \epsilon)^n$ *dla*

$n > n_0$. *Z drugiej strony wiemy że* $|x| < \frac{1}{q}$ *a więc* $|x(q+\epsilon)| < 1$ *dla pewnego* $\epsilon > 0$. *Mamy więc*

$$\Big|\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n x^n\Big| \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_n x^n| \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{|a_n|}{(q+\epsilon)^n}|x(q+\epsilon)|^n$$
$$< \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |x(q+\epsilon)|^n = \frac{(x(q+\epsilon))^{n_0+1}}{1-x(q+\epsilon)},$$

stąd szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *jest zbieżny bezwzględnie dla* $x \in (-\frac{1}{q}, \frac{1}{q})$.

Dowód 2). Niech $0 \leq c < \frac{1}{q}$ *i* $\epsilon > 0$ *to na mocy* 1) *istnieje* $n \in \mathbb{N}$, *że dla* $k > n$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| c^k < \epsilon$$

a więc dla każdego $x \in [-c, c]$ *mamy*

$$|f_n(x) - f(x)| = \Big|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k\Big| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k x^k| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| c^k < \epsilon$$

co jest równoważne ze zbieżnością jednostajną ciągu sum częściewych $f_n \rightrightarrows f$ *na* $[-a, a]$.

Dowód 3). *Niech* $|x| > \frac{1}{q}$, *to* $q > \frac{1}{|x|}$ *stąd istnieje podciąg* $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ *że*

$$\text{dla } n \in \mathbb{N}\ \sqrt[k_n]{|a_{k_n}|} > \frac{1}{|x|} \longrightarrow |a_{k_n} x^{k_n}| > 1 \longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n x^n \neq 0,$$

więc $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *jest rozbieżny, co kończy dowód naszego twierdzenia.* ■

Wniosek 0.6.1 *Niech* $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *będzie dowolnym ciągiem liczbowym, to wówczas*

1. *Jeśli* $q = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ *istnieje, to dla każdego* $x \in (-\frac{1}{q}, \frac{1}{q})$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *jest zbieżny bezwzględnie,*

2. *Jeśli* $q = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ *istnieje, to dla każdego* $x \in (-\frac{1}{q}, \frac{1}{q})$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *jest zbieżny bezwzględnie.*

Dowod. *Wystarczy zauważyć, że jeśli* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ *istnieje, to* $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ *co dowodzi* 1) *stosując powyższe twierdzenie. Natomiast jeśli* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ *istnieje, to wówczas* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ *i stosujemy* 1). ■

Na podstawie powyższego twierdzenia możemy wprowadzić następującą definicję:

Definicja 0.6.3 (promień zbieżności) *Niech będzie dany szereg potęgowy*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n,$$

to liczbę

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} & gdy \quad \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in (0,\infty) \\ \infty & gdy \quad \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \\ 0 & gdy \quad \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty. \end{cases}$$

nazywamy promieniem zbieżności.

Uwaga 0.6.1 *Jeśli $R \in [0,\infty)$ jest promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ to*

- *szereg jest zbieżny w przedziale (x_0-R, x_0+R)*
- *szereg jest rozbieżny na zbiorze $(-\infty, x_0-R) \cup (x_0+R, \infty)$*
- *w punktach x_0-R i x_0+R zbieżność zależy od szeregu potęgowego.*

Zbiór

$$\left\{x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \text{ jest zbieżny}\right\}$$

nazywamy przedziałem zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$.

Przykład 0.6.1 *Zbadać przedział zbieżności szeregu potęgowego*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(x-3)^n.$$

Tutaj $x_0 = 3$ oraz $a_n = n$, więc

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n}{n+1}\right| = 1.$$

Więc dla $x \in (3-1, 3+1) = (2,4)$ szereg jest zbieżny. Oczywiście dla $x=2$ i $x=4$ mamy rozbieżność szeregów

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(-1)^n \text{ oraz } \sum_{n=0}^{\infty} n,$$

więc ostatecznie $(2,4)$ jest przedziałem zbieżności naszego szeregu potęgowego.

Rozdział 1

Funkcje rzeczywiste

1.1 Granice funkcji

Kluczowym pojęciem w analizie matematycznej jest pojęcie granicy funkcji rzeczywistej. Zaczynamy więc nasz rozdział od definicji.

Definicja 1.1.1 (Punkt skupienia zbioru) *Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie niepustym podzbiorem prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$. Ponadto niech $x_0 \in \mathbb{R}$ będzie liczba rzeczywistą, to x_0 jest punktem skupienia zbioru A wtedy itylko wtedy gdy*

$$\forall \delta > 0 \;\; A \cap ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset.$$

Przykład 1.1.1 *Liczba 0 jest punktem skupienia zbioru $(0,1)$ a liczba 2 już nim nie jest. Podobnie 0 jest punktem skupienia zbioru $\{\frac{1}{n+2} : n \in \mathbb{N}\}$ a 1 już nie. Natomiast kazda liczba rzeczywista jest punktem skupienia zbioru wszystkich liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ (patrz zadanie $5^\star$ liczby rzeczywiste).*

Definicja 1.1.2 (Granica funkcji w sensie Cauchy'ego) *Niech $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia zbioru D. Niech bedzie dana funkcja rzeczywista $f : D \mapsto \mathbb{R}$ i $g \in \mathbb{R}$ jest liczbą rzeczywistą, to*

$$(\lim_{x \to x_0} f(x)^{(C)} = g) \longleftrightarrow (\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \setminus \{x_0\} \;\; |x - x_0| < \delta \longrightarrow |f(x) - g)| < \epsilon).$$

Istnieje również równoważna definicja granicy funkcji pochodząca od Heinego:

Definicja 1.1.3 (Granica funkcji w sensie Heinego) *Niech $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia zbioru D. Niech bedzie dana funkcja rzeczywista $f : D \mapsto \mathbb{R}$ i $g \in \mathbb{R}$ jest liczbą rzeczywistą, to*

$$(\lim_{x \to x_0} f(x)^{(H)} = g) \longleftrightarrow (\forall y \in (D \setminus \{x_0\})^{\mathbb{N}} \;\; \lim_{n \to \infty} y(n) = x_0 \longrightarrow \lim_{n \to \infty} f(y(n)) = g).$$

Obie definicje są równoważne i do niektórych celów wygodniej używać definicję w sensie Cauchy'ego w do innych w sensie Heinego,

Twierdzenie 1.1.1 (ZF+AC) *Obie definicje granicy funkcji w punkcie są równoważne.*

Dowod. *Załóżmy, że definicja Cauchy'ego jest spełniona dla funkcji f w $x_0 \in \mathbb{R}$, pokażemy, że funkcja spełnia definicję granicy w x_0 w sensie Heinego. Tak więc niech będą spełnione założenia w definicji ciągłości w sensie Heinego, tzn. $(y(n))_{n\in\mathbb{N}}$ jest dowolnym ciągiem zbieżnym do x_0, niech $\epsilon > 0$, to istnieje $\delta > 0$ $|x - x_0| < \delta$, to $|f(x) - g| < \epsilon$. To wtedy istnieje takie $n_0 \in \mathbb{N}$, że jeśli $n > n_0$ to $|y(n) - x_0| < \delta$ ($\lim\limits_{n\to\infty} y(n) = x_0$), to dla każdego $n > n_0$ $|f(y(n)) - g| < \epsilon$ co jest równoważne, że $\lim\limits_{n\to\infty} f(y(n)) = g$.*

Pozostał nam dowód w drugą stronę, tzn definicja Cauchy'ego wynika z definicji Heinego. W tym celu posłużymy się aksjomatem wyboru AC (axiom of choice). Załóżmy, że twierdzenie jest nieprawdziwe, tzn spełniona jest definicja Heinego i jednocześnie fałszywa jest definicja granicy Cauchy'ego tj.

$$(\exists\epsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\exists x \in \mathbb{R})\ \ |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - g| \geq \epsilon. \qquad (\ *)$$

Utwórzmy rodzinę zbiorów $\mathcal{F} = \{F_n \subset D :\ n \in \mathbb{N}\}$

$$F_n = \left\{x \in D :\ \ |x - x_0| < \frac{1}{n} \wedge |f(x) - g| \geq \epsilon\right\},$$

ϵ jest ustalone i nie zależy od n, to z własności $(*)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ F_n jest niepusty $F_n \neq \emptyset$. Wybierzmy z każdego F_n po jednym elemencie $y(n)$ (mogą sie elementy $y(n)$ powtarzać), co w terminologii teorii zbiorów znaczy, że istnieje funkcja wyboru $y \in (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n)^{\mathbb{N}}$ taka że dla każdego $n \in \mathbb{N}$, $y(n) \in F_n$. Więc z definicji naszej rodziny $\mathcal{F}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ $|y(n) - x_0| < \frac{1}{n}$ i jednocześnie $|f(y(n)) - g| \geq \epsilon$, ale oczywiście $\lim\limits_{n\to\infty} y(n) = x_0$ więc na mocy definicji Heinego $\lim\limits_{n\to\infty} f(y(n)) = g$. Stąd istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$, że $|f(y(n_0)) - f(x_0)| < \epsilon$, tak więc w końcu mamy dla naszego $n_0 \in \mathbb{N}$

$$\epsilon \leq |f(y(n)) - g| < \epsilon, \ \ \longrightarrow \epsilon < \epsilon,$$

co prowadzi do sprzeczności, tak więc definicja Cauchy'ego ciągłości funkcji wynika z definicji granicy funkcji w sensie Heinego. ■

Wobec powyższego twierdzenia granicę funkcji f w punkcie x_0 będziemy oznaczać przez $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Za sprawą definicji granicy funkcji w sensie Heinego wiele twierdzeń dotyczących granicy ciągów przenosi się na twierdzenia o granicy funkcji w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 1.1.2 *Istnieje co najwyżej jedna liczba rzeczywista, która jest granicą funkcji f w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$.*

Twierdzenie 1.1.3 (O trzech funkcjach) *Niech będą dane trzy funkcje $f, g, h : D \mapsto \mathbb{R}$ takie że*

- $\exists\delta > 0 \forall x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}\ \ g(x) \leq f(x) \leq h(x)$,

- $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x)$,

to granica funkcji f istnieje w x_0 oraz $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} (g) = \lim_{x\to x_0} h(x)$.

Dowod. *Niech będzie dany ciąg $y \in (D\setminus\{x_0\}^{\mathbb{N}}$ t. że $\lim_{n\to\infty} y_n = x_0$ (tutaj piszemy y_n zamiast $y(n)$). Więc dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$ $y_n \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Więc dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$ $g(y_n) \leq f(y_n) \leq h(y_n)$ oraz z założenia mamy $\lim_{n\to\infty} g(y_n) = a$ i $\lim_{n\to\infty} h(y_n) = a$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}$. Stosując twierdzenie o tzech ciągach mamy $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = a$, natmiast ciag y był wybrany w sposób dowolny. Tak więc $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, co daje tezę naszego twierdzenia.* ■

Twierdzenie 1.1.4 (O arytmetyce granic funkcji) *Niech będą dane funkcje rzeczywiste $f, g : D \mapsto \mathbb{R}$ oraz liczbę rzeczywistą $x_0 \in \mathbb{R}$, takie że $\lim_{x\to x_0} f(x)$, $\lim_{x\to x_0} g(x)$ istnieją. To wtedy mamy:*

1. $\lim_{x\to x_0} (f+g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$,
2. $\lim_{x\to x_0} (f-g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x)$,
3. $\lim_{x\to x_0} (f\cdot g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$,
4. *Jeśli g nie jest równa 0 w żadnym punkcie w pewnym otoczeniu punktu x_0 i $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, to $\lim_{x\to x_0} (\frac{f}{g})(x) = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$,*
5. *Jeśli $f > 0$ w pewnym otoczeniu punktu x_0, to $\lim_{x\to x_0} (f^g)(x) = (\lim_{x\to x_0} f(x))^{\lim_{x\to x_0} g(x)}$.*

Dowod. *Dla przykładu udowodnimy ostatni punkt naszego twierdzenia. Niech $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ i $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$ oraz wybierzmy dowolny ciąg $y \in (D \setminus \{x_0\})^{\mathbb{N}}$ zbieżny do x_0, więc dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$ $f(y_n) > 0$ (piszemy y_n zamiast $y(n)$). Stosując twierdzenie o arytmetyce granic ciągów Tw. 0.3.7 (ostatni punkt), mamy*

$$\lim_{n\to\infty} (f(y_n)^{g(y_n)}) = (\lim_{n\to\infty} f(y_n))^{\lim_{n\to\infty} g(y_n)} = a^b = (\lim_{x\to x_0} f(x))^{\lim_{x\to x_0} g(x)}.$$

Ciąg y został wybrany dowolnie, więc dowód tego punktu twierdzenia jest zakończony. ■

Przykład 1.1.2 *Niech będzie dane $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ to wtedy mamy*

$$\sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x$$

dzieląc te dwie nierówności przez x otrzymujemy

$$\frac{\sin x}{x} \leq 1 \leq \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\sin x}{x \cos x}.$$

Podstawiając za x $-y$, wtedy $y \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ mamy

$$\frac{\sin(-y)}{-y} \leq 1 \leq \frac{\operatorname{tg}(-y)}{-y}.$$

oraz korzystając z nieparzystości funkcji $\sin$ *i* tg *mamy*

$$\frac{\sin y}{y} \leq 1 \leq \frac{\operatorname{tg} y}{y}.$$

więc nieróności w pierwszej linijce zachodzą dla $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\}$. Stąd mamy

$$(\forall x)\ x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\} \longrightarrow \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1,$$

ale $\lim_{x \to x_0} \cos x = 1$ dla $x_0 = 0$, wiec stosując tw o 3 funkcjach mamy

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Twierdzenie 1.1.5 (Granica funkcji złożonej) *Niech $f : D \mapsto \mathbb{R}$ i $g : E \mapsto \mathbb{R}$ będą dwiema rzeczywistymi funkcjami takimi że:*

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = a \wedge \lim_{y \to a} g(y) = b,$
- $\exists \delta > 0 \forall x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \quad f(x) \neq a,$
- $f[D] \subseteq E,$

to granica funkcji $g \circ f$ istnieje w x_0 oraz $\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = b$.

Dowod. *Niech będzie dany dowolny ciąg $x \in (D \setminus \{x_0\})^{\mathbb{N}}$ zbieżny do x_0, to z drugiego założenia, mamy dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$ $f(x(n)) \neq a$, niech będzie dany ciąg $y(n) = f(x(n)) \in E$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ (co jest mozliwe na podstawie trzeciego założenia), tak więc dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$ $y(n) \neq a$. Z pierwszego założenia mamy $\lim_{n \to \infty} g(y(n)) = b$ więc*

$$\lim_{n \to \infty} (g \circ f)(x(n)) = \lim_{n \to \infty} g(f(x(n))) = \lim_{n \to \infty} g(y(n)) = b,$$

co wobec dowolności ciągu x mamy $\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = b$. ■

Przykład 1.1.3 *Obliczyć granicę $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{x - \frac{\pi}{2}}$. Niech $g(y) = \frac{\sin y}{y}$ natomiast $f(x) = \frac{\pi}{2} - x$, to $a = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = 0$, oraz $b = \lim_{y \to a} g(y) = 1$. Więc ostatecznie mamy*

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - x)}{x - \frac{\pi}{2}} = -\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-\sin(x - \frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}} = -\lim_{x \to x - \frac{\pi}{2}} (g \circ f)(x) = -\lim_{y \to 0} g(y) = -b = -1.$$

Zadania: <u>Granice</u>

Zadanie 26 *Proszę wyznaczyć następujące granice funkcji:*

$$a)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x^3-1};\quad b)\ \lim_{x\to\infty}\frac{2^x+3}{5^x+2};\quad c)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\operatorname{tg}^2 x+1}{\operatorname{tg}^2 x+5};$$

Zadanie 27 *Proszę zbadać, czy istnieją granice funkcji:*

$$a)\ \lim_{x\to 0} x\cdot\operatorname{sgn} x;\quad b)\ \lim_{x\to 0} 2^{\frac{1}{x^5}}\quad c)\ \lim_{x\to 5\pi}[3\cdot\sin x];$$

$$d)\ \lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{|x-3|};\quad e)\ \lim_{x\to 1}\frac{|x-1|^3}{x^3-x^2}\quad f)\ \lim_{x\to -1}\operatorname{sgn}[x(1-x^2)].$$

Tutaj $[y]$ *oznacza część całkowitą z rzeczywistego argumentu* $y\in\mathbb{R}$.

Zadanie 28 *Proszę obliczyć granice funkcji:*

$$a)\ \lim_{x\to-\infty} e^{x+\sin^2 x};\quad b)\ \lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\cdot\cos\frac{1}{x^2};\quad c)\ \lim_{x\to\infty}\frac{1+\sin x}{x^2}.$$

$$d)\ \lim_{x\to\infty}\frac{[x\sqrt{8}]}{[x\sqrt{2}]};\quad e)\ \lim_{x\to 0} x^3\cdot\left[\frac{1}{x}\right];\quad f)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{2^{-x}+\sin x}{2^{-x}+\cos x}.$$

Zadanie 29 *Korzystając z twierdzeń o granicach niewłaściwych, proszę wyznaczyć:*

$$a)\ \lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2-3}-x;\quad b)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right);\quad c)\ \lim_{x\to-1}\frac{3x+2}{x^2+2x+1};\quad d)\ \lim_{x\to\infty}(\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+1}).$$

Zadanie 30 *Korzystając z podstawowych granic wyrażeń nieoznaczonych, proszę obliczyć granice funkcji:*

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 5x}{x^2};\quad b)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{2^x};\quad c)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{2^x-1}{4^{\sqrt{x}}-1};\quad d)\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{2x-1}.$$

Zadanie 31 *Proszę wyznaczyć wszystkie asymptoty dla podanych funkcji:*

$$a)\ \frac{x^3+x^2}{x^2-4};\quad b)\ \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}};\quad c)\ \frac{\sin x}{\pi-x};\quad d)\ \frac{\cos(\pi x)}{2^x-8};\quad e)\ \frac{\sqrt{1+x^2}}{x};\quad f)\ \frac{x^3}{(x+1)^2}.$$

1.2 Ciągłość funkcji

Definicja 1.2.1 (Ciągłość funkcji w sensie Cauchy'ego) *Niech będzie dana funkcja rzeczywista* $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ *oraz dany punkt* $x_0 \in (a, b)$*, to funkcja* f *jest ciągła w punkcie* x_0 *wtedy i tylko wtedy:*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}) \ \ |x - x_0| < \delta \longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Definicja 1.2.2 (Ciągłość funkcji w sensie Heinego) *Niech będzie dana funkcja rzeczywista* $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ *oraz dany punkt* $x_0 \in (a, b)$*, to funkcja* f *jest ciągła w punkcie* x_0 *wtedy i tylko wtedy:*

$$(\forall (x_n)_{n=1}^{\infty})\Big((\forall n \in \mathbb{N}) \ x_n \in (a, b) \setminus \{x_0\} \wedge \lim_{n\to\infty} x_n = x_0\Big) \longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Twierdzenie 1.2.1 (ZF+AC) *Obie definicje ciągłości funkcji w punkcie są równoważne.*

Dowod. *Załóżmy, że definicja Cauchy'ego jest spełniona dla funkcji* f *w* $x_0 \in (a, b)$*, pokażemy, że funkcja spełnia definicję ciągłości w* x_0 *w sensie Heinego. Tak więc niećh będą spełnione założenia w definicji ciągłości w sensie Heinego, tzn.* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *jest dowolnym ciągiem zbieżnym do* x_0*, niech* $\epsilon > 0$*, to istnieje* $\delta > 0$ $|x - x_0| < \delta$*, to* $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$*. To wtedy istnieje takie* $n_0 \in \mathbb{N}$*, że jeśli* $n > n_0$ *to* $|x_n - x_0| < \delta$ *(*$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$*), to dla każdego* $n > n_0$ $|f(x_n) - f(x_0)| < \epsilon$ *co jest równoważne, że* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Pozostał nam dowód w drugą stronę, tzn definicja Cauchy'ego wynika z definicji Heinego. W tym celu posłużymy się aksjomatem wyboru AC (axiom of choice). Załóżmy, że twierdzenie jest nieprawdziwe, tzn spełniona jest definicja Heinego i jednocześnie fałszywa jest definicja ciągłości Cauchy'ego tj.

$$(\exists \epsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in \mathbb{R}) \ \ |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon. \tag{1.1}$$

Utwórzmy rodzinę zbiorów $\mathcal{F} = \{F_n \subset (a, b) : \ n \in \mathbb{N}\}$

$$F_n = \left\{x \in \mathbb{R} : \ \ |x - x_0| < \frac{1}{n} \wedge |f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon\right\},$$

ϵ *jest ustalone i nieależy od* n*, to z własności* $(*)$ *dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ F_n *jest niepusty* $F_n \neq \emptyset$*. Wybierzmy z każdego* F_n *po jednym elemencie* $x(n)$ *(mogą sie elementy* x_n *powtarzać), co w terminologii teorii zbiorów znaczy, że istnieje funkcja wyboru* $x \in (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n)^{\mathbb{N}}$ *taka że dla każdego* $n \in \mathbb{N}$*,* $x(n) \in F_n$*. Więc z definicji naszej rodziny* $\mathcal{F}$ *dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ $|x(n) - x_0| <$ *i jednocześnie* $|f(x(n)) - f(x_0)| \geq \epsilon$*, ale oczywiście* $\lim_{n\to\infty} x(n) = x_0$ *więc na mocy definicji Heinego* $\lim_{n\to\infty} f(x(n)) = f(x_0)$*. Stąd istnieje* $n_0 \in \mathbb{N}$*, że* $|f(x(n_0)) - f(x_0)| < \epsilon$*, tak więc w końcu mamy dla naszego* $n_0 \in \mathbb{N}$

$$\epsilon \leq |f(x(n)) - f(x_0)| < \epsilon, \ \ \longrightarrow \epsilon < \epsilon,$$

co prowadzi do sprzeczności, tak więc definicja Cauchy'ego ciągłości funkcji wynika z definicji ciągłości funkcji w sensie Heinego. ■

Twierdzenie 1.2.2 *Niech $f, g : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ są funkcjami ciągłymi w $x_0 \in (a, b)$. To wtedy*

1. $f + g, f - g, fg, \alpha f$ *są funkcjami ciągłymi w* $x_0 \in (a, b)$
2. *jeśli* $g(x_0) \neq 0$ *to* $\frac{f}{g}$ *jest funkcją ciągłą w* $x_0 \in (a, b)$.

Dowod. *Pokażemy ciągłość funkcji (1), stosując ciągłość w sensie Heinego. Niech* $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ *to* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ *i* $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x_0)$ *(ciagłość funkcji f, g w x_0), więc*

$$\lim_{n\to\infty}(f\#g)(x_n) = \lim_{n\to\infty}(f(x_n)\#g(x_n)) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)\# \lim_{n\to\infty} g(x_n) = (f\#g)(x_0).$$

gdzie $\# \in \{+, -, \cdot\}$ *co kończy dowód (1). Dowód (2) jest podobny, więc go pominiemy.* ■

Twierdzenie 1.2.3 (O funkcji złożonej) *Jeśli mamy dane funkcje $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$, $g : (c, d) \mapsto \mathbb{R}$ takie że:*

1. $x_0 \in (a, b)$ *i* $(c, d) \ni y_0 = f(x_0)$
2. *f–jest ciągła w x_0 i g–jest ciągłą funkcją w $y_0 = f(x_0)$,*

to $g \circ f$ jest funkcją ciągłą w x_0.

Dowod. *Niech $\epsilon > 0$ to istnieje $\delta > 0$ $|y - y_0| < \delta$ to $|g(y) - g(y_0)| < \epsilon$, więc istnieje $\eta > 0$, że $|x - x_0| < \eta$ to $|f(x) - f(x_0)| < \delta$ tak więc z pierwszego założenia wynika że $|x - x_0| < \eta$ to $|f(x) - y_0| < \delta$, więc $|g(f(x)) - g(y_0)| < \epsilon$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$ takiego że $|x - x_0| < \eta$, co jest równoważne, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ takiego że $|x - x_0| < \eta$ zachodzi nierówność $|g \circ f(x) - g \circ f(x_0)| < \epsilon$ co jest równoważne ciągłści funkcji $g \circ f$ w punkcie $x_0 \in (a, b)$.* ■

Twierdzenie 1.2.4 (Darboux o wartości średniej) *Niech $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą na $[a, b]$, to*

1. *jeśli $f(a) \leq f(b)$, to dla każdego $c \in (f(a), f(b))$ istnieje $x \in (a, b)$, ze $c = f(x)$*
2. *jeśli $f(b) \leq f(a)$, to dla każdego $c \in (f(b), f(a))$ istnieje $x \in (a, b)$, ze $c = f(x)$.*

Dowod. *Udowodnimy pierwsze zdanie, dowód drugiego jest zupełnie analogiczny. Wystarczy założyć, że $f(a) < f(b)$ i niech $f(a) < c < f(b)$, to istnieje $\delta_1, \delta_2 > 0$ takie że*

$$x \in [a, a + \delta_1) \longrightarrow f(x) < c \text{ oraz } x \in (b - \delta_2, b) \longrightarrow c < f(x).$$

Oczywiście $\{x \in (a, b) : f(x) < c\} \neq \emptyset$. Niech $x_0 = \sup\{x \in [a, b] : f(x) < c\}$, oczywiście z powyższych wzorów mamy $x_0 \in [a + \delta_1, b - \delta_2]$. Udowodnimy, że $f(x_0) = c$, przypuśćmy, że $c < f(x_0)$ (przy nierówności ostrej $f(x_0) < c$ dowód jest podobny), to istnieje $\delta > 0$ takie że:

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \longrightarrow c < f(x). \tag{1.2}$$

Weźmy więc dowolne

$$x' \in (x_0 - \delta, x_0) \neq \emptyset, \text{ takie, że } f(x') < c, \tag{1.3}$$

oczywiście takie x' *istnieje na mocy definicji* x_0*, więc mamy*

$$c < f(x') \text{ oraz } f(x') < c.$$

Pierwsza nierówność wynika z (1) a druga z (2), co jest niemożliwe. Dostajemy stąd, że $f(x_0) = 0$*, co kończy dowód.* ■

Twierdzenie 1.2.5 (Weierstrassa o kresach) *Niech* $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$*, będzie funkcją ciągłą, to*

1. f *jest funkcją ograniczoną na* $[a, b]$*,*
2. *osiąga swoje kresy, tzn. istnieje* $x_1, x_2 \in [a, b]$ *takie że*

$$f(x_1) = \inf\{f(x) \in \mathbb{R} : x \in [a, b]\} \text{ oraz } f(x_2) = \sup\{f(x) \in \mathbb{R} : x \in [a, b]\}.$$

Dowod. *Przypuśćmy, że nasza funkcja* f *nie jest ograniczona na* $[a, b]$*, to istnieje taki ciąg* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *w przedziale* $[a, b]$ *taki że dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ $|f(x_n)| > n$*. Możemy założyć bez straty ogóności, że* $f(x_n) > n$ *dla dowolnego* $n \in \mathbb{N}$*. Istnieje podciąg zbieżny* $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *taki, że* $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = x_0 \in [a, b]$ *(odcinek* $[a, b]$ *jest domknięty). Niech* $\epsilon > 0$*, to istnieje* $\delta > 0$ *takie że*

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \longrightarrow f(x) < f(x_0) + \epsilon. \tag{1.4}$$

Ale istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$*, takie że* $f(x_0) + \epsilon < n_0$ *i istnieje* $n > n_0$*, że* $x_{k_n} \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ *i* $n_0 \leq k_{n_0} < k_n < f(x_{k_n})$*, co jest niemożliwe wobec* $(*)$*, co kończy dowód p–ktu pierwszego.*

Aby udowodnić własność osiągania kresów, niech $c = \sup\{f(x) \in= \mathbb{R} : x \in [a, b]\}$*. Istnieje więc ciąg zbieżny* x_n *do* $x_0 \in [a, b]$ *taki, że* $c = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n) = f(x_0)$*. Co kończy dowód naszego twierdzenia.* ■

Twierdzenie 1.2.6 (o funkcji odwrotnej) *Niech* $f : [a, b] \mapsto [c, d]$ *będzie funkcją ciągłą na* $[a, b]$ *i jednocześni bijekcją odcinka* $[a, b]$ *na* $[c, d]$*, to funkcja odwrotna* $g : [c, d] \mapsto [a, b]$ *jest też funkcją ciągłą na* (c, d)*.*

Dowod. *Udowodnimy to twierdzenie, wykorzystując pojęcie ciągłości w sensie Heinego. Niech* $y_0 \in (c, d)$ *i* y_n *będzie dowolnym ciągiem w* (c, d) *zbieżnym do* y_0*,* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$*. Pokażemy, że* $\lim\limits_{n\to\infty} g(y_n) = g(y_0)$*. Przypuśćmy, że ostatnia granica nie istnieje, więc istnieją dwa ciągi* y_n *i* y'_n *zbieżne do* y_0*, takie że* $\lim\limits_{n\to\infty} g(y_n) = x \neq x' = \lim\limits_{n\to\infty} g(y'_n)$*. Mamy wtedy:*

$$\begin{aligned} f(x) =& f(\lim_{n\to\infty} g(y_n)) = \lim_{n\to\infty} f(g(y_n)) = \lim_{n\to\infty} y_n = y_0 = \\ &= \lim_{n\to\infty} y'_n = \lim_{n\to\infty} f(g(y'_n)) = f(\lim_{n\to\infty} g(y'_n)) = f(x'), \end{aligned}$$

ale funkcja f *jest różnowartościowa na* $[a, b]$ *stąd* $f(x) = f(x')$ *to* $x = x'$*, co jest niemożliwe wobec* $x \neq x'$*.* ■

Przykład 1.2.1 *Funkcje* $\arcsin x, \arccos x$ *są ciągłe na* $[-1,1]$, $\operatorname{arctg} x$ *jest ciągła na* $\mathbb{R}$ *natomiast* $\ln x$ *jest ciągła na* $(0,\infty)$.

Przykład 1.2.2 *(*$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$*) Na podstawie teorii ciągów mamy taki fakt:*

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \lim_{n\to\infty} x_n=\infty \longrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}=e.$$

Niech $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *będzie dowolnym ciągiem dodatnim zbieżnym do zera* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$, *niech* $x_n=\frac{1}{y_n}$, *więc wtedy mamy*

$$\begin{aligned}1=\ln e=\ln\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{x_n})^{x_n}&=\ln\lim_{n\to\infty}(1+y_n)^{\frac{1}{y_n}}\\ =\lim_{n\to\infty}\ln(1+y_n)^{\frac{1}{y_n}}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+y_n)}{y_n}.\end{aligned}$$

Przy zamianie $\ln\lim\limits_{n\to\infty}$ *na* $\lim\limits_{n\to\infty}\ln$ *skorzystaliśmy z ciągłości funkcji logarytm* $\ln x$ *która jest funkcją odwrotną do* e^x. *Stąd mamy* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(1+y_n)}{y_n}=1$ *dla każdego ciągu* $y_n>0$ *zbieżnego do zera, więc* $\lim\limits_{y\to 0^+}\frac{\ln(1+y)}{y}=1$. *Podobnie dowodzi się lewostronnej granicy w zerze* $\lim_{y\to 0^+}\frac{\ln(1+y)}{y}=1$ *więc mamy*

$$\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}=1.$$

Przykład 1.2.3 *(*$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$*) Aby to udowodnić skorzystamy z poprzedniego przykładu i z twierdzenia o granicy funkcji złożonej. Niech* x_n *będzie ciągiem zbieżnym do zera* $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ *i niech* y_n *będzie takim ciągiem takim że* $y_n=e^{x_n}-1$, *wtedy mamy oczywiście* $x_n=\ln(1+y_n)$ *i stąd* $x_n\to 0$ *to* $y_n\to 0$ *a więc*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{x_n}-1}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{\ln(1+y_n)}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=1.$$

Twierdzenie 1.2.7 *Jeśli* $f:[a,b]\mapsto\mathbb{R}$ *jest funkcją ciągłą i różnowartościową na* $[a,b]$, *to jest monotoniczna na* $[a,b]$.

Dowod. *Zastosowanie twierdzenia Darboux o wartości średniej.*

Przypuśćmy, że f *nie jest monotoniczną na* $[a,b]$. *to istnieją* $a\le x_1<x_2<x_3\le b$ *takię że zachodzi właść* $f(x_3)\in(f(x_1),f(x_2))$ *lub do niej analogiczne.*

Wtedy istnieje $x_0\in(x_1,x_2)$ *takie że* $f(x_3)=f(x_0)$ *stąd* $x_3=x_0$ *więc*

$$x_0<x_2<x_3=x_0 \text{ więc } x_0<x_0$$

co jest niemożliwe. W pozostałych przypadkach dowodzi się tak samo. ■

Twierdzenie 1.2.8 (O jednostajnej ciągłości) *Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą na $[a,b]$, to wtedy jest jednostajnie ciągła na $[a,b]$ tzn.*

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x' \in [a,b] \quad |x - x'| < \delta \longrightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon.$$

Dowod. *(Niewprost) przypuścmy, że f jest ciągła na $[a,b]$ i jednocześnie nie jest jednostajnie ciągła. Wtedy istnieje $\epsilon > 0$, że $\forall n \in \mathbb{N}$ istnieją $x_n, x'_n \in [a,b]$ takie że $|x_n - x'_n| < \frac{1}{n}$ i $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \epsilon$. Z twierdzenia Weierstrassa istnieje takie $x_0 \in [a,b]$, że $\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = \lim_{n\to\infty} x'_{k_n} = x_0$ dla pewnego podciągu $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ale wtedy mamy $|f(x_{k_n}) - f(x'_{k_n})| \geq \epsilon$. Z założenia wiemy, że f jest ciągła na $[a,b]$ a więc w x_0 także, tak więc istnieje $\delta > 0$ takie że $|x - x_0| < \delta$, to $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$. Wiemy też, że isnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że $|x_{k_n} - x_0| < \delta$ i jednocześnie $|x'_{k_n} - x_0| < \delta$, więc ostatecznie mamy:*

$$\epsilon \leq |f(x_{k_n}) - f(x'_{k_n})| \leq |f(x_{k_n}) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x'_{k_n})| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

co prowadzi do sprzeczności, jednocześnie kończąc dowód naszego twierdzenia. ■

Mając na uwadze poprzednie twierdzenie możemy wprowadzić pojęcie jednostajnej ciągłości na odcinku ograniczonym i domkniętym

Definicja 1.2.3 (Ciągłość jednostajna) *Mówimy, że funkcja $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ jest jednostajnie c"iągła na $[a,b]$ wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x' \in [a,b] \quad |x - x'| < \delta \longrightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon.$$

Dla porównania przypomnijmy zwykłą ciągłość funkcji f na $[a,b]$:

$$\forall x \in [a,b] \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x' \in [a,b] \quad |x - x'| < \delta \longrightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon.$$

która różni się jedynie koleńością kwantyfikatorów $\forall x \in [a,b] \exists \delta > 0$. Ta z pozoru niewielka różnica ist sprawą bardzo istotną. Mamy oczywiste twierdzenie

Twierdzenie 1.2.9 *Każda funkcja jednostajnie ciągła na dowolnym przedziale jest ciągła.*

Niestety twierdzenia nie da się odwrócić o czym mówi poniższy przykład.

Przykład 1.2.4 *Niech funkcja f będzie dana wzorem:*

$$(0,1) \ni x \mapsto f(x) = \frac{1}{x} \in \mathbb{R}.$$

Oczywiście dla każdego $x \in (0,1)$ f jest ciągła w x ale jeśli weźmiemy dwa ciągi $x_n = \frac{1}{n+1} \in (0,1)$ i $x'_n = \frac{1}{n+2} \in (0,1)$, to oczywiście $\lim_{n\to\infty}(x_n - x'_n) = 0$ ale

$$|f(x_n) - f(x'_n)| = |n + 1 - (n + 2)| = 1 > \epsilon,$$

co dowodzi, że funkcja f nie jest jednostajnie ciągła na $(0,1)$.

Definicja 1.2.4 *Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem (być może niewłaściwym), niech $f_n, f_0 : I \mapsto \mathbb{R}$ będzie ciągiem funkcyjnym, to f_n jest zbieżny jednostajnie do g wtedy i tylko wtedy*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(\forall x \in I)\ |f_n(x) - g(x)| < \epsilon.$$

Zbieżność jednostajną oznaczamy następująco $\lim_{n\to\infty} f_n \rightrightarrows g$.

Twierdzenie 1.2.10 *Jeśli $\lim_{n\to\infty} f_n \rightrightarrows g$ na odcinku ograniczonym domkniętym $[a, b]$ i f_n jest ciągła na $[a, b]$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to g jest ciągła na $[a, b]$.*

Dowod. *Niech $\epsilon > 0$ będzie dowolną ale ustaloną liczbą rzeczywistą dodatnią, oraz f_n jest ciągiem funkcyjnym funkcji ciągłych na $[a, b]$ zbieżnym jednostajnie do g na $[a, b]$. Ze zbieżności jednostajnej wynika, że istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że dla każdego $x \in [a, b]$ $|f_n(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{3}$. Oczywiście f_n jest ciągła na $[a, b]$, niech więc $x_0 \in [a, b]$ to istnieje $\delta > 0$ że jeśli $|x - x_0| < \delta$, to $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}$, więc mamy wtedy:*

$$|g(x) - g(x_0)| \leq |g(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - g(x_0)| < \epsilon,$$

dla $|x - x_0| < \delta$ co kończy dowód naszego twierdzenia. ■

Twierdzenie 1.2.11 *$\lim_{n\to\infty} f_n \rightrightarrows g$ na odcinku I wtedy i tylko wtedy gdy*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m > n_0)(\forall x \in I)\ |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon.$$

Dowod. *Wpierw pokażemy, że warunek napisany w tezie twierdzenia implikuje zbieżność jednostajną. Dla każdego $x \in I$ ciąg wartości $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego na prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$. Więc ciąg ten jest zbieżny do liczby $y \in \mathbb{R}$, niech $g(x) = y$ przy ustalonym $x \in I$. Funkcja $g : I \to \mathbb{R}$ jest granicą punktową ciągu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pokażemy, że zbieżność ta jest jednostajna. W tym celu wystarczy pokazać, że zachodzi warunek:*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(\forall x \in I)\ |f_n(x) - g(x)| < 2\epsilon.$$

Z warunku występującego w tezie naszego twierdzenia biorąc dowolne $\epsilon > 0$ znajdziemy $n_0 \in \mathbb{N}$ takie że dla dowolnych $m, n > n_0$ $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$. Ustalmy dowolną liczbę $n > n_0$, to dla wsystkich $m > n_0$ i dowolnych $x \in I$ mamy $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$. Ponieważ ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zbiega punktowo do funkcji g, to dla dowolnego $x \in I$ istnieje $m_x > n_0$ takie że $|f_{m_x}(x) - g(x)| < \epsilon$ (dla każdego x może być inna liczba m_x ale większa od n_0). Więc dla dowolnego $x \in I$ mamy

$$|f_n(x) - g(x)| \leq |f_n(x) - f_{m_x}(x)| + |f_{m_x}(x) - g(x)| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

Czyli ostatecznie mamy nasz warunek

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(\forall x \in I)\ |f_n(x) - g(x)| < 2\epsilon.$$

Dowód w drugą stronę jest prostszy. Mianowicie, zakładając jednostajną zbieżność $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ do g i biorąc dowolną dodatnią liczbę rzeczywistą $\epsilon > 0$ znajdziemy $n_0 \in \mathbb{N}$ taką że dla dowolnego $n > n_0$ i dowolnego $x \in I$ mamy $|f_n(x) - g(x)| < \epsilon$. Biorąc dowolne $m > n_0$ mamy

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - g(x)| + |g(x) - f_m(x)| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

Więc ostatecznie mamy

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n > n_0)(\forall x \in I)\ |f_n(x) - f_m(x)| < 2\epsilon,$$

co należało dowieść. ■

Twierdzenie 1.2.12 *Jeśli $f_n : I \mapsto \mathbb{R}$ i istnieje $a_n > 0$ taki że*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,
2. $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in I)\ \ |f_n(x)| < a_n$,

to $\lim\limits_{n\to\infty} f_n \rightrightarrows f_0$ na odcinku I.

Dowod. *Skorzystamy z poprzedniego twierdzenia 1.2.11. Niech będzie dana $\epsilon > 0$, to z pierwszego założenia, istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$, taka że dla dowolnego $n > n_0$ $0 \leq a_n < \frac{\epsilon}{2}$. Niech m będzie liczbą naturalną większą niz n_0, to wtedy korzystając z drugiego założenia mamy*

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x)| + |f_m(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Otrzymaliśmy więc warunek

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n > n_0)(\forall x \in I)|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon,$$

co na mocy wspomnianego twierdzenia 1.2.11 kończy nasz dowód. ■

Twierdzenie 1.2.13 *Jeśli $f_n : I \mapsto \mathbb{R}$ i istnieje $a_n > 0$ taki że*

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$,
2. $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in I)\ \ |f_n(x)| < a_n$,

to istnieje $f_0 : I \mapsto \mathbb{R}$ taka że $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows f_0$ na odcinku I.

Dowod. *Niech $\epsilon > 0$ będzie dowolne, to istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ że $n, m > n_0$ to*

$$\sum_{k=n+1}^{m} |a_k| = |\sum_{k=n+1}^{m} a_k| < \epsilon,$$

a więc dla dowolnego $x \in I$ mamy

$$|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \epsilon$$

co kończy dowód. ■

Zadania: funkcje ciągłe

Zadanie 32 *Proszę wyznaczyć parametry* $a, b \in \mathbb{R}$*, aby funkcja:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & dla\ |x| < 2 \\ x \cdot \sqrt{x^2 - 4} & dla\ |x| \geq 2, \end{cases}$$

była ciągła na $\mathbb{R}$*.*

Zadanie 33 *Prosze uzasadnić, że podane równania mają jedno rozwiązanie na podanych przedziałach:*

$$a)\ 3^x + x = 3\ na\ (0, 1); \quad b)\ \frac{\sin x}{2} + x = 1\ na\ \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Zadanie 34 *Proszę podać przykład funkcji rzeczywistej* $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *takiej że:*

$$\{x \in \mathbb{R} :\ f\ jest\ ciągła\ w\ punkcie\ x\} = \mathbb{Z}.$$

Zadanie 35 *Proszę podać przykład funkcji rzeczywistej* $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *takiej że:*

$$\{x \in \mathbb{R} :\ f\ jest\ ciągła\ w\ punkcie\ x\} = \mathbb{N}$$

oraz

$$\{x \in \mathbb{R} :\ |f|\ jest\ ciągła\ w\ punkcie\ x\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Zadanie 36 *Niech będa dane dwie przestrzenie metryczne* (X, d_X) *oraz* (Y, d_y)*. Niech* $f \in Y^X$ *będzie dowolną funkcją. Proszę udowdnić:*

$$(f\ jest\ ciągła\ na\ X) \longleftrightarrow (\forall U \in P(Y))(U\ jest\ otwarty,\ to\ f^{-1}[U]\ jest\ otwarty).$$

Zadanie 37 *Proszę wyznaczyć zbiór punktów ciągłości dla funkcji Riemanna zadanej wzorem następującym:*

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ \ f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \wedge NWD(p, q) = 1 \end{cases}$$

Zadanie 38 *Proszę udowodnić, ze każdy rzeczywisty wielomian stopnia nieparzystego ma przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty. Wsk. Skorzystać z twierdzenia Darboux.*

Zadanie 39 *Proszę udowodnić, że każda funkcja ciaagła* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mająca następujaca własność:*

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})(f(x + y) = f(x) + f(y))$$

jest postaci $f(x) = a \cdot x$ *dla pewnego* $a \in \mathbb{R}$*. Wsk. Udowodnić tę postać funkcji najpierw dla liczb wymiernych.*

Zadanie 40 *Proszę sprawdzić jednostajną ciągłość funkcji:*

$$a)\ f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ na przedziale } (0,1); \quad b)\ f(x) = \sqrt{x} \text{ na zbiorze } [0,\infty).$$

Zadanie 41 *Niech $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ będą dwiema ciągłymi funkcjami na przedziale $[a,b]$. Proszę udowodnić, że funkcja $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ zadana wzorem $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ dla $x \in [a,b]$ jest ciągła na tym przedziale.*

Zadanie 42 *Niech $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ oraz niech będzie dany ciąg funkcyjny $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ funkcji rzeczywistych $f_n \in \mathbb{R}^D$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, zbieżny punktowo do pewnej funkcji $f \in \mathbb{R}^D$. Ponadto niech będzie dany ciąg nieujemnych liczb rezczywistych $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zbieżnych do zera, który spełnia własność:*

$$(\forall x \in D)(\forall n \in \mathbb{N})(|f_n(x) - f(x)| \leq a_n),$$

to ciag $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji f na zbiorze D.

Zadanie 43 *Proszę zbadać zbieżność jednostajna następujacych ciagów funkcyjnych:*

$$a)\ f_n(x) = x^n(1 - x^n) \text{ na przedziale } [0,1]; \quad b)\ f_n(x) = \frac{1}{n \cdot x} \text{ na przedziale } (0,1].$$

1.3 Rachunek różniczkowy.

Definicja 1.3.1 (pochodnej) *Niech będzie dana funkcja $f : (a,b) \mapsto \mathbb{R}$, to mówimy że ma pochodną w $x_0 \in (a,b)$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje granica właściwa:*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Uwaga 1.3.1 *Zamiast powyższej granicy możemy badać istnienie pochodnej i ją obliczać wtaki sposób:*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Uwaga 1.3.2 *Zamiast przedziału (a,b) w definicji pochodnej funkcji wystarczy założyć że $x_0 \in D_f$ oraz jest nie jest punktem izolowanym dziedziny funkcji f, tzn.*

$$\forall \epsilon > 0 \ \ D_f \cap (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset.$$

Uwaga 1.3.3 *Analogicznie do definicji pochodnej funkcji w punkcie x_0 możemy definiować pojęcie pochodnej jednostronnej funkcji w punkcie x_0 biorąc granicę jednostronną w x_0.*

Uwaga 1.3.4 *W definicji pochodnej funkcji f w punkcie x_0 możemy brać oczywiście granicę w sensie Cauchy'ego albo w sensie Heinego. Na przykład w sensie Cauchyego definicja pochodnej funkcji f w x_0 brzmi następująco:*

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D_f \ \ |x - x_0| < \delta \longrightarrow \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \epsilon.$$

Jako prosty wniosek z definicji pochodnej funkcji w punkcie i pochochodnych jednostronnych funkcji w punkcie mamy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.3.1 *Na to by istniała pochodna funkcji f w punkcie x_0, potrzeba i wystarcza by istniały pochodne jednostronne (prawo i lewostronna) w punkcie x_0 i są sobie równe.*

Twierdzenie 1.3.2 *Jeśli funkcja ma pochodną w x_0 to jest w tym punkcie ciągła.*

Dowod. *Niech nasza funkcja jest różniczkowalna (czytaj ma pochodną) w punkcie x_0, to wówczas mamy*

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \right) \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0)0 = 0,\end{aligned}$$

więc

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) + \lim_{x \to x_0} f(x_0) = f(x_0).$$

■

Teraz podamy kilka przykładów pochodnych funkcji.

Przykład 1.3.1 *$f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ oraz $x \in \mathbb{R}$:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0.$$

Przykład 1.3.2 *$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ i $x \in \mathbb{R}$:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)\left(\sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k x_0^{n-1-k}\right)}{x - x_0} = n x_0^{n-1}.$$

Przykład 1.3.3 *$f(x) = e^x$, $x_0 \in \mathbb{R}$:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0 + \Delta x} - e_0^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} e^{x_0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{x_0}.$$

Przykład 1.3.4 *$f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2}}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{\sin \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} \lim_{x \to x_0} \cos \frac{x + x_0}{2} = \cos x_0.\end{aligned}$$

W tym przykładzie korzystaliśmy z ciągłości funkcji $\sin$ *i* $\cos$.

Przykład 1.3.5 *Niech $f(x) = \ln x$ i $x_0 > 0$, to wtedy mamy:*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x_0 + \Delta x) - \ln x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(1 + \frac{\Delta x}{x_0})}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(1 + \frac{\Delta x}{x_0})}{x_0 \frac{\Delta x}{x_0}} = \frac{1}{x_0}.$$

Twierdzenie 1.3.3 (pochodna funkcji złożonej) *Niech będą funkcje $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$, oraz $g : (c, d) \mapsto \mathbb{R}$ i $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in (c, d)$ takie że:*

1. *$y_0 = f(x_0)$,*

2. *f jest różniczkowalna w x_0 i g różniczkowalna w y_0*

to wówczas funkcja złożona $h : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ $h = g \circ f$ jest również rózniczkowalna w x_0 oraz

$$h'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0).$$

Dowod. *Możemy założyć, że $f(x) \neq f(x_0)$ w pewnym otoczeniu x_0, bo w przeciwnym wypadku $h(x) = h(x)$ w pewnym otoczeniu x_0. Korzystając z tego, że f jest różniczkowalna* *w x_0 mamy zagwarantowaną ciągłość funkcji f w x_0, więc jeśli $x \to x_0$ to $f(x) \to f(x_0)$ a więc mamy*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\\ &= \lim_{y\to y_0}\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\\ &= g'(y_0)f'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)\end{aligned}$$

co kończy dowód naszego twierdzenia. ■

Przykład 1.3.6 *Niech $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i niech $x_0 > 0$, ponadto niech $f(x) = x^\alpha$, to wtedy mamy*

$$\begin{aligned}(x^\alpha)' &= (e^{\alpha\ln x})' = (e^y)'|_{y=\alpha\ln x}(\alpha\ln x)'\\ &= e^{\alpha\ln x}\frac{\alpha}{x} = x^\alpha\frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1},\end{aligned}$$

co kończy rachunek ale można również policzyć tę pochodną nie korzystając z powyższego twierdzenia. Wówczas mamy:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^\alpha - x_0^\alpha}{x-x_0} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(x_0+\Delta x)}-e^{\alpha\ln x_0}}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(x_0+\Delta x)}-e^{\alpha\ln x_0}}{\ln(x_0+\Delta x)-\ln(x_0)}\lim_{\Delta x\to 0}\alpha\frac{\ln(x_0+\Delta x)-\ln(x_0)}{\Delta x}\\ &= \lim_{y\to y_0}\frac{e^y-e^{y_0}}{y-y_0}|_{y_0=\ln x_0}\alpha\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x_0+\Delta x)-\ln(x_0)}{\Delta x}\\ &= \alpha x^{\alpha-1}.\end{aligned}$$

Przykład 1.3.7 *Niech f będzie funkcją nieprzyjmującą wartości zerowej w otoczeniu punktu x to wtedy korzystając z twierdzenia o funkcji złożonej mamy*

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = (f^{-1}(x))' = -f^{-2}(x)f'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}.$$

Twierdzenie 1.3.4 (O pochodnej funkcji odwrotnej) *Niech $f : (a,b) \mapsto (b,c)$ będzie funkcją róznowartościową odwzorującą odcinek (a,b) na (c,d) taka że*

1. *jest ciągła na (a,b),*

2. *jest rózniczkowalna w $x_0 \in (a,b)$ oraz*

3. *$f'(x_0) \neq 0$,*

to wtedy funkcja odwrotna f^{-1} jest również różniczkowalna w punkcie $y_0 = f(x_0) \in (c,d)$ oraz mamy następujęcy wzór:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Dowod. *Niech $y_0 = f(x_0) \in (c,d)$ dla naszego punktu $x_0 \in (a,b)$ oraz niech g będzie funkcją odwrotną do f. Z twierdzenia o ciągłości funkcji odwrotnej g do funkcji f mamy $y \to y_0$ to $x = g(y) \to g(y_0) = x_0$, więc stąd wynika*

$$\lim_{y\to y_0} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)},$$

co kończy dowód naszego twierdzenia. ■

Przykład 1.3.8 *Niech $f(x) = \ln x$ i $x_0 > 0$ to wtedy funkcja $g(y) = e^y$ jest funkcją odwrotną do f i istnieje $y_0 \in \mathbb{R}$ takie że $x_0 = g(y_0) = e^{y_0}$. Oczywiście wszystkie założenia powyższego twierdzenia są spełnione wię mamy ze wzoru na pochodną funkcji odwrotnej*

$$(\ln x)'|_{x=x_0} = f'(x_0) = \frac{1}{g'(y_0)} = \frac{1}{(e^y)'|_{y=y_0}} = \frac{1}{e^{y_0}} = \frac{1}{x_0}.$$

Twierdzenie 1.3.5 *Niech f, g "bedą funkcjami rózniczkowalnymi w punkcie $x \in \mathbb{R}$, to wtedy:*

1. *$f+g$ jest różniczkowalna w x i $(f+g)'(x) = (f'+g')(x)$,*
2. *$\alpha \in \mathbb{R}$ to αf jest różniczkowalna w x i $(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$,*
3. *fg jest różniczkowalna w x i $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,*
4. *jeśli $g(x) \neq 0$ to*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{f^2(x)}.$$

Dowod. *Wpierw udowodnimy (1), mamy więc*

$$\begin{aligned}(f+g)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+g(x)-(f(x_0)+g(x_0))}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) = g'(x_0).\end{aligned}$$

Przypadek (2) jest na tyle prosty że pominiemy go, pokażemy (3) i (4).

$$\begin{aligned}(fg)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} g(x) + f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right) \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \lim_{x\to x_0} g(x) + f(x_0) \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \\ &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0),\end{aligned}$$

korzystamy tu oczywiście z ciągłości funkcji g w x_0.

By udowodnić (4) wystarczy zauważyć, że $(\frac{1}{g(x)})' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$ *i skorzystać z (3):*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)(-\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}) = \frac{f'g - fg'}{g^2}(x_0).$$

■

Definicja 1.3.2 (Maksimum lokalne) *Niech $f : (a,b) \mapsto \mathbb{R}$ i $x_0 \in (a,b)$, to mówimy, że f ma maksimum lokalne w x_0 wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} \;\; x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta \setminus \{x_0\}) \longrightarrow f(x) \leq f(x_0).$$

Uwaga 1.3.5 *Podobnie definiujemy minimum lokalne funkcji f w x_0.*

Definicja 1.3.3 (Ekstremum lokalne) *f ma ekstremum lokalne w $x_0 \in \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy gdy f ma maksimum lokalne w x_0 lub f ma minimum lokalne w x_0.*

Twierdzenie 1.3.6 (Fermata) *Jeśli f ma ekstremum lokalne w $x_0 \in \mathbb{R}$ i f jest różniczkowalna w x_0 to $f'(x_0) = 0$.*

Dowod. *Załóżmy, że f ma maksimum lokalne w x_0, to istnieje takie $\delta > 0$, że dla każdego $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ mamy $f(x) - f(x_0) \leq 0$*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0,$$

ale z drugiej strony dla każdego $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ mamy $f(x) - f(x_0) \leq 0$ więc

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

więc

$$0 \leq f'(x_0) \leq 0 \longrightarrow f'(x_0) = 0,$$

co kończy dowód. ■

1.3.1 Twierdzenie Lagrang'ea i Cauchy'ego

Twierdzenie 1.3.7 (Rolle'a) *Niech $a, b \in \mathbb{R}$ oraz niech będzie dana funkcja $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ spełniająca warunki*

1. *f jest ciągła na $[a,b]$*
2. *f jest różniczkowalna na (a,b)*
3. *$f(a) = f(b)$*

to istnieje $c \in (a, b)$ takie, że $f'(c) = 0$.

Dowod. *Na mocy twierdzenia Weierstrassa funkcja f jest ograniczona i przyjmuje swoje kresy. Więc istnieje $x_1, x_2 \in [a, b]$, że f ma minimum globalne w x_1 i maksimum globalne w x_2 (więc i lokalne także), to wtedy mamy*

$$f(x_1) \leq f(a) = f(b) \leq f(x_2).$$

Jeśli zachodzą wszędzie równości zamiast nierówności słabych to funkcja nasza jest stała na $[a, b]$ i teza twierdzenia wynika natymiast. Jeśli jedna z powyższych nierówności jest ostra (właściwa), to ten punkt $c \in \{x_1, x_2\}$ jest elementem odcinka otwartego (a, b). Wtedy pochodna istnieje w c i z tego powodu że funkcja ma ekstremum lokalne w tym punkcie wnosimy, na podstawie twierdzenia Fermata, że $f'(c) = 0$ co kończy dowód. ■

Twierdzenie 1.3.8 (Cauchy'ego) *Jeśli $f, g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ są funkcjami rzeczywistymi spełniające warunki:*

1. *f, g jest ciągła na $[a, b]$*
2. *f, g jest różniczkowalna na (a, b)*
3. *$g(a) \neq g(b)$ oraz $g'(c) \neq 0$ dla każdego $c \in (a, b)$*

to istnieje takie $c \in (a, b)$ że

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Dowod. *Weźmy pod uwagę funkcję pomocniczą*

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)),$$

oczywiście funkcja ta jest różniczkowalna wewnątrz (a, b) i jest ciągła na $[a, b]$. Widzimy, że $h(a) = 0 = h(b)$, więc spełnia założenia twierdzenia Rolle'a, istnieje stąd $c \in (a, b)$ takie że $h'(c) = 0$. Stąd mamy:

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(c),$$

stąd na podstawie ostatniego założenia mamy dla pewnego $c \in (a, b)$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

■

Następujące twierdzenie jest natychmiastowym wnioskiem z twierdzenia Cauchy'ego:

Twierdzenie 1.3.9 (Lagrang'ea) *Jeśli* $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ *jest funkcją rzeczywistą spełniającą warunki:*

1. f *jest ciągła na* $[a, b]$

2. f *jest różniczkowalna na* (a, b)

to istnieje takie $c \in (a, b)$ *że*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Dowod. *wystarczy za g podstawić* $g(x) = x$ *i zastosować twierdzenie Cauchy'ego.* ■

Zastosowania - liczba Liouville'a

W tym podrozdziele jako zastosowanie twierdzenia Lagrange'a, podamy przykład liczby rzeczywistej, która jest liczbą przestępną. tzn. że nie jest pierwiastkiem żadnego wielomainu o współczynnikach całkowitych stopnia przynajmniej równego jeden.

Definicja 1.3.4 (Liczba Liouville'a) *Liczbę Liouville'a nazywamy liczbę rzeczywistą o następującej postaci:*

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}.$$

Twierdzenie 1.3.10 *Liczba Liouville'a jest liczbą przestępną.*

Dowod. *Przypuśćmy, że* z *jest liczbą algebraiczną (nie jest przestępna), to istnieje wielomian* $f \in \mathbb{Z}[x]$ *stopnia* $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *dla którego* L *jest pierwiastkiem wielomianu* f *(tzn.* $f(z) = 0$*). Na mocy twierdzenia Bezout'a wielomian ma tylko skończenie wiele pierwiastków, więc istnieje otoczenie punktu* z_0 $U = (z_0 - r, z_0 + r)$ *dla pewnego* $r > 0$ *że zachodzi relacja:*

$$(\forall x \in U)(x \neq z \longrightarrow f(x) \neq 0).$$

Pochodna wielomianu f *jest niezerowym wielomianem, więc jest taka stała* $M > 0$ *taka że* $\forall x \in U |f'(x)| < M$. *Niech* $x_0 \in U \cap \mathbb{Q}$ *będzie liczbą wymierną (różną od* z*), to stosując twierdzenie Lagrange'a do funkcji* f *na przedziale domkniętym o końcach* x_0, z *istnieje* ξ *wewnątrz tego przedziału takie że*

$$\left|\frac{f(x_0)}{x_0 - z}\right| = \left|\frac{f(x_0) - f(z)}{x_0 - z}\right| = |f'(\xi)| < M.$$

Niech $x_0 = \frac{p}{q}$ *gdzie* $p \in \mathbb{Z}$ *i* $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *oraz niech* $f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$. *Wtedy mamy*

$$f(x_0) = f\left(\frac{p}{q}\right) = \sum_{k=0}^{m} a_k \left(\frac{p}{q}\right)^k = \frac{1}{q^m} \sum_{k=0}^{m} a_k p^k q^{m-k}.$$

Ponieważ $f(x_0) \neq 0$ *oraz* $\sum_{k=0}^{m} a_k p^k q^{m-k} \in \mathbb{Z}$, *to mamay* $\frac{1}{q^m} \leq |f(x_0)|$ *a więc* $\frac{1}{Mq^m} \leq |x_0 - z|$. *Tak więc istnieje mamy:*

$$(\exists C > 0)(\forall x_0 \in U \cap \mathbb{Q}) \;\; x_0 = \frac{p}{q} \longrightarrow \frac{C}{q^m} \leq \left| z - \frac{p}{q} \right|.$$

Rozważmy ciąg $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ *zbiezny do* z *określony następujaco:*

$$\forall n \in \mathbb{N}) \;\; n \neq 0 \longrightarrow z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^{k!}}.$$

Wiec jest takie $n_0 \in \mathbb{N}$ *ze dla każdego* $n > n_0$ *(*$n \in \mathbb{N}$*)* $z_n \in U \cap \mathbb{Q}$. *Zauważmy że dla kazdego* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *jest* $p \in \mathbb{Z}$ *takie że* $z_n = \frac{p}{10^{n!}}$.

Dla $n > n_0$ *mamy:*

$$\frac{C}{(10^{n!})^m} \leq |z_0 - z_n| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^{(n+1)!+k}} \leq \frac{2}{10^{(n+1)!}}$$

a stąd mamy:

$$0 < \frac{C}{2} \leq \frac{(10^{n!})^m}{10^{(n+1)!}} = \frac{(10^m)^{n!}}{(10^{n+1})^{n!}} = \left(\frac{10^m}{10^{n+1}} \right)^{n!}.$$

Jak łatwo zauważyć, $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{10^m}{10^{n+1}} \right)^{n!} = 0$, *wiec istnieje* $n_1 > n_0$ *ze dla każdego* $n > n_1$

$$\left(\frac{10^m}{10^{n+1}} \right)^{n!} < \frac{C}{2},$$

co prowadzi do sprzeczności wobec poprzedniej nierówności. ■

1.3.2 Twierdzenie Taylora

Udowodnimy teraz twierdzenie Taylora które brzmi następująco:

Twierdzenie 1.3.11 (Taylora) *Niech dana będzie funkcja rzeczywista* $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$, *która jest* $n + 1$*-krotnie różniczkwalna na* (a, b), *niech ponadto* $x, x_0 \in (a, b)$, *to istnieje* $c \in (x_0 - |x - x_0|, x_0 + |x - x_0|)$, *że:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_{n+1}(x, x_0),$$

gdzie

1. $R_{n+1}(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$ *jest resztą Lagrange'a,*

2. $R_{n+1}(x,x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n(x-x_0)$ *jest resztą Cauchy'ego.*

Dowod. *Dla udowodnienia naszego twierdzenia, posłużymy się funkcją pomocniczą:*

$$F_x(t) \equiv F(t) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k,$$

jest ona ciągła i różniczkowalna na przedziale domkniętym $[x_0-|x-x_0|, x_0+|x-x_0|] \subset (a,b)$. *Obliczmy pochodną naszej funkcji* F *w punkcie* t

$$\begin{aligned}
F'(t) =& \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k\right)' = f'(t) + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k\right)' \\
=& f'(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(f^{(k+1)}(t)(x-t)^k + f^{(k)}k(x-t)^{k-1}(-1)\right) \\
=& f'(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}(f^{(k+1)})(x-t)^k + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}k(x-t)^{k-1} \\
=& f'(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}(f^{(k+1)}(t))(x-t)^k + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - f'(t) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k \\
=& \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.
\end{aligned}$$

zauważmy, że $F(x) = f(x)$ *oraz* $F(x_0) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, *więc biorąc za g* $g(x) = x$ *i stosując twierdzenie Cauchy'ego istnieje takie* $c \in (x, x_0)$, *że:*

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = F(x) - F(x_0) = F'(c)(x-x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n(x-x_0),$$

stąd

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n(x-x_0)$$

gdzie ostatni składnik jest właśnie resztą Cauchy'ego. Biorąc w twierdzeniu Cauchy'ego $g(t) = (x-t)^{n+1}$ *mamy:*

$$\frac{f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}{0-(x-x_0)^{n+1}} = \frac{F(x)-F(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{F'(c)}{g'(c)} = \frac{\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n}{(n+1)(x-c)^n(-1)}$$

Więc

$$\frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

a stąd otrzymujemy

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Ostatni składnik jest $n+1$ resztą Lagrang'ea, co kończy dowód twierdzenia. ■

Przykład 1.3.9 *Wiemy, że $f(x) = e^x$ jest dowolnie wiele razy różniczkowalna i oczywiście $f^{(n)}(x) = e^x$, stąd dla $n \in \mathbb{N}$ mamy:*

$$e^x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{x_0}}{k!}(x - x_0)^k + \frac{e^c}{n!}(x - x_0)^n$$

dla pewnego $c \in (x, x_0) \cup (x_0, x)$.

Przykład 1.3.10 *Niech $f(x) = \sin x$, to pokażemy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$. Dla $n = 1$ jest to oczywiste, z uwagi na $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$. Załóżmy, że dla $k \leq n$ wzór mamy prawdziwy, to wtedy*

$$\begin{aligned}(\sin x)^{(n+1)} =& \Big((\sin x)^{(n)}\Big)' = \Big(\sin(x + \frac{n\pi}{2})\Big)' \\ =& \cos(x + \frac{n\pi}{2}) = \sin(x + \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + \frac{(n+1)\pi}{2}),\end{aligned}$$

co kończy dowód naszego wzoru. Oczywiście funkcja nasza spełnia założenia twierdzenia Taylora dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$. Więc

$$f(x) = \sin x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(x + \frac{k\pi}{2})}{k!}(x - x_0)^k + \frac{\sin(c + \frac{k\pi}{2})}{n!}(x - x_0)^n$$

dla pewnego $c \in (x, x_0) \cup (x_0, x)$.

Przykład 1.3.11 *Niech $f(x) = \ln(1 + x)$ dla $x > -1$. Oczywiście $f'(x) = (1 + x)^{-1}$, pokażemy, że $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1 + x)^{-n}$. Jeśli dla $k \leq n$ wzór jest udowodniony, to*

$$\begin{aligned}f^{(n+1)}(x) =& \Big(f^{(n)}(x)\Big)' = ((-1)^{n-1}(n-1)!(1 + x)^{-n})' \\ =& (-1)^{n-1}(n-1)!(-n)(1 + x)^{-n-1} = (-1)^n n!(1 + x)^{-(n+1)},\end{aligned}$$

więc formuła na n–tą pochodną jest prawdziwa dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Więc

$$\begin{aligned}\ln(1 + x) =& \ln(1 + x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!(1 + x_0)^{-k}}{k!}(x - x_0)^k \\ &+ \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!(1 + c)^{-n}}{n!}(x - x_0)^n \\ =& \ln(1 + x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}(1 + x_0)^{-k}}{k}(x - x_0)^k + \frac{(-1)^{n-1}(1 + c)^{-n}}{n}(x - x_0)^n\end{aligned}$$

dla pewnego $c \in (x, x_0) \cup (x_0, x)$. *Jeśli* $x_0 = 0$ *to*

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + \frac{(-1)^{n-1}(1+c)^{-n}}{n} x^n$$

dla pewnego $c \in (x, 0) \cup (0, x)$.

Twierdzenie 1.3.12 *Niech* $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ *będzie* n*–krotnie różniczkowalna w otoczeniu punktu* $x_0 \in (a, b)$ *taka że*

1. n *jest liczbą parzystą większą lub równą* 2,
2. $f^{(n)}$ *jest ciągła w* x_0,
3. $f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$,

to wtedy mamy

1. *jeśli* $f^{(n)}(x_0) > 0$ *to* f *ma minimum lokalne w* x_0,
2. *jeśli* $f^{(n)}(x_0) < 0$ *to* f *ma maksimum lokalne w* x_0,

Dowod. *Wystarczy udowodnić warunek (1), drugi dowodzi się analogicznie. Jeśli* $f^{(n)}(x_0) > 0$ *to z waruknu (2) istnieje* $\delta > 0$, *że dla każdego* $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $f^{(n)}(x) > 0$. *Więc stosując twierdzenie Taylora, dla każdego* $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ *istnieje* $c_x \in (x, x_0)$ *(lub na odwrót) takie że*

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(c_x)}{n!}(x - x_0)^n = \frac{f^{(n)}(c_x)}{n!}(x - x_0)^n \geq 0,$$

bo n *jest parzyste, co kończy dowód (1).* ■

Twierdzenie 1.3.13 *Niech* $g_0 : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ *i* $f_n, g_n : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ *będą dwoma ciągami funkcyjnymi takimi, że:*

1. *istnieje* $x_0 \in [a, b]$ *że* $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$ *istnieje*
2. $\lim_{n\to\infty} g_n \rightrightarrows g_0$ *i* g_0, g_n *są ciągłe na* $[a, b]$ *dla każdego* $n \in \mathbb{N}$
3. *dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ $f'_n = g_n$ *na* $[a, b]$,

to istnieje $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ *taka że*

1. $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$
2. f *jest różniczkowalna i* $f' = g_0$ *na* $[a, b]$.

Dowod. *Udowodnimy wpierw istnienie takiej funkcji $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$. Ponieważ ciąg $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ jest jednostajnie zbieżny do g_0 na przedziale $[a, b]$, to dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$, takie że dla dowolnych $n, m > n_0$ i każdego $y \in [a, b]$ mamy $|g_n(y) - g_m(y)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$. Niech $h_{n,m}(x) = f_n(x) - f_m(x)$, korzystając z twierdzenia Lagrange'a mamy*

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f_m(x)| =&|h_{n,m}(x)| = |h_{n,m}(x_0) + h'_{n,m}(\xi_{nm})(x - x_0)| \\
=&|f_n(x_0) - f_m(x_0) + (f_n - f_m)'(\xi_{nm})(x - x_0)| \\
\leq&|f_n(x_0) - f_m(x_0)| + |(g_n - g_m)(\xi_{nm})(x - x_0)| \\
<&\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2(b-a)}(b - a) = \epsilon
\end{aligned}$$

dla pewnego ξ_{nm} pomiędzy x, x_0. Więc z twierdzenia Cauchy'ego ciąg f_n jest zbieżny dla każdego $x \in [a, b]$. Definiujemy f w sposób następujący: dla każdego $x \in [a, b]$ niech $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

Udowodnimy teraz 1), 2) występujące w tezie twierdzenia. wiemy, że f_n, g_n, g_0 są jednostanie ciągłe na $[a, b]$ i ciąg g_n jest jednostajnie zbieżny do g_0 na $[a, b]$. Weźmy dowolne $\epsilon > 0$, to wtedy istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ że dla $n > n_0$ $|g_n(x) - g_0(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ oraz istnieje $\delta > 0$ że dla każdego $x' \in [a, b]$ takiego że $|x - x'| < \delta$ zachodzi $|g_n(x) - g_n(x')| < \frac{\epsilon}{2}$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f_n(x) - f_n(x')}{x - x'} - g_0(x)\right| \leq&\left|\frac{f'_n(\xi)(x - x')}{x - x'} - g_n(x)\right| + |g_n(x) - g_0(x)| \\
=&|g_n(\xi) - g_n(x)| + |g_n(x) - g_0(x)| < \epsilon,
\end{aligned}$$

dla pewnego ξ pomiędzy x, x', więc

$$\left|\frac{f(x) - f(x')}{x - x'} - g_0(x)\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_n(x) - f_n(x')}{x - x'} - g_0(x)\right| \leq \epsilon.$$

Tutaj $\epsilon > 0$ jest dowolne więc dla każdego $x \in [a, b]$ $f'(x) = g_0(x)$ co kończy dowód naszego twierdzenia. ■

Uwaga 1.3.6 *Ciąg pochodnych g_n ciągu funkcyjnego f_n jednostajnie zbieżnego do f nie musi być zbieżny! Niech $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin nx$ na $[0, 2\pi]$, to oczywiście $\lim_{n\to\infty} f_n \rightrightarrows 0$ natomiast*

$$g_n(x) = \cos nx \text{ i } \lim_{n\to\infty} g_n \text{ nie istnieje.}$$

Zadania: pochodne

Zadanie 44 *Proszę wyznaczyć parametry $a, b \in \mathbb{R}$, aby funkcja:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \leq 1 \\ ax + b & \text{dla } 1 < x, \end{cases}$$

była różniczkowalna na $\mathbb{R}$.

Zadanie 45 *Proszę zróżniczkować następujace funkcje:*

$$a)\ \frac{x^2+3x+5}{x^7-1},\quad b)\ \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}},\quad c)\ x^{\sin x},\quad d)\ x^{x^x}.$$

Zadanie 46 *Proszę wyznaczyć przedziały monotoniczności oraz ekstrema lokalne dla zadanych funkcji:*

$$a)\ xe^{-x^2},\quad b)\ \frac{x}{1-x^3},\quad c)\ x^2e^{\frac{1}{x^2}}.$$

Zadanie 47 *Proszę udowodnić:*

$$(\forall x\in\mathbb{R})(0<x\longrightarrow\frac{x}{1+x}\leq\ln(1+x)\leq x).$$

oraz

$$(\forall x\in\mathbb{R})(0<x\longrightarrow 1+x<e^x).$$

Zadanie 48 *Korzystajac z pierwszej części poprzedniego zadania, proszę uzasadnić, że istnieje granica następującego ciągu liczbowego:*

$$(\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\})\ \ \gamma_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln(n+1).$$

Granica ta jest tzw. stałą Eulera.

Zadanie 49 *Proszę wykazać, że poniższe tozsamości są prawdziwe:*

$$(\forall x\in(-1,1))(\ \ \sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}\ \ )$$

oraz

$$(\forall x\in[-1,1])(\ \ \arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}\ \ ).$$

Zadanie 50 *Niech $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ będą ciągłe na $[a,b]$ oraz różniczkowalne na (a,b), takie że $f(a)=g(a)$ i $f(b)=g(b)$. Prosze udowodnić. że jest $\xi\in(a,b)$ dla którego mamy $f'(\xi)=g'(\xi)$. Jest to twierdzenie o koniach wyścigowych.*

Zadanie 51 *Niech będzie dana funkcja f, która ma ciągłą pochodną na przedziale (a,b), taka że dla $n\geq 2$ ma n pierwiastków w tym przedziale. Proszę udowodnić, ze pochodna tej funkcji posiada co najmniej $n-1$ miejsc zerowych na (a,b).*

Zadanie 52 *Prosze udowodnić, że jesli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $x_0\in\mathbb{R}$, to zachodzi nastepujaca równość:*

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}.$$

Granica po prawej stronie równości nosi nazwę **pochodnej uogólnionej**. *Proszę podać przykład funkcji nieróżniczkowalnej w punkcie x_0, dla której pochodna uogólniona istnieje x_0.*

Zadanie 53 *Proszę podać przykład ciągłej funkcji rzeczywistej $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ takiej że:*

$$\{x \in \mathbb{R} : \ f \text{ nie jest różniczkowalna w punkcie } x\} = \mathbb{N}.$$

Zadanie 54 *Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej, proszę wyznaczyć:*

$$a) \ (f^{-1})'(0), \ \text{gdzie } f(x) = x + \sin x, \quad b) \ (f^{-1})'(2), \ \text{dla } f(x) = e^x + e^{5x},$$

$$c) \ (f^{-1})'(4), \ \text{gdzie } f(x) = x^x \wedge 1 \leq x.$$

Zadanie 55 *Proszę wyznaczyć następujące granice funkcji:*

$$a) \ \lim_{x\to\pi} \frac{\sin 3x}{\cos 5x}; \quad b) \ \lim_{x\to\infty} \frac{\pi - 2\operatorname{arctg} x}{\ln(1+\frac{1}{x^2})}; \quad c) \ \lim_{x\to-\infty} \frac{\sin\ln(2^x+1)}{\sin\ln(3^x+1)}; \quad c) \ \lim_{x\to1^+} x^{\ln(x-1)}.$$

wsk. Można zastosować regułe de L'Hospitala.

Zadanie 56 *Prosze wyznaczyć wzór Taylora z resztą Lagrange'a:*

a) $f(x) = \cos x, x_0 = \pi \wedge n = 6$; *b)* $f(x) = \ln(1+3x), x_0 = 0 \wedge n \in \mathbb{N}$; *c)* $f(x) = e^{2x}, x_0 = 0 \wedge n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 57 *Prosze obliczyć wartości wyrażeń z zadaną dokładnością:*

a) $\cos 0.2, \ 10^{-4}$; *b)* $e, 10^{-3}$; *c)* $\ln 0.9, 10^{-2}$; *d)* $\sqrt[3]{1.003}, 10^{-4}$.

Zadanie 58* *Proszę wyznaczyć wszystkie funkcje rzeczywiste $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dla których zachodzi równość:*

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})(f'(x+y) = f'(x) \cdot f'(y)),$$

oraz pochodna f' jest funkcją ciągłą na prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$. Wsk. Zastosować funkcję pomocniczą g(x)=f'(x).

Zadanie 59* *Niech $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ będzie funkcją Riemanna, zadana wzorem następującym:*

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \ \ f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \wedge NWD(p,q) = 1 \end{cases}.$$

Proszę udowodnić, że funkcja f nie jest różniczkowalna w $x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}} \notin \mathbb{Q}$.

Ciekawostka. *Mozna pokazać, że zbiór punktów dla których funkcja Riemanna nie jest różniczkowalna jest gęstą G_δ tzn. jest przekrojem przeliczalnej ilości zbiorów gęstych i otwartych w $\mathbb{R}$.*

1.4 Funkcje wypukłe

Definicja 1.4.1 *Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie dowolnym odcinkiem, to $f : I \mapsto \mathbb{R}$ jest funkcją wypukłą wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\forall x, y \in I \forall t \in [0,1] \;\; f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

Definicja 1.4.2 *$f : I \mapsto \mathbb{R}$ jest wklęsła na odcinku I wtedy i tylko wtedy gdy $-f$ jest wypukła na I.*

Mamy następujące dwa twierdzenia:

Twierdzenie 1.4.1 *Jeśli f jest funkcją wypukłą na odcinku I, to wtedy mamy*

1. *pochodne jednostronne istnieją w każdym punkcie odcinka I*
2. *$\forall x, y \in I \; x < y \longrightarrow f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq f'_-(y) \leq f'_+(y)$.*

Wniosek 1.4.1 *Funkcja wypukła jest ciągła na I.*

Twierdzenie 1.4.2 *Jeśli funkcja f ma pochodną w każdym punkcie odcinka I i jest niemalejąca (pochodna) to funkcja f jest wypukła na I.*

Dowod. *Dowód tego twierdzenia przeprowadzimy niewprost. Przypuśćmy, że istnieją $x, y \in I$, $t \in [0,1]$ takie że $x < y$ i*

$$f(x_t) > (1-t)f(x) + tf(y) \;\; gdzie \;\; x_t := (1-t)x + ty,$$

to wówczas mamy

$$\begin{aligned} \frac{f(x_t) - f(x)}{x_t - x} &> \frac{(1-t)f(x) + tf(y) - f(x)}{(1-t)x + ty - x} \\ &= \frac{tf(y) - tf(x)}{ty - tx} = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}. \end{aligned}$$

Z drugiej strony mamy

$$\begin{aligned} \frac{f(y) - f(x_t)}{y - x_t} &< \frac{f(y) - ((1-t)f(x) + tf(y))}{y - ((1-t)x + ty)} \\ &= \frac{(1-t)f(y) - (1-t)f(x)}{(1-t)y - (1-t)x} = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}. \end{aligned}$$

Stąd dla pewnego $x, y \in I$ t. że $x < y$ i pewnego $t \in [0,1]$ mamy:

$$\frac{f(x_t) - f(x)}{x_t - x} > \frac{f(y) - f(x)}{y - x} > \frac{f(y) - f(x_t)}{y - x_t}.$$

Korzystając z twierdzenia Lagrange'a istnieją ξ, η takie że $x < \xi < x_t$ i $x_t < \eta < y$ oraz zachodzą nierówności:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_t) - f(x)}{x_t - x} > \frac{f(y) - f(x)}{y - x} > \frac{f(y) - f(x_t)}{y - x_t} = f'(\eta),$$

co jest niemożliwe wobec założenia. ■

Wniosek 1.4.2 *Jeśli funkcja f ma nieujemną drugą pochodną na odcinku I, to jest na tym odcinku wypukła.*

Przykład 1.4.1 *$f(x) = e^x$ na $\mathbb{R}$ ma dodatnią drugą pochodną $f''(x) = e^x > 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$ więc jest wypukła.*

Twierdzenie 1.4.3 (Nierówność Höldera) *Jeśli $(x_i)_{i=1}^n$ $(x_i)_{i=1}^n$ są ciagami liczb dodatnich oraz $p, q > 0$ takie że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, to wtedy zachodzi następująca nierówność:*

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Dowod. *Możemy założyć, że nie wszystkie wyrazy obydwu ciągów są zerowe, bo w przeciwnym przypadku zachodzi równość. Mamy wtedy*

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} &= \sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i^p}{\sum_{i=1}^n x_i^p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{y_i^q}{\sum_{i=1}^n y_i^q}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \sum_{i=1}^n e^{r_i \frac{1}{p}} e^{s_i \frac{1}{q}} = \sum_{i=1}^n e^{\frac{1}{p} r_i + \frac{1}{q} s_i} \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{p} e^{r_i} + \frac{1}{q} e^{s_i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{p} \frac{x_i^p}{\sum_{i=1}^n x_i^p} + \frac{1}{q} \frac{y_i^q}{\sum_{i=1}^n y_i^q}\right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.
\end{aligned}$$

Stąd mamy tezę, co kończy dowód naszego twierdzenia. ■

Twierdzenie 1.4.4 (Nierówność Minkowskiego) *Jeśli $(x_i)_{i=1}^n$ $(x_i)_{i=1}^n$ są ciagami liczb dodatnich oraz $p \geq 1$, to zachodzi nierówność*

$$(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^n x_i^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^n y_i^p)^{\frac{1}{p}}$$

Dowod. *Oczywiście dla $p = 1$ nierówność jest oczywista, zauważmy, że*

$$\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^{p-1} x_i + \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^{p-1} y_i,$$

niech $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$*, to oczywiście* $q=\frac{p}{p-1}$ *i stosując nierówność Holdera mamy*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{p-1}x_i \leq& \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ =&\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{(p-1)\frac{p}{p-1}}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ =&\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{p}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

analogicznie

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{p-1}y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{p}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

więc

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{p}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$

ostatecznie mamy

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

co kończy dowód naszej nierówności. ■

Zadania: wypukłość funkcji oraz punkty przegięcia

Zadanie 60 *Proszę wyznaczyć przedziały wypukłości oraz punkty przegięcia dla zadanych funkcji:*

$$a)\ \ln(1+x^2)\quad b)\frac{1}{1-x^2},\quad c)\sin x+\frac{1}{8}\sin 2x;\quad c)e^{\operatorname{arctg} x};\quad d)\frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

Zadanie 61 *Dla zadanych funkcji, proszę wyznaczyć przedziały monotonicznosci, ekstrema lokalne, przedziały wypukłości orazy p-kty przegięcia:*

$$a)\ \frac{x^3}{1-x};\quad b)\ x\sqrt{1-x^2};\quad c)\ \frac{x}{\ln x};\quad d)\ \frac{\sqrt{x}}{x-1}.$$

Zadanie 62 *Niech* $I\subset\mathbb{R}$ *będzie przedziałem otwartym oraz niech* $f:I\to\mathbb{R}$ *będzie rzeczywistą funkcja wypukłą. Proszę udowodnić:*

$$(\forall x,y,z\in I)\left(x<y<z\longrightarrow\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\leq\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\leq\frac{f(z)-f(y)}{y-z}\right).$$

Zadanie 63 *Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem otwartym oraz niech $f : I \to \mathbb{R}$ będzie rzeczywistą funkcją wypukłą. Proszę udowodnić:*

$$(\forall a, b \in I)\Big(a < b \longrightarrow (\exists C > 0)(\forall x, y \in [a, b])|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|\Big).$$

Wywnioskować stąd, że funkcja ta jest ciągła na przedziale I.

Wsk. Zauważyć, że istnieją $a_0, b_0 \in I$ takie że $a_0 < a < b < b_0$, dobrać $C = \max\{\left|\frac{f(a)-f(a_0)}{a-a_0}\right|, \left|\frac{f(b)-f(b_0)}{b-b_0}\right.$ i zastosować tezę z poprzedniego zadania.

Zadanie 64 *Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem otwartym oraz niech $f : I \to \mathbb{R}$ będzie rzeczywistą funkcją wypukłą. Proszę udowodnić, że w każdym punkcie tego przedziału istnieją pochodne właściwe jednostronne oraz*

$$(\forall x, y \in I)\big(x < y \longrightarrow f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq f'_-(y) \leq f'_+(y)\big).$$

Rozdział 2

Rachunek całkowy

2.1 Całka nieoznaczona

W rozdziale tym zajmiemy się jednym z najważniejszych pojeć Analizy Matematycznej.

Definicja 2.1.1 (Funkcja pierwotna) *Niech I będzie dowolnym przedziałem prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$ oraz niech $f : I \mapsto \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją rzeczywistą. To funkcja $F : I \mapsto \mathbb{R}$ jest funkcją pierwotną do funkcji f na odcinku I jeśli*

$$\forall x \in I \quad F'(x) = f(x).$$

Zachodzi zasadnicze twierdzenie o istnieniu funkcji pierwotnej a mianowicie:

Twierdzenie 2.1.1 *Każda funkcja $f : I \mapsto \mathbb{R}$ ciągła na I ma funkcję pierwotną.*

Dowod. *Niech $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ będzie ciągła funkcją, tak jak jest to w założeniu. Dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$ zdefiniujemy funkcję $f_{:}[a, b] \mapsto \mathbb{R}$ w sposób następujący:*

1. *definiujemy rosnący ciąg $(x_k)_{k=0}^n$ $x_k = a + \frac{b-a}{n}k \in [a, b]$ dla $k \in \{0, \ldots, n\}$*
2. *definiujemy przedziały $A_1 = [x_0, x_1]$, $A_k = (x_{k-1}, x_k]$ dla $k \in \{2, ..., n\}$,*
3. *i funkcję $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \chi_{A_k}(x)\left(\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}(x - x_{k-1}) + f(x_{k-1})\right)$, gdzie*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in A \\ 0 & \text{dla } x \notin A. \end{cases}$$

Zauważmy, że

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \{1, \ldots, n\} \;\; f_n(x_k) = f(x_k),$$

oraz

$$x \in A_k \longrightarrow |f_n(x) - f_n(x_k)| \leq |f_n(x_{k-1}) - f_n(x_k)| = |f(x_{k-1}) - f(x_k)|.$$

Najpierw pokażemy zbieżnośc jednostajną ciągu f_n do f. Wiemy, że funkcja f jest ciągła jednostajnie na $[a,b]$, to dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$, że $|x-x'| < \delta$ to $|f(x)-f(x')| < \frac{\epsilon}{2}$. Instnieje więc $n_0 \in \mathbb{N}$, że jeśli $n > n_0$, to dla $k \in \{1,...,n\}$ $|x_k - x_{k-1}| < \delta$. Wówczas dla każdego $k \in \{1,\ldots,n\}$ i każdego $x \in A_k$ mamy:

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f(x)| \leq & |f_n(x) - f_n(x_k)| + |f_n(x_k) - f(x)| = |f_n(x) - f_n(x_k)| + |f(x_k) - f(x)| \\ \leq & |f_n(x_{k-1}) - f_n(x_k)| + |f(x_k) - f(x)| = 2|f(x_k) - f(x_{k-1})| < 2\frac{\epsilon}{2} = \epsilon.\end{aligned}$$

Pokazaliśmy więc, że $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$.

Następnie skonstruujemy ciąg funkcyjny $(g_n)_{n=1}^{\infty}$, taki, że

1. $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(a)$ *istnieje oraz*

2. $n \in \mathbb{N} \longrightarrow \forall x \in [a,b]\ \ g_n'(x) = f_n(x)$

to wystarczy, by istniała $g = \lim\limits_{n\to\infty} g_n$ na $[a,b]$ taka że $g' = f$ na $[a,b]$.

Oczywiście, jeśli $x \in A_k$, to $f_n(x) = f(x_{k-1}) + \alpha_k(x - x_{k-1})$, gdzie $\alpha_k = \frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$. Niech

$$g_n(x) = (f(x_{k-1}) - \alpha_k x_{k-1})x + \frac{\alpha_k}{2}x^2 + c_k(n) \ \ dla\ x \in A_k,$$

wtedy oczywiście $g_n'(x) = f_n(x)$ dla $x \in (x_{k-1}, x_k)$. Na to, by g_n była ciągła potrzeba i wystarcza aby g_n była ciągła w x_k dla $k \in \{1,\ldots,n-1\}$. To oznacza, że dla $k \in \{1,\ldots,n-1\}$ zachodzi

$$\begin{aligned}g_n(x_k) = &\lim_{x\to x_k^+} g_n(x) \equiv (f(x_{k-1}) - \alpha_k x_{k-1})x_k + \frac{\alpha_k}{2}x_k^2 + c_k(n) \\ = &\lim_{x\to x_k^+} (f(x_k) - \alpha_{k+1}x_k)x + \frac{\alpha_{k+1}}{2}x^2 + c_{k+1}(n) \\ \equiv &(f(x_{k-1}) - \alpha_k x_{k-1})x_k + \frac{\alpha_k}{2}x_k^2 + c_k(n) = (f(x_k) - \alpha_{k+1}x_k)x_k + \frac{\alpha_{k+1}}{2}x_k^2 + c_{k+1}(n).\end{aligned}$$

Więc mamy:

$$c_{k+1}(n) = c_k(n) + (f(x_{k-1}) - f(x_k) + \alpha_{k+1}x_k - \alpha_k x_{k-1})x_k + (\alpha_k - \alpha_{k+1})\frac{x_k^2}{2}$$

dla $k = 2,\ldots,n-1$ a stąd mamy

$$c_{k+1}(n) = c_1(n) + \sum_{i=2}^{k}(f(x_{i-1}) - f(x_i) + \alpha_{i+1}x_i - \alpha_i x_{i-1})x_i + (\alpha_i - \alpha_{i+1})\frac{x_i^2}{2}.$$

Łatwo pokazać, że funkcja g_n jest różniczkowalna na $[a,b]$ oraz $g_n' = f_n$ na $[a,b]$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Teraz, dobierzmy ciąg $(c_1(n))_{n=1}^{\infty}$ *aby dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ *zachodziła równość* $g_n(x_0 = a) = 0$ *tzn.*

$$\begin{aligned}0 =& g_n(x_0 = a) = (f(x_0) - \alpha_1 x_0)x_0 + \frac{\alpha_1}{2}x_0^2 + c_1(n)\\ =&(f(a) - \frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a}a)a + \frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a}\frac{1}{2}a^2 + c_1(n)\end{aligned}$$

dla $n \in \mathbb{N}$*. Warunki* $1), 2)$ *są spełnione, więc istnieje* $g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ *że* $g' = f$ *na* $[a, b]$*, co kończy dowód naszego twierdzenia.* ■

Twierdzenie 2.1.2 *Jeśli* $F, G : I \mapsto \mathbb{R}$ *są funkcjami pierwotnymi do* $f : I \mapsto \mathbb{R}$ *na* I*, to istnieje stała* $c \in \mathbb{R}$ *że*

$$\forall x \in \mathbb{R} \;\; G(x) = F(x) + c.$$

Dowod. *Załóżmy, że twierdzenie nie zachodzi dla pewnej funkcji* f *na* I*, niech* $H(x) = G(x) - F(x)$*, to istnieją* $x, x' \in I$*, że* $H(x) \neq H(x')$*. Ale* H *jest funkcją różniczkowalą na* I*, to z Twierdzenia Lagrange'a wynika, że istnieje* $\xi \in (x, x')$ *dla którego mamy:*

$$0 \neq \frac{H(x) - H(x')}{x - x'} = H'(\xi) = G'(\xi) - F'(\xi) = f(\xi) - f(\xi) = 0,$$

co prowadzi do sprzeczności z założeniem, że H *nie jest stała na* I*. Otrzymujemy stąd*

$$\forall x \in I \;\; c = H(x) = G(x) - F(x)$$

co kończy dowód naszego twierdzenia. ■

Definicja 2.1.2 *Niech* $f : I \mapsto \mathbb{R}$*, to następujący zbiór*

$$\left\{F \in \mathbb{R}^I : \; F - \textit{funkcja pierwotna do } f\right\}$$

nazywamy całką nieoznaczoną z funkcji f *na przedziale* I*. zbiór ten oznaczamy przez*

$$\int f(x)\,dx \textit{ lub też oznaczamy przez } \int f.$$

Na mocy poprzedniego Twierdzenia całkę z naszej funkcji f *możemy zapisać jako:*

$$\int f = \left\{F_0 + c : c \in \mathbb{R}\right\}$$

oraz F_0 *jest ustaloną funkcją pierwotną do* f *(na zadanym odcinku* I*).*

Mamy podstawowe twierdzenie o całce nieoznaczonej:

Twierdzenie 2.1.3 *Jeśli* $f, g : I \mapsto \mathbb{R}$ *mają funkcje pierwotne, to wtedy mamy*

1. *$(\int f)' = f$ na I*

2. *$\int f' = f + c$ o ile f' istnieje na I*

3. *$\int f + g = \int f + \int g$*

4. *jeśli $\alpha \in \mathbb{R}$ to $\int \alpha f = \alpha \int f$.*

Dowod. *Z definicji całki nieoznaczonej, mamy*

$$F \in \int \longrightarrow F' = f \text{ na odcinku } I,$$

co kończy dowód 1).

Oczywiście funkcja f jest pierwotną funkcją do f', to z ostatniego twierdzenia mamy, że każdą funkcję pierwotna do f' otrzymamy przez dodanie pewnej stałej $c \in \mathbb{R}$ więc

$$g \in \int f \longrightarrow \exists c \in \mathbb{R} \;\; \forall x \in I \;\; g(x) = f(x) + c \text{ stąd } g' = (f + c)' = f',$$

co kończy 2).

Niech F, G to są funkcje pierwotne do f, g odpowiednio. Więc mamy:

$$\forall x \in I \;\; (F + G)'(x) = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$$

więc $F + G \in \int(f + g)$ i na odwrot jeśli $H \in \int(f + g)$ to wtedy $H(x) = F(x) + (H - F)(x)$. Musimy pokazać, że $(H - F) \in \int g$. Oczywiscie mamy

$$(H - F)' = H' - F' = (f + g) - f = g,$$

co dowodzi, że istnieje stała $c \in \mathbb{R}$, że $G = (H - F) + c$, więc $H = F + G + c$, czyli

$$H \in \int f + \int g \equiv \left\{F + G \in \mathbb{R}^I : F \in \int f \wedge G \in \int g\right\}.$$

Podobnie dowodzimy punkt ostatni naszego twierdzenia. ■

Przykład 2.1.1 *Przykłady całek*

1. *Jeśli $\alpha \neq -1$ to $(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1})' = x^\alpha$ wtedy $\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$,*

2. *$(\ln x)' = x^{-1}$ to $\int x^{-1} \, dx = \ln |x| + c$,*

3. *$(e^x)' = e^x$ to $\int e^x \, dx = e^x + c$,*

4. *$(\sin x)' = \cos x$ to $\int \cos x \, dx = \sin x + c$,*

5. *$(-\cos x)' = \sin x$ to $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$,*

6. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ *to* $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$,

7. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2+1}$ *to* $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + c$.

Twierdzenie 2.1.4 (Całkowanie przez podstawienie) *Niech* $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ *będzie funkcją ciągłą oraz* $g : [\alpha, \beta] \mapsto [a, b]$ *ma pochodną ciągłą na* $[\alpha, \beta]$*, to wtedy mamy*

$$\int (f \circ g)(t) g'(t)\, dt = F(x) = \int f(x)\, dx,$$

gdzie F *funkcja pierwotna do* f *na* $[a, b]$ *i* $x = g(t)$*.*

Dowod. *Oczywiście z naszych założeń wynika, że funkcja* $f(g(t))g'(t)$ *ma funkcję pierwotną, bo jest ciągła na* $[\alpha, \beta]$*. Niech* $H(t) \equiv (F \circ g)(t)$*, to wtedy*

$$H'(t) = (F \circ g)'(t) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t),$$

więc

$$\int f(g(t))g'(t)\, dt = F(x) = \int f(x)\, dx,$$

gdzie $x = g(t)$*, co kończy dowód naszego twierdzenia.* ■

Twierdzenie 2.1.5 (Całkowanie przez części) *Jeśli* $f, g : I \mapsto \mathbb{R}$ *mają ciągłe pochodne na* I*, to wtedy zachodzi wzór*

$$\int f'g = fg - \int fg'.$$

Dowod. *Oczywiście całki we wzorze istnieją na mocy ciągłości pochodnych, więc mamy*

$$(fg)' = f'g + fg' \longrightarrow fg = \int (f'g + fg') = \int f'g + \int fg',$$

co po przekształceniu daje żądany wzór. ■

Przykład 2.1.2 *Chcemy obliczyć całkę*

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx.$$

Niech $f(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$ *i* $g(x) = x^2 + 1$*, to wtedy mamy*

$$f \circ g(x) = \frac{1}{\sqrt{g(x)}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},\ g'(x) = 2x,$$

więc na mocy twierdzenia o całkowaniu przez podstawienie, mamy

$$\begin{aligned}\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx &= \int f(g(x))g'(x)\, dx = \int f(y) \\ &= \int y^{-\frac{1}{2}} dy = \frac{y^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + c.\end{aligned}$$

Przykład 2.1.3 *Całkowanie przez części*

$$\begin{aligned}\int \ln x\, dx = &\int (x)' \ln x\, dx = x\ln x - \int x(\ln x)'\, dx\\ =&x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int 1\, dx = x\ln x - x + c.\end{aligned}$$

Przykład 2.1.4 *Całkowanie przez podstawienie*

$$\begin{aligned}\int \cos^{2n+1} x\, dx = &\int (1-\sin^2 x)^n \cos x\, dx = \int (1-(\sin x)^2)^n (\sin x)'\, dx\\ =&\left| y(x) = \sin x \right| = \int (1-y^2)^n\, dy = \int \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-y^2)^k\, dy\\ =&\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{y^{2k+1}}{2k+1} + C = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{\sin^{2k+1} x}{2k+1} + C.\end{aligned}$$

Przykład 2.1.5 *Całki iterowane Niech $I_n = \int \cos x\, dx$, to oczywiście $I_1 = \sin x + c$ oraz $I_0 = x$. Mamy wtedy dla $n > 1$:*

$$\begin{aligned}I_n = &\int \cos x \cos^{n-1} x\, dx = \int (\sin x)' \cos^{n-1} x\, dx = \sin x \cos^{n-1} x - \int \sin x (\cos^{n-1} x)'\, dx\\ = &\sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \sin^2 x \cos^{n-2} x, dx\\ = &\sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int (1-\cos^2 x) \cos^{n-2} x \sin x\, dx\end{aligned}$$

Więc mamy gdy $n > 1$

$$I_n = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \longrightarrow I_n = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Niech teraz $J_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx$, to $I_1 = \operatorname{arctg} x + c$. Dla $n > 1$ mamy

$$\begin{aligned}J_{n-1} = &\int (x)' \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} dx = \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} - \int x (\frac{1}{(x^2+1)^{n-1}})' dx\\ =&\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} - \int x(-(n-1)) \frac{2x}{(x^2+1)^n} dx\\ =&\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + 2(n-1) \int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^n} dx\\ =&\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + 2(n-1) J_{n-1} - 2(n-1) J_n,\end{aligned}$$

ostatecznie dla $n > 1$ mamy

$$J_n = \frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} J_{n-1}.$$

2.2 Całkowanie funkcji wymiernych

Niech

$$W(x) = \frac{f(x)}{\prod\limits_{i=1}^{r}(x-x_i)^{n_i}\prod\limits_{j=1}^{s}((x+a_j)^2+b_j^2)^{m_j}}$$

będzie funkcją wymierną właściwą, to z algebry wiadomo, że funkcje wymierną da się zapisać jako pewną sumę ułamków prostych:

$$W(x) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{n_i}\frac{A_{ik}}{(x-x_i)^k} + \sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{B_{jk}x + C_{jk}}{((x+a_j)^2+b_j^2)^k}.$$

gdzie

$$\frac{A}{(x-x_0)^n} \text{ ułamek prosty pierwszego rodzaju,}$$

$$\frac{Bx+C}{((x-a)^2+b^2)^m} \text{ ułamek prosty drugiego rodzaju.}$$

Wtedy

$$\int \frac{A}{(x-x_0)^n}dx = \begin{cases} A\ln|x-x_0| + c & \text{dla } n=1 \\ A\frac{(x-x_0)^{-n+1}}{-n+1} & \text{dla } n>1, \end{cases}$$

natomiast

$$\int \frac{Bx+C}{((x+a)^2+b^2)^n}dx = \frac{B}{2}\int \frac{2(x+a)}{((x+a)^2+b^2)}dx + (-Ba+C)\int \frac{1}{((x+a)^2+b^2)^n}dx.$$

Pierwsza całka da się policzyć stosując podstawienie $y=(x+a)^2+b^2$

$$\int \frac{2(x+a)}{((x+a)^2+b^2)^n} = \left| \begin{matrix} y=(x+a)^2+b^2 \\ dy = 2(x+a)dx \end{matrix} \right| = \int y^{-n}\,dy = \begin{cases} \ln|y| & \text{dla } n=1 \\ \frac{y^{-n+1}}{-n+1} & \text{dla } n>1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \ln|(x+a)^2+b^2| & \text{dla } n=1 \\ \frac{((x+a)^2+b^2)^{-n+1}}{-n+1} & \text{dla } n>1. \end{cases}$$

drugą całkę liczymy następująco:

$$\int \frac{1}{((x+a)^2+b^2)^n}dx = \frac{1}{b^{2n}}\int \frac{1}{((\frac{x+a}{b})^2+1)^n} = \left| \begin{matrix} y=\frac{x+a}{b} \\ b\,dy = dx \end{matrix} \right| = \frac{b}{b^{2n}}\int \frac{dy}{(y^2+1)^n}$$

Ostatnią całkę liczymy ze wzoru rekurencyjnego na $J_n = \int \frac{dy}{(y^2+1)^n}$.

2.3 Całkowanie funkcji trygonometrycznych

Niech $R(u,v)$ będzie dowolną funkcją wymierną, naszym zadaniem jest podanie algorytmy obliczającego całkę $\int R(\sin x, \cos x)dx$.

1. *Podstawienie uniwersalne (zwane również żelazne) $t = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$ to wtedy $x = 2\mathrm{arctg}\,t$ stąd $dx = \frac{2\,dt}{t^2+1}$ mamy ponadto*

$$t^2 = \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} - 1 \longrightarrow \frac{1}{1+t^2} = \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$$

   Więc

$$\cos x = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{2-1-t^2}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

   Natomiast

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = 2t\frac{1}{1+t^2} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

   Ostatecznie

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2} = \int W(t)\,dt,$$

   gdzie $W(t)$ jest funkcją wymierną.

2. *Jeśli $R(-u,v) = -R(u,v)$ to $t = \cos x$, więc $\sin x = \sqrt{1-t^2}$ oraz $dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.*

3. *Jeśli $R(u,-v) = -R(u,v)$ to $t = \sin x$, więc $\cos x = \sqrt{1-t^2}$ oraz $dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$*

4. *Jeśli $R(-u,-v) = R(u,v)$ to $t = \mathrm{tg}\,x$, więc $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ oraz*

$$t^2 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \longrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \longrightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2} \longrightarrow \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Można pokazać, że w przypadkach $2), 3), 4)$ całka z funkcji trygonometrycznych sprowadza się do całki z funkcji wymiernej $\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int W(t)\,dt$.

2.4 Całkowanie funkcji z niewymiernościami

Niech tak jak poprzednio $R(u,v)$ oznacza dowolną funkcję wymierną dwóch zmiennych.

1. $\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})\,dx$ *to podstawmy* $x = a\sin t$, *wtedy* $dx = a\cos x\,dx$ *oraz*

$$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t} = a\cos t,$$

więc ostatecznie mamy

$$\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})\,dx = \int R(a\sin t, a\cos t)a\cos t\,dt.$$

2. $\int R(x,\sqrt{a^2+x^2})\,dx$ $x = a\,\mathrm{sh}\,t$, *to* $dx = a\,\mathrm{ch}\,t\,dt$ *oraz*

$$\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2+a^2\,\mathrm{sh}^2 t} = a\,\mathrm{ch}\,t,$$

więc ostatecznie

$$\int R(x,\sqrt{a^2+x^2})\,dx = \int R(a\,\mathrm{sh}\,t, a\,\mathrm{ch}\,t)a\,\mathrm{ch}\,t\,dt.$$

3. $\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})\,dx$ $x = a\,\mathrm{ch}\,t$, *to* $dx = a\,\mathrm{sh}\,t\,dt$ *oraz*

$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2\,\mathrm{ch}^2 t-a^2} = a\,\mathrm{sh}\,t,$$

więc ostatecznie

$$\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})\,dx = \int R(a\,\mathrm{ch}\,t, a\,\mathrm{sh}\,t)a\,\mathrm{sh}\,t\,dt.$$

Można również stosować podstawienia Eulera. Niech będzie dany trójmian kwadratowy ax^2+bx+c, $a>0$ *i chcemy obliczyć całkę* $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$. *We”zmy podstawienie następujące* $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x+t$ *to wtedy*

$$ax^2+bx+c = ax^2+2\sqrt{a}tx+t^2 \longrightarrow (b-2\sqrt{a}t)x = t^2-c \longrightarrow x = \frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t}$$

więc

$$dx = \frac{2t(b-2\sqrt{a}t)-(t^2-c)(-2\sqrt{a})}{(b-2\sqrt{a}t)^2}dt$$

ostatecznie

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx = \int R(\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t}, \sqrt{a}(\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t})+t)\frac{2t(b-2\sqrt{a}t)-(t^2-c)(-2\sqrt{a})}{(b-2\sqrt{a}t)^2}dt.$$

Jeśli $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, *to biorąc podstawienie (Eulera)* $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = t(x-x_2)$ *mamy:*

$$a(x-x_1)(x-x_2) = t^2(x-x_2)^2 \longrightarrow a(x-x_1) = t^2(x-x_2) \longrightarrow (a-t^2)x = ax_1 - x_2t^2$$

stąd

$$x = \frac{ax_1 - t^2x_2}{a-t^2}$$

więc

$$\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = t\left(\frac{ax_1-t^2x_2}{a-t^2} - x_2\right)$$

oraz

$$dx = \frac{-2tx_2(a-t^2) - (ax_1-t^2x_2)(-2t)}{(a-t^2)^2}dt = \frac{2at(x_1-x_2)}{(a-t^2)^2}dt$$

więc ostatecznie

$$\int R(x, \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)})\,dx = \int R\left(\frac{ax_1-t^2x_2}{a-t^2}, t\left(\frac{ax_1-t^2x_2}{a-t^2} - x_2\right)\right)\frac{2at(x_1-x_2)}{(a-t^2)^2}dt.$$

Zadania: całki nieoznaczone

Zadanie 65 *Proszę wyznaczyc całki nieoznaczone:*

$$a)\ \int \frac{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}}\,dx \quad b) \int \frac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}}\,dx, \quad c) \int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}\,dx.$$

Zadanie 66 *Stosując wzór na całkowanie przez części, proszę obliczyć:*

$$a)\ \int x^2e^{-5x}\,dx; \quad b)\ \int \sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx; \quad c)\ \int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx; \quad d)\ \int \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x}}\,dx; \quad e)\ \int \ln(x+1)\,dx.$$

Zadanie 67 *Korzystając z twierdzenia o całkowaniu przez podstawienie, proszę obliczyć:*

$$a)\ \int \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}}\,dx; \quad b)\ \int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx; \quad c)\ \int \frac{\ln x}{x}\,dx; \quad d)\ \int x^4\sqrt[7]{3x^5-1}\,dx; \quad e)\ \int \frac{e^x}{e^{3x}}\,dx.$$

Zadanie 68 *Proszę wyznaczyć całkę:*

$$a) \int \max\{x, x^2\}\,dx; \quad b) \int (|x-1| + |x+1|)\,dx.$$

Zadanie 69 *Proszę udowodnić następujacy wzór rekurencyjny:*

$$(\forall n \in \mathbb{N})\left(2 < n \longrightarrow \int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}\,dx\right).$$

Zadanie 70 *Proszę wyznaczyć wzór rekurencyjny dla podanych całek:*

$$a)\int \ln^n x\,dx; \qquad b)\int \cos^n x\,dx.$$

Zadanie 71 *Proszę wyznaczyć całki z funkcji wymiernych:*

$$a)\int \frac{6x+3}{x62+x+4}\,dx;\ b)\int \frac{dx}{(x^2-4x+5)^2};\ c)\int \frac{x+2}{x(x-2)}\,dx;\ d)\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)};\ e)\int \frac{x^2}{x^2+2x}$$

Zadanie 72 *Proszę wyznaczyć całki z funkcji trygonometrycznych:*

$$a);\int \sin^4 x\cos^5 x\,dx;\ b)\int \sin^4 x\,dx;\ c)\int \sin^2 2x\sin^2 x\,dx;\ d)\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}\,dx;\ e)\int \frac{dx}{1-\operatorname{tg} x};$$

$$f)\int \frac{dx}{3\sin x+4\cos x+1};\ g)\ \frac{dx}{\cos x};\ h)\int \cos x\cos 5x\,dx\ i)\int \cos x\,\cos\frac{x}{2}\,\cos\frac{x}{4}\,dx.$$

Zadanie 73 *Proszę wyznaczyć całki z funkcji niewymienych:*

$$a)\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}};\qquad b)\int x^3\sqrt{4+x^2}\,dx;\qquad c)\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}.$$

2.5 Całka Riemanna

Niech $a, b \in \mathbb{R}$ będą dwiema róznymi liczbami rzeczywistymi, to podziałem odcinka $[a, b]$ nazywamy dowolny ciąg skończony rosnący $P([a, b]) = (x_0, \ldots, x_n)$ taki że

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b.$$

Niech $\mathcal{P}([a, b])$ będzie zbiorem wszystkich podziałów odcinka $[a, b]$, to możemy w tym zbiorze wprowadzić porządek częściowy $\mathcal{P}([a, b], \leq)$. Niech $P, P' \in \mathcal{P}([a, b])$ to mówimy, że $P \leq P'$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje funkcja $f \in \{0, \ldots, |P'|\}^{\{0,\ldots,|P|\}}$ taka że

1. $f(0) = 0 \wedge f(|P|) = |P'|$
2. f *jest rosnąca na* $\{0, \ldots, |P|\}$.

Definicja 2.5.1 (Całka górna i dolna) *Niech $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną na $[a, b]$ i $P \in \mathcal{P}([a, b])$ będzie ustalonym podziałem, to wówczas*

1. $S(f, P) := \sum\limits_{k=1}^{|P|} \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}(x_k - x_{k-1})$ *nazywamy sumą całkową górną oraz*
2. $\overline{\int\limits_a^b} f(x)\, dx := \inf\{S(f, P) : \ P \in \mathcal{P}([a, b])\}$ *nazywamy całką górną z funkcji f na $[a, b]$,*

analogicznie

1. $s(f, P) := \sum\limits_{k=1}^{|P|} \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}(x_k - x_{k-1})$ *nazywamy sumą całkową górną oraz*
2. $\underline{\int\limits_a^b} f(x)\, dx := \sup\{s(f, P) : \ P \in \mathcal{P}([a, b])\}$ *nazywamy całką dolną z funkcji f na $[a, b]$.*

Definicja 2.5.2 (Całka Riemanna) *Mówimy, że f jest całkowalna w sensie Riemanna wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \overline{\int_a^b} f(x)\, dx \equiv \int_a^b f(x)\, dx.$$

Mamy następujące twierdzenie dotyczące podziałów i sum całkowych.

Twierdzenie 2.5.1 *Niech $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną na $[a, b]$, to*

1. $(\forall P, P' \in \mathcal{P}([a, b]))(\exists P_0 \in \mathcal{P}([a, b]))\ \ P \leq P_0 \wedge P' \leq P_0,$
2. $(\forall P, P' \in \mathcal{P}([a, b]))\ \ P \leq P' \longrightarrow s(f, P) \leq s(f, P') \leq S(f, P') \leq S(f, P),$

3. $(\forall P \in \mathcal{P}([a,b]))\quad s(f,P) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq S(f,P)$.

Twierdzenie 2.5.2 *Niech $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$, to f jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a,b]$ wtedy i tylko wtedy gdy*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists P \in \mathcal{P}([a,b]))\quad S(f,P) - s(f,P) < \epsilon.$$

Dowod. $\rightarrow$ *Niech $\epsilon > 0$ będzie dowolną liczbą rzeczywistą, to z tego, że f jest calkowalna w sensie Riemanna na $[a,b]$ wynika, że istnieją $P_1, P_2 \in \mathcal{P}([a,b])$ że*

$$\int_a^b f(x)\,dx - \epsilon < s(f,P) \leq S(f,P') < \int_a^b f(x)\,dx + \epsilon,$$

to z własności 1) i 2) poprzedniego twierdzenia, wynika, że istnieje $P_0 \in \mathcal{P}([a,b])$ że $P \leq P_0$ i $P' \leq P_0$ a stąd mamy

$$\int_a^b f(x)\,dx - \epsilon < s(f,P) \leq s(f,P_0) \leq S(f,P_0) \leq S(f,P') < \int_a^b f(x)\,dx + \epsilon,$$

a więc ostatecznie

$$S(f,P_0) - s(f,P_0) < \epsilon.$$

$\leftarrow$ *Niech $\epsilon > 0$ będzie dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią, to istnieje podział $P \in \mathcal{P}([a,b])$ taki że,*

$$S(f,P) - s(f,P) < \epsilon,$$

ale z własności 3) poprzedniego twierdzenia mamy

$$\left| \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \right| < |S(f,P) - s(f,P)| < \epsilon$$

co kończy dowód naszego twierdzenia. ■

Twierdzenie 2.5.3 *Jeśli $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ to*

1. *f-ciągła na $[a,b]$ to jest całkowalna na $[a,b]$ w sensie Riemanna,*

2. *f-monotoniczna na $[a,b]$ to jest całkowalna na $[a,b]$ w sensie Riemanna.*

Udowodnimy twierdzenie, które daje pełną charakteryzację funkcji całkowalnych w sensie Riemanna. W tym celu, wprowadzimy dwa pojęcia, które odegrają ważną rolę w dowodzie omawianego twierdzenia.

Definicja 2.5.3 *Niech $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$, niech $A \subset [a,b]$, to oscylacją funkcji f na zbiorze A nazywamy liczbę*

$$osc_f(A) := \sup\{|f(x) - f(y)| : \ \ x, y \in A\}.$$

oczywiście mamy fakt

Fakt 2.5.1 *Jeśli $A \subset B$ to $osc_f(A) \leq osc_f(B)$.*

Definicja 2.5.4 *Niech $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$, niech $A \subset [a,b]$, to wahanie funkcji f w $x \in [a,b]$ nazywamy liczbę*

$$w_f(x) := \inf\{osc_f(I) : \ \ x \in I, \ \textit{przedział otwarty}\}.$$

Twierdzenie 2.5.4 *$f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ jest ciągła na $[a,b]$ wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\forall x \in [a,b] \ \ w_f(x) = 0.$$

Dowod. *Z definicji ciągłości mamy, że dla dowolnego $\epsilon > 0$ i $x_0 \in [a,b]$ istnieje $\delta > 0$ że dla każdego $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ więc*

$$0 \leq w_f(x_0) \leq osc_f((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) < 2\epsilon$$

ale ϵ dowolne, stąd mamy ciągłość funkcji w x_0 które jest dowolne.

Dowód w drugą stronę jest równie prosty, niech $x_0 \in [a,b]$ będzie dowlne, to oczywiscie z założenia wahanie funkcji jest równe zeru $w_f(x_0) = 0$, to dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje przedział otwarty I_{x_0} zawierający x_0 taki, że $osc_f(I_{x_0}) < \epsilon$, to istnieje $\delta > 0$ taka że $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I_{x_0}$, więc z monotoniczności osc_f mamy

$$0 \leq |f(x) - f(x_0)| \leq osc_f(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \leq osc_f(I_{x_0}) < \epsilon,$$

co kończy dowód naszego twierdzenia. ■

Definicja 2.5.5 (Zewnętrzna miara Lebesgue'a) *Niech $A \subset \mathbb{R}$, to liczbę*

$$\lambda^*(A) := \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}}(b_n - a_n) : \ A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n), a_n < b_n\right\}$$

nazywamy zewnętrzną miarą Lebesgue'a zbioru $A \subset \mathbb{R}$. $A \in \mathbb{L}$ wtedy i tylko wtedy gdy $\lambda^*(A) = 0$.

Fakt 2.5.2 *Miara zewnętrzna ma następujące własności*

1. *$A \subset B \subset \mathbb{R}$ to $0 \leq \lambda^*(A) \leq \lambda^*(B) \leq \infty$,*
2. *$\lambda^*(\emptyset) = 0$*
3. *$\lambda^*(A \cup B) \leq \lambda^*(A) + \lambda^*(B)$*

4. $\lambda^*(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(A_n)$.

Fakt 2.5.3 *Rodzina* $\mathbb{L} = \{A \in P(\mathbb{R}) :\ \lambda^*(A) = 0\}$ *jest ideałem wszystkich zbiorów miary zero, tzn.*

- $(\forall A \in P(\mathbb{R}))(\forall B \in \mathbb{L})\ \ A \subseteq B \longrightarrow A \in \mathbb{L}$,
- $(\forall A, B \in \mathbb{L})\ \ A \cup B \in \mathbb{L}$,

co więcej, jeżeli $\mathcal{J} = \{A_n :\ n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{L}$, *to* $\bigcup \mathcal{J} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathbb{L}$.

Twierdzenie 2.5.5 *Jeśli* $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ *to* f *jest całkowalna w sensie Riemanna na* $[a, b]$ *wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\{x \in [a, b] :\ f - \text{ nie jest ciągła w } x\} \in \mathbb{L} = \text{ ideał zbiorów miary zero Lebesgue'a.}$$

Dowod. *"←". Niech* $w_f(x)$ *będzie wahaniem funkcji* f *w puinkcie* x. *Załóżmy, że* $\{x \in [a, b] :\ w_f(x) > 0\} \in \mathbb{L}$ *jest zbiorem miary Lebesgue'a zero. Niech* $\epsilon > 0$ *będzie dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią. To wtedy*

$$(\exists]ck)\ \mathcal{K} = \{I_n : n \in \mathbb{N} \wedge I_n \text{ odcinek otwarty }\}, D \subseteq \bigcup \mathcal{K} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \wedge \sum_{n\in\mathbb{N}} |I_n| < \frac{\epsilon}{2osc([a, b])}.$$

Niech $x \in [a, b] \setminus \bigcup \mathcal{K}$, *to istnieje* I_x *- otwarty odcinek że oscylacja na tym odcinku jest dostatecznie mała* $osc(I_x) < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$. *To wtedy*

$$[a, b] \subseteq \bigcup \mathcal{K} \cup \bigcup_{x\in[a,b]\setminus\bigcup\mathcal{K}} I_x = \bigcup_{i=1}^{n} I_{n_i} \cup \bigcup_{j=1}^{m} I_{x_j}.$$

Ostatnia równość wynika ze zwartości odcinka $[a, b]$.

Łatwo pokazać, że istnieje taki podział $P \in \mathcal{P}([a, b])$ *i rodzina* $\mathcal{J}$, *że*

1. $[a, b] \subseteq \bigcup \mathcal{J}$,
2. $\mathcal{J} = \{J_k : k \in \{1, \ldots |P|\}\}$ *i* $J_k = [y_{k-1}, y_k]$ *dla* $k \in \{1, \ldots |P|\}$,
3. *istnieje* $\mathcal{J}_0 \subset \mathcal{J}$ *dla którego* $\bigcup \mathcal{J}_0 = \bigcup_{i=1}^{n} I_{n_i}$ *i* $\sum_{J\in\mathcal{J}_0} |J| \leq \sum_{i=1}^{n} |I_{n_i}|$,
4. $(\forall J \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{J}_0)(\exists j \in \{1, \ldots, m\})\ \ J \subset I_{x_j}$.

Wtedy mamy

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{|P|} osc(J_k)|J_k| &= \sum_{J\in J_0} osc(|J|)|J| + \sum_{J\notin\mathcal{J}_0} osc(J)|J| \\ &\leq osc([a, b]) \sum_{J\in\mathcal{J}_0} |J| + \sum_{J\notin J_0} \frac{\epsilon}{2(b-a)}|J| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2(b-a)}(b-a) = \epsilon,\end{aligned}$$

to kończy dowód twierdzenia w jedną stronę.

"$\rightarrow$". Niewprost, załóżmy, że $\lambda^*(\{x \in [a,b]: \ w_f(x) > 0\})$ *to wtedy*

$$
\begin{aligned}
0 <& \lambda^*(\{x \in [a,b]: \ w_f(x) > 0\}) = \lambda^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x \in [a,b]: \ \frac{b-a}{n+1} \le w_f(x) < \frac{b-a}{n}\}) \\
\le& \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(\{x \in [a,b]: \ \frac{b-a}{n+1} \le w_f(x) < \frac{b-a}{n}\}),
\end{aligned}
$$

to istnieje $n \in \mathbb{N}$ *że* $\delta_0 := \lambda^*(\{x \in [a,b]: \ \frac{b-a}{n+1} \le w_f(x) < \frac{b-a}{n}\}) > 0$. *Niech* $\epsilon := \delta\frac{b-a}{n+1}$ *i niech* $P \in \mathcal{P}([a,b])$ *będzie dowolnym podziałem odcinka* $[a,b]$. *Niech*

$$
L = \{k \in \{1,\dots,|P|\}: \ \ [x_{k-1},x_k] \cap \{x : \frac{b-a}{n+1} \le w_f(x) < \frac{b-a}{n}\} \ne \emptyset\},
$$

to wtedy

$$
\{x : \frac{b-a}{n+1} \le w_f(x) < \frac{b-a}{n}\} \longrightarrow \delta_0 \le \sum_{k\in L}(x_k - x_{k-1}).
$$

Przyjmując za $I_k := [x_{k-1},x_k]$ *i* $\Delta x_k := x_k - x_{k-1}$ *mamy*

$$
\begin{aligned}
S(f,P) - s(f,P) =& \sum_{k=1}^{|P|} osc(I_k)\Delta x_k \ge \sum_{k\in L} osc(I_k)\Delta x_k \ge \sum_{k\in L}\frac{b-a}{n+1}\Delta x_k \\
\ge& \frac{b-a}{n+1}\delta_0 = \epsilon.
\end{aligned}
$$

Więc $S(f,P) - s(f,P) \ge \epsilon$ *dla dowolnego podziału* $P \in \mathcal{P}([a,b])$, *co kończy dowód naszego twierdzenia.* ■

Przykład 2.5.1 (funkcja Riemanna) *Funkcję Riemanna określamy następujęaco:*

$$
f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & gdy \quad x = \frac{p}{q} \wedge NWD(p,q) = 1 \\ 0 & gdy \qquad\qquad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}
$$

Pokażemy, że funkcja Riemanna $f(x)$ *jest co najwyżej nieciągła w punktach wymiernych. Niech* $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *będzie ustaloną liczbą niewymierną i niech* $\epsilon > 0$. *To dla każdego przedziału* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ *i dla każdego* $q \in \mathbb{N}$ *mamy*

$$
\left\{p \in \mathbb{Z}: \ \frac{p}{q} \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\right\} \text{ jest skończony.}
$$

oraz $\{q \in \mathbb{N}: \ \frac{1}{q} \ge \epsilon\}$ *jest zbiorem skończonym, Stąd istnieje* $\delta > 0$ *taka że*

$$
\left\{\frac{p}{q} \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta): \ \ NWD(p,q) = 1 \wedge \frac{1}{q} \ge \epsilon\right\} = \emptyset.
$$

Stąd dla każdego $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap \mathbb{Q}$ $f(x) < \epsilon$ *a stąd dla każdego* $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $0 \leq f(x) < \epsilon$, *a więc*

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - 0| = |f(x)| = f(x) < \epsilon,$$

co dowodzi ciągłości funkcji Riemanna w $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Stąd zbiór punktów nieciągłości jest zawarty w $\mathbb{Q}$ *a więc jest przeliczalny, więc jest zbiorem miary Lebesgue'a zero, co na podstawie poprzedniego twierdzenia dowodzi całkowalności funkcji Riemanna w zadanym przedziale domkniętym i ograniczonym.*

Pokazaliśmy że funkcja Riemanna jest całkowalna, niech teraz $P \in \mathcal{P}([a,b])$, *stąd dla każdego* $I \in P$ *mamy* $I \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \neq \emptyset$, *więc*

$$s(f,P) = \sum_{I \in P} \inf\{f(x) : \ x \in I\}|I| = \sum_{I \in P} 0|I| = 0.$$

Tak więc

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{s(f,P) : \ P \in \mathcal{P}([a,b])\} = \sup\{0 : \ P \in \mathcal{P}([a,b])\} = 0.$$

Jako ćwiczenie można udowodnić następujące twierdzenie

Twierdzenie 2.5.6 *Niech* $f, g : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ *będą funkcjami całkowalnymi w sensie Riemanna na odcinku* $[a,b]$, *to*

1. $f+g, f-g, fg$ *są całkowane w sensie Riemanna oraz*

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$$

$$\int_a^b (f-g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

2. $\alpha \in \mathbb{R}$ *to* αf *jest całkowalna w sensie Riemanna i* $\int_a^b (\alpha f)(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$,

3. $|f|$ *jest całkowalna i* $|\int_a^b f(x)\,dx| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$,

4. *jeśli* $c \in (a,b)$ *to* f *jest całkowalna na* $[a,c]$ *i* $[c,b]$ *w sensie Riemanna i jednocześnie* $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

Zachodzi ważne twierdzenie wiążace całkę nieoznaczoną z całką oznaczoną.

Twierdzenie 2.5.7 (Leibniza-Newtona) *Jeśli $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą na $[a, b]$ i F jest funkcją pierwotną do f na $[a, b]$, to*

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Dowod. *Ponieważ f jest ciągła na $[a, b]$, to F - f-kcje pierwotna do f istnieje. Również z ciągłosci wynika, że f jest całkowalna w sensie Riemanna. Niech $\epsilon > 0$ będzie dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią, to istnieje taki podział $P \in \mathcal{P}([a, b])$, że $|S(f, P) - s(f, P)| < \epsilon$ i wtedy dla każdego $n \in \{1, \ldots, |P|\}$ i każdego $x_n^* \in [x_{n-1}, x_n]$ mamy*

$$\int_a^b f - \epsilon < S(f, P) - \epsilon < s(f, P) \leq \sum_{n=1}^{|P|} f(x_n^*)\Delta x_n \leq S(f, P) < s(f, P) + \epsilon < \int_a^b f + \epsilon.$$

Z drugiej strony mamy

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \sum_{n=1}^{|P|} (F(x_n) - F(x_{n-1})) = \sum_{n=1}^{|P|} F'(x_n^*)\Delta x_n \\ &= \sum_{n=1}^{|P|} f(x_n^*)\Delta x_n, \end{aligned}$$

więc mamy

$$\int_a^b f - \epsilon < F(b) - F(a) < \int_a^b f + \epsilon$$

przy dowolnym $\epsilon > 0$, więc dostajemy równość

$$\int_a^b f = F(b) - F(a),$$

co kończy nasz dowód. ■

Przykład 2.5.2 *Chcemy obliczyć całkę $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\, dx$, wiemy że $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ jest ciągła na przedziale $[1, e]$. Wyznaczmy do f pewną funkcję pierwotną $F(x)$:*

$$\begin{aligned} F(x) = \int f(x)\, dx = \int \frac{\ln x}{x}\, dx = \left| \begin{array}{c} y = \ln x \\ {\scriptstyle dy = (\ln x)' dx} \\ {\scriptstyle dy = \frac{dx}{x}} \end{array} \right| = \int y\, dy \\ = \frac{y^2}{2} + C = \frac{1}{2} \ln^2 x + C. \end{aligned}$$

Stosując twierdzenie Leibniza – Newtona mamy

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = F(e) - F(1) = \frac{1}{2}\ln^2 e + C - \big(\frac{1}{2}\ln^2 1 - C\big) = \frac{1}{2}1^2 = \frac{1}{2}.$$

Przykład 2.5.3 *Obliczyć całkę* $\int_1^2 \operatorname{arctg} x^2\,dx$. *W tym celu wyznaczymy całkę nieoznaczoną z z funkcji* $f(x) = \operatorname{arctg} x^2$ *(ciągłej na* $\mathbb{R}$*):*

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arctg} x^2\,dx = &\int (x')\operatorname{arctg} x^2\,dx = x\operatorname{arctg} x^2 - \int x(\operatorname{arctg} x^2)'\,dx\\ =&x\operatorname{arctg} x^2 - \int x\frac{2x}{x^4+1}\,dx = x\operatorname{arctg} x^2 - 2\int \frac{x^2}{x^4+1}\,dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^4+1 =&(x^2)^2+1 = (x^2+i)(x^2-i)\\ =&(x-(\sqrt{2}+\sqrt{2}i))(x-(-\sqrt{2}+\sqrt{2}i))(x-(\sqrt{2}-\sqrt{2}i))(x-(-\sqrt{2}-\sqrt{2}i))\\ =&(x^2+2\sqrt{2}x+2)(x^2-2\sqrt{2}+2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{x^4+1}\,dx =& \int \frac{x^2}{(x^2+2\sqrt{2}x+2)(x^2-2\sqrt{2}x+2)}\,dx\\ =&\int \frac{Ax+B}{x^2+2\sqrt{2}x+2}\,dx + \int \frac{Cx+D}{x^2-2\sqrt{2}x+2}\,dx\\ =&\frac{A}{2}\int \frac{(2x+2\sqrt{2})}{x^2+2\sqrt{2}x+2} + \int \frac{B-A\sqrt{2}}{x^2+2\sqrt{2}x+2}\\ &+\frac{C}{2}\int \frac{(2x-2\sqrt{2})}{x^2-2\sqrt{2}x+2} + \int \frac{D+C\sqrt{2}}{x^2-2\sqrt{2}x+2}\end{aligned}$$

Twierdzenie 2.5.8 *Niech* $f, g : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ *takie że:*

1. f, g *są całkowalne w sensie Riemanna na odcinku* $[a,b]$,
2. $\forall x \in [a,b] \;\; f(x) \le g(x)$,

to

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

Dowod. *Dowód niewprost. Przypuśćmy że* $\int\limits_a^b g(x)\,dx < \int\limits_a^b f(x)\,dx$ *i niech* $\epsilon = \frac{\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx}{3} > 0$, *to istnieją podziały* $P, P' \in \mathcal{P}([a,b])$ *że*

$$\int\limits_a^b g(x)dx \leq S(g,P) < \int\limits_a^b g(x)\,dx + \epsilon < \int\limits_a^b f(x)\,dx - \epsilon < s(f,P') \leq \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

To istnieje podział $P_0 \in \mathcal{P}([a,b])$ *taki że* $P \leq P_0$ *i* $P' \leq P_0$ *i korzystając z monotoniczności sum całkowych mamy*

$$\int\limits_a^b g(x)dx \leq S(g,P_0) \leq S(g,P) < \int\limits_a^b g(x)\,dx + \epsilon < \int\limits_a^b f(x)\,dx - \epsilon < s(f,P') \leq s(f,P_0) \leq \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

tak więc mamy:

$$\sum_{I \in P_0} \sup\{g(x) : x \in I\}|I| = S(g,P_0) < s(f,P_0) = \sum_{I \in P_0} \inf\{f(x) : x \in I\}|I|$$

stąd istnieje $I_0 \in P_0$ *że* $\sup\{g(x) : x \in I_0\} < \inf\{f(x) : x \in I_0\}$ *co przeczyłoby założeniu, że* $f(x) \leq g(x)$ *na* $[a,b]$, *co należało dowieść.* ■

Twierdzenie 2.5.9 *Niech* $f_n \rightrightarrows f$ *na* $[a,b]$ *będzie ciągiem funkcji ciągłych jednostajnie zbieżnym do* f, *to*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Dowod. *Niech* $\epsilon > 0$ *będzie liczbą rzeczywistą dodatnią. To wówczas istnieje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *że dla każdego* $n > n_0$ *i każdego* $x \in [a,b]$ *mamy:*

$$f(x) - \frac{\epsilon}{b-a} < f_n(x) < f(x) + \frac{\epsilon}{b-a},$$

stąd dla $n > n_0$ *mamy*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx - \epsilon = \int\limits_a^b f(x) - \frac{\epsilon}{b-a}\,dx \leq \int\limits_a^b f_n(x)\,dx \leq \int\limits_a^b f(x) + \frac{\epsilon}{b-a}\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \epsilon,$$

stąd mamy dla każdego $\epsilon > 0$ *istnieje* $n_0 \in \mathbb{N}$, *że dla każdego* $n > n_0$

$$\left| \int\limits_a^b f_n(x)\,dx - \int\limits_a^b f(x)\,dx \right| \leq \epsilon$$

a więc $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$ ■

Jako wniosek mamy następujące twierdzenie

Twierdzenie 2.5.10 (o całkowaniu szeregu potęgowego) *Jeśli* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *jest szeregiem potęgowym, którego promien zbieżności wynosi* R, *to dla każdego* $x \in (-R, R)$ *zachodzi wzór*

$$\int\limits_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^x a_n t^n \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Dowod. *Wystarczy zastosować twierdzenie o jednostajnej zbieżności szeregów potęgowych Twierdzenie 0.6.1 i powyższe twierdzenie.* ■

Twierdzenie 2.5.11 (o różniczkowaniu szeregu potęgowego) *Jeśli* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *jest szeregiem potęgowym, którego promień zbieżności wynosi* R, *to dla każdego* $t \in (-R, R)$ *zachodzi wzór*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n t^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Promień zbieżności szergu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ *jest taki sam ja dla* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.

Dowod. *Oczywiście mamy*

$$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|n a_n|},$$

więc promienie zbieżności obu szeregów potęgowych są takie same.

Wystarczy zastosować **Twierdzenie 1.3.12** *do* $f_n(x) := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ *i* $g_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$ *na* $[-t, t] \subset (-R, R)$. *Ponieważ* $g_n \rightrightarrows \sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ *oraz* g_n *są ciągłe na* $[-t, t] \subset (-R, R)$. *Oczywiście istnieje* $x \in [-t, t]$ *że* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ *istnieje i wynosi* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *i oczywiscie* $f_n' = g_n$ *na* $[-t, t]$ *dla każdego* $n \in \mathbb{N}$. ■

Przykład 2.5.4 *Obliczyć sumę szeregu liczbowego*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n 2^n}.$$

Punktem wyjscia jest szereg potęgowy

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^n = \frac{1}{1-y} \ \textit{dla} \ |y| < 1.$$

Podstawiając za $y = -t$ *mamy*

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \ \textit{dla} \ |t| < 1.$$

Niech $|x| < 1$ to wtedy stosując twiedzenie o całkowaniu szeregów potęgowych mamy

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1}\bigg|_0^x$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

Obliczając całkę z lewej strony mamy

$$\ln|1+x| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \ \textit{dla}\ |x| < 1.$$

Kładąc $x = \frac{1}{2}$ mamy

$$\ln\frac{3}{2} = \ln|1+\frac{1}{2}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}.$$

Więc ostatecznie mamy

$$\ln\frac{2}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n}.$$

Przykład 2.5.5 (Liczba π) *W celu wyznaczenia pewnego wzoru na liczbę π wykorzystamy twierdzenie o całkowaniu szeregów potęgowych.*

Rozważmy funkcję $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$, to dla wszystkich t takich że $|t| < 1$ mamy

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1-(-t^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-t^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}.$$

Oczywiście promień zbieżności szeregu widniejącego powyżej wynosi 1 a jego przedział zbieżności jest równy $(-1, 1)$. Niech $x \in (-1, 1)$, to na mocy twierdzenia **??** *o całkowaniu szeregów mamy*

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\,dt$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^{2n}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}\bigg|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Z drugiej strony mamy:

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \operatorname{arctg} x\bigg|_0^x = arctgx.$$

Więc dla dowolnego $x \in (-1,1)$ *mamy*

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Dla $x \in (-1,1)$ *niech* $\alpha = \operatorname{arctg} x$*, więc* $x = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$*. Podstawiając to do powyższej równości, otrzymujemy: dla dowolnego* $\alpha \in (-\pi/4, \pi/4)$

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \operatorname{tg}^{2n+1}\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\sin^{2n+1}\alpha}{\cos^{2n+1}\alpha}.$$

Niech $\alpha = \pi/6$*, to wtedy* $\sin\pi/6 = 1/2$ *oraz* $\cos\pi/6 = \sqrt{3}/2$*, więc* $\operatorname{tg}\pi/6 = \frac{1}{\sqrt{3}}$*. Więc*

$$\pi/6 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{1}{(\sqrt{3})^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{1}{3^n\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}.$$

Ponieważ $6/\sqrt{3} = \sqrt{12}$ *otrzymujemy wzór na liczbę* π*:*

$$\pi = \sqrt{12} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)} = 2\sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}.$$

Niech $a \in \mathbb{R}$ *takie że*

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{a}{1+\sqrt{3}},$$

to wtedy $(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1) = 2$ *a stąd* $2 = 3 - 1 = a$*. Więc*

$$\begin{aligned}\sqrt{3} =& 1 + \frac{2}{1+\sqrt{3}} = 1 + \cfrac{2}{1+1+\cfrac{2}{1+\sqrt{3}}} = 1 + \cfrac{2}{2+\cfrac{2}{1+\sqrt{3}}} = 1 + \cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\sqrt{3}}}} \\ =& 1 + \cfrac{2}{2+\cfrac{2}{1+\sqrt{3}}} = 1 + \cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\ddots}}}}}\end{aligned}$$

Ostatecznie mamy wzór na liczbę π*:*

$$\pi = 2 + 2 \cdot \cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\ddots}}}}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}.$$

Zadania: <u>całki nieoznaczone</u>

Zadanie 74 *Proszę wyznaczyc całki nieoznaczone:*

$$a)\ \int \frac{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}}\,dx \quad b)\int \frac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}}\,dx, \quad c)\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}\,dx.$$

Zadanie 75 *Stosując wzór na całkowanie przez części, proszę obliczyć:*

$$a)\ \int x^2 e^{-5x}\,dx; \quad b)\ \int \sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx; \quad c)\ \int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx; \quad d)\ \int \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x}}\,dx; \quad e)\ \int \ln(x+1)\,dx.$$

Zadanie 76 *Korzystając z twierdzenia o całkowaniu przez podstawienie, proszę obliczyć:*

$$a)\ \int \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}}\,dx; \quad b)\ \int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx; \quad c)\ \int \frac{\ln x}{x}\,dx; \quad d)\ \int x^4\sqrt[7]{3x^5-1}\,dx; \quad e)\ \int \frac{e^x}{e^{3x}}\,dx.$$

Zadanie 77 *Proszę wyznaczyć całkę:*

$$a)\int \max\{x,x^2\}\,dx; \quad b)\ \int (|x-1|+|x+1|)\,dx.$$

Zadanie 78 *Proszę udowodnić następujacy wzór rekurencyjny:*

$$(\forall n\in\mathbb{N})\left(2<n \longrightarrow \int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}\,dx\right).$$

Zadanie 79 *Proszę wyznaczyć wzór rekurencyjny dla podanych całek:*

$$a)\int \ln^n x\,dx; \qquad b)\ \int \cos^n x\,dx.$$

Zadanie 80 *Proszę wyznaczyć całki z funkcji wymiernych:*

$$a)\ \int \frac{6x+3}{x62+x+4}\,dx;\ b)\ \int \frac{dx}{(x^2-4x+5)^2};\ c)\ \int \frac{x+2}{x(x-2)}\,dx;\ d)\ \int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)};\ e)\ \int \frac{x^2}{x^2+2x}$$

Zadanie 81 *Proszę wyznaczyć całki z funkcji trygonometrycznych:*

$$a);\int \sin^4 x\cos^5 x\,dx;\ b)\ \int \sin^4 x\,dx;\ c)\ \int \sin^2 2x\sin^2 x\,dx;\ d)\ \int \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}\,dx;\ e)\ \int \frac{dx}{1-\operatorname{tg} x};$$

$$f)\ \int \frac{dx}{3\sin x+4\cos x+1};\ g)\ \frac{dx}{\cos x};\ h)\ \int \cos x\cos 5x\,dx\ i)\ \int \cos x\,\cos\frac{x}{2}\,\cos\frac{x}{4}\,dx.$$

Zadanie 82 *Proszę wyznaczyć całki z funkcji niewymienych:*

$$a)\ \int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}; \quad b)\ \int x^3\sqrt{4+x^2}\,dx; \quad c)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}.$$

2.6 Całki niewłaściwe

2.6.1 Całki niewłaściwe I-go rodzaju

Definicja 2.6.1 (Całka niewłaściwa I-go rodzaju) *Niech będa $a \in \mathbb{R}$. $D \subseteq \mathbb{R}$, takie że $[a,\infty) \subseteq D$. Niech będzie dana funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ taka, że dla dowolnego $T > a$ funkcja f jest całkowalna na przedziale $[a,T]$. To całka niewłaściwa pierwszego rodzaju z funkcji f jest zbieżna jeśli*

$$(\exists g \in \mathbb{R}) \lim_{T\to\infty} \int_a^T f(x)\,dx = g.$$

Wtedy piszemy $\int_A^\infty f(x)\,dx = g$.

Przykład 2.6.1 *Obliczmy całkę niewłaściwą dla parametru dodatniego p i $a \in \mathbb{R}$. Niech $p \in (0,1)$. Wtedy*

$$\begin{aligned}\int_a^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{T\to\infty}\int_a^T \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{T\to\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\bigg|_a^T \\ = \frac{1}{1-p}\lim_{T\to\infty}(T^{1-p} - a^{1-p}) = \infty - a^{1-p} = \infty.\end{aligned}$$

Jeśli $p = 1$ to wtedy mamy

$$\int_a^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{T\to\infty}\int_a^T \frac{1}{x}\,dx = \lim_{T\to\infty} \ln|x|\bigg|_a^T = \lim_{T\to\infty}(\ln|T| - \ln|a|) = \infty.$$

Wreszcie niech $p > 1$, wtedy mamy

$$\begin{aligned}\int_a^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{T\to\infty}\int_a^T \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{T\to\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\bigg|_a^T \\ = \frac{1}{1-p}\lim_{T\to\infty}(T^{1-p} - a^{1-p}) = \frac{-a^{1-p}}{1-p}.\end{aligned}$$

Na podstawie przykładu, mamy następujący Fakt.

Fakt 2.6.1 *Niech $a, p \in (0,\infty)$. Wtedy całka niewłaściwa pierwszego rodzaju*

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^p}\,dx \begin{cases} \text{jest zbieżna} & \text{dla } p > 1 \\ \text{jest rozbieżna} & \text{dla } p \in (0,1] \end{cases}.$$

Podamy dwa kryteria zbieżności całek niewłaściwych. Przedtem udowodnimy dwa twierdzenia.

Twierdzenie 2.6.1 *Dla zadanej liczby rzeczywistej a niech będzie funkcja rzeczywista $f : D \to \mathbb{R}$, taka że $[a,\infty) \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$. Wtedy mamy*

$$(\exists g \in \mathbb{R}) \lim_{x\to\infty} f(x) = g \longleftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x, y > M)|f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Dowod. " $\to$ " *Niech* $\lim_{x\to\infty} f(x) = g$, *wtedy z definicji granicy w nieskończoności mamy*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x > M)|f(x) - g| < \epsilon.$$

Niech $\epsilon > 0$ *będzie dowolną dodatnią liczbą rzeczywistą, to wtedy istnieje* $M \in \mathbb{R}$ *taka że dla dowolnego* $x > M$ *mamy* $|f(x) - g| < \frac{\epsilon}{2}$. *Wybierzmy dowolne dwie liczby* x, y *większe od liczby* M. *Wtedy mamy*

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - g| + |g - f(y)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Dowod. $\leftarrow$ *Załóżmy, że mamy prawdziwe zdanie*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x, y > M)|f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Rozważmy ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *zdefiniowany następująca* $a_n = f(n)$ *(bez straty ogólności, możemy założyć że* $a = 0$*). Niech* $\epsilon = 1$ *wtedy na mocy założenie, istnieje* $M \in \mathbb{R}$ *takie, że dla dowolnych* $m, n > M$ $|a_n - a_m| = |f(m) - f(n)| < \epsilon = 1$. *Ustalmy liczbę naturalną* $m > M$, *wtedy dla dowolnego* $n > M$ *mamy*

$$a_m - 1 < a_n < a_m + 1.$$

Stąd wnioskujemy, że nasz ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *jest ograniczony. Istnieje więc podciąg zbieżny* $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *ciągu* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Istnieje więc liczba* $g \in \mathbb{R}$ *taka że* $g = \lim_{n\to\infty} a_{k_n} = \lim_{n\to\infty} f(k_n)$.

Pokażemy że $\lim_{x\to\infty} f(x) = g$. *Niech* $\epsilon > 0$ *będzie dowolną liczbą dodatnią. Wtedy istnieje* $M \in \mathbb{R}$ *takie, że dla dowolnych* $x, y > M$ *mamy* $|f(x) - f(y)| < \epsilon/2$. *Ponadto, istnieje* $n_1 \in \mathbb{N}$ *takie, że dla dowolnego* $n > n_1$ *mamy* $|f(k_n) - g| = |a_{k_n} - g| < \epsilon/2$. *Ponieważ* $\lim_{n\to\infty} k_n = \infty$, *to istnieje istnieje* $m \in \mathbb{N}$ *takie że* $M < k_m$ *a wtedy* $|f(k_m) - g| < \epsilon/2$. *Dla dowolnego* $x > M$ *otrzymujemy*

$$|f(x) - g| \leq |f(x) - f(k_m)| + |f(k_m) - g| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Pokazaliśmy więc, że

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x > M)\ |f(x) - g| < \epsilon,$$

co oznacza że $\lim_{x\to\infty} f(x) = g$. ■

Twierdzenie 2.6.2 *Mamy następującą równoważność:* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *jest zbieżna wtedy i tylko wtedy gdy*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x, y > M)\ \left|\int_x^y f(t)\,dt\right| < \epsilon.$$

Dowod. *Niech* $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, *wówczas mamy*

$$F(y) - F(x) = \int_a^y f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^y f(t)\,dt + \int_x^a f(t)\,dt = \int_x^y f(t)\,dt.$$

Stosując poprzednie twierdzenie do funkcji $F(x)$ *i definicję zbieżności całki niewłaściwej I-go rodzju, otrzymujemy żadaną równoważność* ■

Twierdzenie 2.6.3 (Kryterium porównawcze) *Niech* $[a,\infty) \subseteq D_1$ *i* $[a,\infty) \subseteq D_2$ *i* $f : D_1 \to \mathbb{R}$, $g : D_2 \to \mathbb{R}$ *będą funkcjami takimi że*

1. *istnieje* $b \geq a$, *że dla każdego* $x > b$ *zachodzi* $0 \leq f(x) \leq g(x)$,
2. *dla każdego* $T > a$ *f,g są całkowalne na* $[a,T]$.

Wtedy mamy

- *Jeżeli* $\int_a^\infty g(x)\,dx$ *jest zbieżna, to* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *jest zbieżna,*
- *Jeżeli* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *jest rozbieżna, to* $\int_a^\infty g(x)\,dx$ *jest rozbieżna.*

Dowod. *Pokażemy pierwszą implikację, druga implikacja wynika z tautologii* $\models (p \longrightarrow q) \longleftrightarrow (\neg q \longrightarrow \neg p)$.

Niech $\int_a^\infty g(x)\,dx$ *będzie całką zbieżną. Bez straty ogólności, możemy założyć, że dla dowolnego* $x \geq a$ *zachodzi* $0 \leq f(x) \leq g(x)$. *Wtedy na mocy poprzedniego twierdzenia mamy, że dla dowolnego* $\epsilon > 0$ *istnieje* $M \in \mathbb{R}$, *takie że dla każdego* $x, y > M$ *mamy* $0 \leq \int_x^y g(t)\,dt < \epsilon$. *Ponieważ funkcje* f, g *są nieujemne na* (a,∞), *to dla każdych* $x, y > M$ *mamy*

$$0 \leq \left| \int_x^y f(t)\,dt \right| \leq \left| \int_x^y g(t)\,dt \right| < \epsilon.$$

Więc, z poprzedniego twierdzenia wnosimy, że $\int_a^\infty f(t)\,dt$ *jest zbieżna.* ■

Twierdzenie 2.6.4 (Kryterium ilorazowe) *Niech* $[a,\infty) \subseteq D_1$ *i* $[a,\infty) \subseteq D_2$ *i* $f : D_1 \to \mathbb{R}$, $g : D_2 \to \mathbb{R}$ *będą funkcjami takimi że*

1. *dla każdego* $T > a$ *funkcje* f, g *są całkowalne na* $[a,T]$,
2. $(\forall x \in (a,\infty))(f(x) > 0 \land g(x) > 0)$ *lub* $(\forall x \in (a,\infty))(f(x) < 0 \land g(x) < 0)$,
3. $(\exists K > 0)\ \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K$.

Wtedy mamy

- $\int_a^\infty g(x)\,dx$ *jest zbieżna wtedy i tylko wtedy gdy* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *jest zbieżna,*
- $\int_a^\infty g(x)\,dx$ *jest rozbieżna wtedy i tylko wtedy gdy* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *jest rozbieżna.*

Dowod. *Udowodnimy pierwszą równoważność. Druga wynika z tautologii*

$$\models (p \longleftrightarrow q) \longleftrightarrow (\neg p \longleftrightarrow \neg q).$$

Bez straty ogólności, mozemy założyć, ze funkcje f, g *są dodatnie na przedziale* $[a,\infty]$. *Niech* $K = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ *będzie liczbą dodatnią oraz* ϵ *taką że* $0 < \epsilon < K$. *Wówczas istnieje liczba* $M \in \mathbb{R}$ *taka że dla dowolnego* $x > M$ *zachodzi*

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - K \right| < \epsilon$$

Z powyższej nierówności otrzymujemy:

$$(\forall x > M)\ (K-\epsilon)g(x) < f(x) < (K-\epsilon)g(x).$$

Stosując kryterium porównawcze do pierwszej nierówności powyższego wzoru, otrzymujemy zbieżność $\int_a^\infty g(x)\,dx$ o ile $\int_a^\infty f(x)\,dx$ jest zbieżna. Natomiast, stosując drugą nierówność do kryterium porównawczego, otrzymujemy zbieżność $\int_a^\infty f(x)\,dx$ pod warunkiem zbieżności całki $\int_a^\infty g(x)\,dx$. ■

2.6.2 Całki niewłaściwe II-go rodzaju

Definicja 2.6.2 (Całka niewłaściwa I-go rodzaju) *Niech będa $a, x_0 \in \mathbb{R}$. $D \subseteq \mathbb{R}$, takie że $[a, x_0) \subseteq D$. Niech będzie dana funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ taka, że dla dowolnego $T \in (a, x_0)$ funkcja f jest całkowalna na przedziale $[a, x_0]$. To całka niewłaściwa drugiego rodzaju z funkcji f jest zbieżna jeśli*

$$(\exists g \in \mathbb{R}) \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_a^{x_0-\epsilon} f(x)\,dx = g.$$

Wtedy piszemy $\int_A^\infty f(x)\,dx = g$. analogicznie definiujemy zbieżność $\int_{x_0}^a f(x)\,dx$ dla $x_0 < a$.

Przykład 2.6.2 *Obliczmy całkę niewłaściwą dla parametru dodatniego p i $a \in \mathbb{R}$. Niech $p \in (0,1)$. Wtedy*

$$\int_0^a \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_\epsilon^a \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_\epsilon^a$$
$$= \frac{1}{1-p} \lim_{\epsilon\to 0^+} (a^{1-p} - \epsilon^{1-p}) = \frac{1}{1-p} a^{1-p} - \epsilon^{1-p} = -\frac{1}{1-p} a^{1-p}.$$

Jeśli $p = 1$ to wtedy mamy

$$\int_0^a \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_\epsilon^a \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \ln|x|\Big|_\epsilon^a = \lim_{\epsilon\to 0^+} (\ln|a| - \ln|\epsilon|) = \infty.$$

Wreszcie niech $p > 1$, wtedy mamy

$$\int_0^a \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_\epsilon^a \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_\epsilon^a$$
$$= \frac{1}{1-p} \lim_{\epsilon\to 0^+} (a^{1-p} - \epsilon^{1-p}) = \infty.$$

Na podstawie przykładu, mamy następujący Fakt.

Fakt 2.6.2 *Niech $a, p \in (0, \infty)$. Wtedy całka niewłaściwa pierwszego rodzaju*

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^p}\,dx \begin{cases} \text{jest zbieżna} & \text{dla } p \in (0,1) \\ \text{jest rozbieżna} & \text{dla } p \geq 1 \end{cases}.$$

Podobnie jak w przypadku całek niewłaściwych pierwszego rodzaju podamy dwa kryteria zbieżności całek niewłaściwych. Kryteria te poprzedzą dwa twierdzenia.

Twierdzenie 2.6.5 *Dla zadanej liczby rzeczywistej a niech będzie funkcja rzeczywista $f : D \to \mathbb{R}$, taka że $[a, x_0) \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$. Wtedy mamy*

$$(\exists g \in \mathbb{R}) \lim_{x \to x_0} f(x) = g \longleftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta \in (a, x_0))(\forall x, y \in (\delta, x_0))|f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Dowod. " $\to$ " *Niech $\lim_{x \to \infty} f(x) = g$, wtedy z definicji granicy w x_0 mamy*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (x_0 - \delta, x_0))|f(x) - g| < \epsilon.$$

Niech $\epsilon > 0$ będzie dowolną dodatnią liczbą rzeczywistą, to wtedy istnieje $\delta > 0$ taka że dla dowolnego $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ mamy $|f(x) - g| < \frac{\epsilon}{2}$. Wybierzmy dowolne dwie liczby x, y takie, że $x, y \in (x_0 - \delta, x_0)$. Wtedy mamy

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - g| + |g - f(y)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Dowod. $\leftarrow$ *Załóżmy, że mamy prawdziwe zdanie*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in (x_0 - \delta, x_0))|f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Rozważmy ciąg $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ taki że $\lim_{n \to \infty} t_n = x_0$, $t_n < x_0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oraz ciąg zdefiniowany następująca $a_n = f(t_n)$. Niech $\epsilon = 1$ wtedy na mocy załozenie, istnieje $M \in \mathbb{R}$ takie, że dla dowolnych $m, n > M$ $|a_n - a_m| = |f(t_m) - f(t_n)| < \epsilon = 1$. Ustalmy liczbę naturalną $m > M$, wtedy dla dowolnego $n > M$ mamy

$$a_m - 1 < a_n < a_m + 1.$$

Stąd wnioskujemy, że nasz ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ograniczony. Istnieje więc podciąg zbieżny $(a_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Istnieje więc liczba $g \in \mathbb{R}$ taka że $g = \lim_{n \to \infty} a_{k_n} = \lim_{n \to \infty} f(t_{k_n})$.

Pokażemy że $\lim_{x \to \infty} f(x) = g$. Niech $\epsilon > 0$ będzie dowolną liczbą dodatnią. Wtedy istnieje $\delta > 0$ taka, że dla dowolnych $x, y \in (x_0 - \delta, x_0)$ mamy $|f(x) - f(y)| < \epsilon/2$. Ponadto, istnieje $n_1 \in \mathbb{N}$ takie, że dla dowolnego $n > n_1$ mamy $|f(t_{k_n}) - g| = |a_{k_n} - g| < \epsilon/2$. Ciąg $(t_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ dąży do x_0, więc istnieje $m \in \mathbb{N}$ takie, że $t_{k_m} \in (x_0 - \delta, x_0)$. Wybierzmy dowolne $x \in (x_0 - \delta, x_0)$. Ponieważ $t_{k_m} \in (x_0 - \delta, x_0)$, to $|f(x) - f(k_n)| < \epsilon/2$ a stąd mamy:

$$|f(x) - g| \leq |f(x) - f(k_m)| + |f(k_m) - g| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Pokazaliśmy więc, że

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x > M)\ |f(x) - g| < \epsilon,$$

co oznacza że $\lim_{x \to \infty} f(x) = g$. ■

Twierdzenie 2.6.6 *Mamy następującą równoważność: $\int_a^\infty f(x)\,dx$ jest zbieżna wtedy i tylko wtedy gdy*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x, y > M) \quad \left| \int_x^y f(t)\,dt \right| < \epsilon.$$

Dowod. *Niech $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, wówczas mamy*

$$F(y) - F(x) = \int_a^y f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^y f(t)\,dt + \int_x^a f(t)\,dt = \int_x^y f(t)\,dt.$$

Stosując poprzednie twierdzenie do funkcji $F(x)$ i definicję zbieżności całki niewłaściwej I-go rodzju, otrzymujemy żadaną równoważność ■

Twierdzenie 2.6.7 (Kryterium porównawcze) *Niech $[a,\infty) \subseteq D_1$ i $[a,\infty) \subseteq D_2$ i $f : D_1 \to \mathbb{R}$, $g : D_2 \to \mathbb{R}$ będą funkcjami takimi że*

1. *istnieje $b \geq a$, że dla każdego $x > b$ zachodzi $0 \leq f(x) \leq g(x)$,*

2. *dla każdego $T > a$ f,g są całkowalne na $[a, T]$.*

Wtedy mamy

- *Jeżeli $\int_a^\infty g(x)\,dx$ jest zbieżna, to $\int_a^\infty f(x)\,dx$ jest zbieżna,*
- *Jeżeli $\int_a^\infty f(x)\,dx$ jest rozbieżna, to $\int_a^\infty g(x)\,dx$ jest rozbieżna.*

Dowod. *Pokażemy pierwszą implikację, druga implikacja wynika z tautologii $\models (p \longrightarrow q) \longleftrightarrow (\neg q \longrightarrow \neg p)$.*

Niech $\int_a^\infty g(x)\,dx$ będzie całką zbieżną. Bez straty ogólności, możemy założyć, że dla dowolnego $x \geq a$ zachodzi $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Wtedy na mocy poprzedniego twierdzenia mamy, że dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje $M \in \mathbb{R}$, takie że dla każdego $x, y > M$ mamy $0 \leq \int_x^y g(t)\,dt < \epsilon$. Ponieważ funkcje f, g są nieujemne na (a, ∞), to dla każdych $x, y > M$ mamy

$$0 \leq \left| \int_x^y f(t)\,dt \right| \leq \left| \int_x^y g(t)\,dt \right| < \epsilon.$$

Więc, z poprzedniego twierdzenia wnosimy, że $\int_a^\infty f(t)\,dt$ jest zbieżna. ■

Twierdzenie 2.6.8 (Kryterium ilorazowe) *Niech $[a,\infty) \subseteq D_1$ i $[a,\infty) \subseteq D_2$ i $f : D_1 \to \mathbb{R}$, $g : D_2 \to \mathbb{R}$ będą funkcjami takimi że*

1. *dla każdego $T > a$ funkcje f, g są całkowalne na $[a, T]$,*

2. *$(\forall x \in (a,\infty))(f(x) > 0 \wedge g(x) > 0)$ lub $(\forall x \in (a,\infty))(f(x) < 0 \wedge g(x) < 0)$,*

3. *$(\exists K > 0)$ $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K$.*

Wtedy mamy

- $\int_a^\infty g(x)\,dx$ *jest zbieżna wtedy i tylko wtedy gdy* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *jest zbieżna,*
- $\int_a^\infty g(x)\,dx$ *jest rozbieżna wtedy i tylko wtedy gdy* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *jest rozbieżna.*

Dowod. *Udowodnimy pierwszą równoważność. Druga wynika z tautologii*

$$\models (p \longleftrightarrow q) \longleftrightarrow (\neg p \longleftrightarrow \neg q).$$

Bez straty ogólności, mozemy założyć, ze funkcje f, g *są dodatnie na przedziale* $[a, \infty]$. *Niech* $K = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ *będzie liczbą dodatnią oraz* ϵ *taką że* $0 < \epsilon < K$. *Wówczas istnieje liczba* $M \in \mathbb{R}$ *taka że dla dowolnego* $x > M$ *zachodzi*

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - K\right| < \epsilon$$

Z powyższej nierówności otrzymujemy:

$$(\forall x > M)\ (K-\epsilon)g(x) < f(x) < (K-\epsilon)g(x).$$

Stosując kryterium porównawcze do pierwszej nierówności powyższego wzoru, otrzymujemy zbieżność $\int_a^\infty g(x)\,dx$ *o ile* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *jest zbieżna. Natomiast, stosując drugą nierówność do kryterium porównawczego, otrzymujemy zbieżność* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *pod warunkiem zbieżności całki* $\int_a^\infty g(x)\,dx$. $\blacksquare$

Rozdział 3

Funkcje wielu zmiennych

3.1 Przestrzenie euklidesowe

Niech iloczyn skalarny $(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *będzie zdefiniowany w sposób następujący:*

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}^n)\ (x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k.$$

Fakt 3.1.1 *Zachodzą następujące własności:*

1. $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n)\ (x + y, z) = (x, z) + (y, z)$,
2. $(\forall x, y \in \mathbb{R}^n)(\forall \alpha \in \mathbb{R})\ (\alpha \cdot x, y) = \alpha \cdot (x, y)$,
3. $(\forall x, y \in \mathbb{R}^n)\ (x, y) = (y, x)$,
4. $(\forall x \in \mathbb{R}^n)\ (x, x) \geq 0$,
5. $(\forall x \in \mathbb{R}^n)\ (x, x) = 0 \longleftrightarrow x = \bar{0}$.

Dla dowolnego wektora $x \in \mathbb{R}^n$ *definiujemy jego długość w spsób następujący* $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

Fakt 3.1.2 *Zachpdzą następujące własności:*

1. $(\forall x \in \mathbb{R}^n)\ \|x\| = 0 \longleftrightarrow x = \bar{0}$,
2. $(\forall x \in \mathbb{R}^n)\ \|x\| \geq 0$,
3. $(\forall x \in \mathbb{R}^n)(\forall \alpha \in \mathbb{R})\ \|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$.
4. $(\forall x, y \in \mathbb{R}^n)\ |(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$. *W tym celu rozważmy wielomian zmiennej reczywistej* t *drugiego stopnia* $f(t) = (x + ty, x + ty)$, *wykaż że*
   - $(\forall t \in \mathbb{R})\ f(t) \geq 0$,

- *wywnioskuj stąd że wyróżnik f jest niedodatni $\Delta \leq 0$,*
- *korzystając z poprzedniego faktu wyprowadź żadaną nierówność.*

5. $(\forall x, y \in \mathbb{R}^n)$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, *(wsk. wykorzystaj nierówność z poprzedniego punktu).*

Dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}^n$ definiujemy odległość jako $d(x, y) = \|x - y\|$.

Fakt 3.1.3 *Odległość euklidesowa ma następujące własności:*

1. $(\forall x, y \in \mathbb{R}^n)$ $d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2}$,
2. $(\forall x, y \in \mathbb{R}^n)$ $d(x, y) \geq 0$,
3. $(\forall x, y \in \mathbb{R}^n)$ $d(x, y) = 0 \longleftrightarrow x = y$,
4. $(\forall x, y \in \mathbb{R}^n)$ $d(x, y) = d(y, x)$,
5. $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n)$ $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Definicja 3.1.1 (Przestrzeń metryczna) *Uporządkowaną parę (X, d) nazywamy przestrzenią metryczną, jeżeli są spełnione następujące własności:*

1. *X jest niepustym zbiorem, oraz $d : X \times X \to [0, \infty)$ jest funkcją,*
2. $(\forall x, y \in X)(d(x, y) = 0 \longleftrightarrow x = y)$,
3. $(\forall x, y \in X)(d(x, y) = d(y, x))$,
4. $(\forall x, y, z \in X)(d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y))$.

Na mocy Faktu 3.1.3 przestrzeń euklidesowa jest przestrzenią metryczną. Niech X będzie dowolnym niepustym zbiorem i dla dowolnych $x, y \in X$ niech

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x \neq y \\ 0 & \text{gdy } x = y \end{cases}.$$

Wtedy (X, d) jest przestrzenią metryczną, którą nazywamy przestrzenią dyskretną.

Definicja 3.1.2 *Dla dowolnych zbiorów $A, F, U \subseteq \mathbb{R}^n$ oraz $x \in \mathbb{R}^n$ i dodatniej liczby rzeczywistej $r > 0$:*

1. *zbiór $K(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x.y) < r\}$ jest kulą otwartą o środu x i promieniu r,*
2. *U jest otwarty w $\mathbb{R}^n$ jeżeli $(\forall x \in U)(\exists r > 0)$ $K(x, r) \subseteq U$,*
3. *F jest domknięty w $\mathbb{R}^n$ jeżeli $F^c = \mathbb{R}^n \setminus F$ jest otwarty w $\mathbb{R}^n$,*

4. *int*$(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ (\exists r > 0)\ K(x,r) \subseteq A\}$, *(int(A) - wnętrze zbioru A),*
5. $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ (\forall r > 0)\ K(x,r) \cap A \neq \emptyset\}$, *($\overline{A}$ - domknięcie zbioru A).*

Fakt 3.1.4 *Udowodnij*

1. *jeżeli* $x \in \mathbb{R}^n$ *i* $r > 0$, *to kula otwarta* $K(x,r)$ *jest zbiorem otwartym,*
2. *zbiory* $\emptyset, \mathbb{R}^n$ *są zbiorami otwartymi w* $\mathbb{R}^n$,
3. *jeżeli* $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ *są otwarte w* $\mathbb{R}^n$ *to* $U \cap V$ *jest otwarty w* $\mathbb{R}^n$,
4. *jeżeli* $\mathcal{G} = \{U_t : \ t \in T\}$ *jest rodziną zbiorów otartych, to* $\bigcup \mathcal{G} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ (\exists t \in T)\ x \in U_t\}$ *jest zbiorem otwartym w* $\mathbb{R}^n$.

Fakt 3.1.5 *Udowodnij*

1. *zbiory* $\emptyset, \mathbb{R}^n$ *są zbiorami domkniętymi w* $\mathbb{R}^n$,
2. *jeżeli* $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ *są domknięte w* $\mathbb{R}^n$ *to* $A \cup B$ *jest domknięty w* $\mathbb{R}^n$,
3. *jeżeli* $\mathcal{F} = \{F_t : \ t \in T\}$ *jest rodziną zbiorów domkniętych, to* $\bigcap \mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ (\forall t \in T)\ x \in U_t\}$ *jest zbiorem domkniętym w* $\mathbb{R}^n$. *Wsk. skorzystaj z prawa de Morgana:*

$$\left(\bigcap \mathcal{F}\right)^c = \left(\bigcap_{t \in T} F_t\right)^c = \bigcup_{t \in T} F_t^c = \bigcup \{F_t^c : \ t \in T\}.$$

Fakt 3.1.6 *Udowodnij:*

1. $A \subseteq \overline{A}$,
2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,
3. $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$, *czy zachodzi inkluzja w drugą stronę,*
4. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$,
5. $int(A) \subseteq A$,
6. $int(A \cap B) = int(A) \cap int(B)$,
7. $int(A) \cup int(B) \subseteq int(A \cup B)$, *czy zachodzi inkluzja w drugą stronę,*
8. $int(int(A)) = int(A)$,
9. $int(A) = X \setminus \overline{X \setminus A}$, *gdzie* $X = \mathbb{R}^n$.
10. $\overline{A} = \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \{x \in \mathbb{R}^n : \ (\exists a \in A)\ d(x,a) < \frac{1}{n}\}$.

Fakt 3.1.7 *Wyznacz* $int(A)$, $\overline{A}$, $int(\overline{A})$, $\overline{int(A)}$ *dla*

1. $A = (0,1) \ \setminus \{\frac{1}{n+1} : \ n \in \mathbb{N}\}$,
2. $A = \mathbb{Z}$,
3. $A = \mathbb{Q}$,
4. $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,
5. $A = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$.

Fakt 3.1.8 *Niech* $U, V \subseteq \mathbb{R}$ *będą zbiorami otwartymi oraz* $A, B \subseteq \mathbb{R}$ *domkniętymi w* $\mathbb{R}$, *udowodnij że*

1. $U \times V = \{(u,v) : \ u \in U \wedge v \in V\}$ *jest zbiorem otwartym w* $\mathbb{R}^2$,
2. $A \times B = \{(a,b) : \ a \in A \wedge b \in B\}$ *jest zbiorem domkniętym w* $\mathbb{R}^2$.

Uogólnij na przypadek gdy $A, U \subseteq \mathbb{R}^m$ *i* $B, V \subseteq \mathbb{R}^n$.

3.2 Ciągi i ich granice

Pojęcie granicy ciągu liczbowego można łatwo uogólnić na przypadek wielowymiarowy. Mianowicie, niech $n \in \mathbb{N}$ *będzie dodatnią liczbą naturalną to* x *jest ciągiem w* $\mathbb{R}^n$ *wtedy i tylko wtedy gdy* $x \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$. *Natomiast* x *jest ciągiem w przestrzeni metrycznej* (X, d) *wtedy gdy* $x \in X^{\mathbb{N}}$.

Powiemy, że ciąg $x \in X^{\mathbb{N}}$ *jest zbieżny w przestrzeni metrycznej* (X, d) *do punktu* $g \in X$ *wtedy gdy*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \longrightarrow d(x_n, g) < \epsilon).$$

Wtedy piszemy $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = g$. *Dalej, ciąg* $x \in X^{\mathbb{N}}$ *jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy*

$$(\exists g \in X)(\lim_{n \in \to \infty} x_n = g).$$

W szczególności, gdy mamy do czynienia z przestrzenią $\mathbb{R}^n$

$$\lim_{n \to \infty} x_n = g \longleftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(\|x_n - g\| < \epsilon).$$

Fakt 3.2.1 *Każdy ciąg zbieżny w przestrzeni metrycznej ma tylko jedną granicę.*

Dowod. *Niech* (X, d) *będzie przestrzenią metryczną, niech* $x \in X^{\mathbb{N}}$ *będzie zbieżnym do* $g, g' \in X$. *Załóżmy, że* $g \neq g'$, *to wtedy liczba* $\epsilon = d(g, g') > 0$ *jest dodatnią. Wówczas istnieją dwie liczby naturalne* n_1, n_2 *takie że*

- $n > n_1$ *to* $d(x_n, g) < \frac{\epsilon}{2}$, *oraz*

- $n > n_2$ *to* $d(x_n, g') < \frac{\epsilon}{2}$.

Niech $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, *to wtedy dla dowolnego* $n > n_0$ *mamy*

$$\epsilon = d(g, g') \leq d(g, x_n) + d(x_n, g') < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \text{ a stąd } \epsilon < \epsilon,$$

co jest niemożliwe, więc $g = g'$. ■

W przypadku ciagów w przestrzeni euklidesowej mamy następujący fakt.

Fakt 3.2.2 *Niech* $m \in \mathbb{N}$ *będzie dodatnią liczbą naturalną,* $x \in (\mathbb{R}^m)^{\mathbb{N}}$ *i* $g \in \mathbb{R}^m$. *Jeśli* $x_n(x_n^1, \ldots, x_n^m)$, $g = (g^1, \ldots, g^m)$ *to*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = g \longleftrightarrow (\forall k \in \{1, \ldots, m\} \lim_{n\to\infty} x_n^k = g^k).$$

Dowod. *Załóżmy, że* $\lim_{n\to\infty} x_n = g$ *i niech* $k \in \{1, \ldots, m\}$ *będzie dowolną ale ustaloną liczbą naturalną. Wtedy z twierdzenia o trzech ciągach na mocy nierówności*

$$0 \leq |x_n^k - g^k| \leq \|x_n - g\|$$

mamy $\lim_{n\to\infty} x_n^k = g^k$.

W drugą stronę rozumowanie jest następujące. Załóżmy że dla dowolnego k *(wziętego jak wcześniej)* $\lim_{n\to\infty} x_n^k = g^k$. *Wtedy ciąg zdefiniowany następująco*

$$z_n = \max\{|x_n^k - g^k| : k \in \{1, \ldots, m\}\},$$

jest jest zbieżny do zera. Wówczas, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ *mamy*

$$\|x_n - g\| \leq \sqrt{m} \cdot z_n$$

i znów stosując twierdzenie o trzech ciągach ma miejsce żądana równość: $\lim_{n\to\infty} x_n = g$, *co kończy dowód naszego faktu.* ■

Stosując powyższy fakt mamy

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \frac{n^2 + 2n - 3}{2n^2 + 7}\right) = \left(0, e, \frac{1}{2}\right).$$

Podobnie jak w przypadku ciągów liczbowych, możemy wprowadzić pojęcie podciągu ciągu $x \in X^{\mathbb{N}}$ *w przestrzeni metrycznej* (X, d). *Mianowicie, ciąg* $y \in X^{\mathbb{N}}$ *jest podciągiem ciągu* $x \in X^{\mathbb{N}}$ *w przestrzeni metrycznej* (X, d) *jeśli istnieje rosnący ciąg* $k \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *o wartościach w zbiorze* $\mathbb{N}$, *taki że*

$$(\forall n \in \mathbb{N})(y_n = x_{k_n}).$$

Wtedy piszemy $y \preceq x$. *Mamy następujący fakt.*

Fakt 3.2.3 *Niech* (X, d) *będzie przestrzenią metryczną,* $g \in X$ *i* $x \in X^{\mathbb{N}}$. *Wtedy*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = g \longleftrightarrow (\forall y \in X^{\mathbb{N}})(y \preceq x \longrightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = g).$$

Dowod. *Niech $x \in X^{\mathbb{N}}$ będzie zbieżnym ciągiem do $g \in X$ i $y \preceq x$ bedzie jego podciągiem. Wtedy, z definicji podciągu istnieje rosnący ciąg liczb naturalnych $k \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, taki że dl każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$ $y_n = x_{k_n}$. Korzystając z indukcji matematycznej mamy*

$$(\forall n \in \mathbb{N})(n \leq k_n).$$

Dla $n = 0$ nierówność jest oczywista. Załóżmy że mamy $n \leq k_n$. Wiemy że ciąg k jest rosnący, to wtedy $k_n < k_{n+1}$ a więc $k_n + 1 \leq k_{n+1}$ i stąd mamy

$$n + 1 \leq k_n + 1 \leq k_{n+1}.$$

Niech $\epsilon > 0$ będzie dodatnią liczbą rzeczywistą. Wtedy istnieje liczba naturalna $n_0 \in \mathbb{N}$ taka że dla dowolnego $n > n_0$ mamy $d(x_n, g) < \epsilon$. Więc na mocy powyższej uwagi mamy $n_0 < n \leq k_n$ a więc

$$d(y_n, g) = d(x_{k_n}, g) < \epsilon$$

więc mamy $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = g$. Dowód w drugą stronę jest oczywisty, ponieważ x jest swoim podciągiem ($x \preceq x$). ■

Powyższy fakt jest przydatny w sytuacjach, gdy chcemy wykazać, że dany ciąg nie jest zbieżny. Na przykład, biorąc ciąg $a_n = ((-1)^n, \frac{n-1}{n+1})$, wtedy podciąg $b_n = a_{2n}$ jest zbieżny do $g = (1,1)$, natomist podciąg $c_n = a_{2n+1}$ jest zbieżny do granicy $g' = (-1,1)$. Ponieważ $g \neq g'$, więc ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nie jest zbieżny.

W przypadku cięgów w przestrzeni euklidesowej mamy następujące twierdzenie o arytmetyce granic.

Twierdzenie 3.2.1 *Jeżeli dwa ciagi $a, b \in (\mathbb{R}^m)^{\mathbb{N}}$ w m-wymiarowej przestrzeni euklidesowej są zbieżne, to*

1. *$a+b$ i $a-b$ są zbieżne oraz zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ oraz odpowiednio $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,*
2. *jeśli $\alpha \in \mathbb{R}$, to $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha \cdot a_n) = \alpha \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.*

Dowód tego twierdzenia można przeprowadzić, stosując odpowiednie twierdzenie o arytmetyce granic dla ciagów liczbowych i Faktu 3.2.2.

Analogicznie jak w przypadku jednowymiarowym, w przestrzeniach euklidesowych zachodzi twierdzenie Cauchy'ego.

Twierdzenie 3.2.2 *Niech $m \in \mathbb{N}$ będzie dodatnią liczbą naturalną i $x \in (\mathbb{R}^m)^{\mathbb{N}}$ będzie dowolnym ciągiem. To następujące warunki są równoważne:*

1. *ciąg x jest zbieżny,*
2. *zachodzi warunek Cauchyego:*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{N})(\forall, m, n \in \mathbb{N})(n_0 < m, n \longrightarrow \|x_n - x_m\| < \epsilon).$$

Dowod. *Udowodnimy imlikację* 1) $\to$ 2). *Zakładając, że ciąg x jest zbieżny do $g \in \mathbb{R}^m$ weźmy dowolną dodatnią liczbę rzeczywistą $\epsilon > 0$. Wtedy istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$, takie że dla dowolnego $n > n_0$ mamy $\|x_n - g\| < \frac{\epsilon}{2}$. Niech m i n będą dowolnymi liczbami naturalnymi, które są większe od n_0. Wtedy*

$$\|x_n - x_m\| = \|x_n - g + g - x_m\| \leq \|x_n - g\| + \|g - x_m\| < \epsilon.$$

Teraz implikacja 2) $\to$ 1). *Niech x spełnia warunek Cauchy'ego, który jest treścią punktu* 2). *Wtedy dla każdego naturalnego k pomiędzy* 1 *a m ciąg k-tych współrzędnych $(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ spełnia warunek Cauchy'ego jako ciąg liczbowy. Więc na mocy twierdzenia Cauchy'ego dla ciągów liczbowych istnieje liczba rzeczywista $g^k \in \mathbb{R}$, taka że $\lim_{n\to\infty} x_n^k = g^k$. Ponieważ $k \in \{1, \ldots, m\}$ jest wybrana w sposób dowolny, to z Faktu 3.2.2, ciąg x jest zbieżny do $g \in \mathbb{R}^m$, gdzie $g = (g^1, \ldots, g^m)$.* ■

Warunek Cachy'egoo występujący w punkcie 2) *powyższego twierdzenia można łatwo uogólnić na przypadek przestrzeni metrycznych. Mianowicie, dla przestrzeni metrycznej (X, d) ciąg $x \in X^{\mathbb{N}}$ spełnia warunek Cauchy'ego jeżeli zachodzi warunek:*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{N})(\forall, m, n \in \mathbb{N})(n_0 < m, n \longrightarrow d(x_n, x_m) < \epsilon).$$

Definicja 3.2.1 (Przestreń metryczna zupełna) *Przestrzeń metrczna jest zupełna wtedy gdy każdy ciąg Cauchy'ego jest zbieżny.*

Przestrzeń liczb wymiernych z odległością zdefiniowaną przez wartość bezwzględną nie jest przestrzenią zupełną. Tak jest ponieważ istnieje ciąg liczb wymiernych $x \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ który jest zbieżny do $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Natomiast twierdzenie 3.2.2 mówi, że każda przestrzeń euklidesowa jest przestrzenią metryczną zupełną. W wielu źródłach, pojawia się nazwa ciąg podstawowy, zamiast ciąg spełniający warunek Cauchy'ego.

Teraz jesteśmy gotowi przedstawić twierdzenia Banacha o punkcje stałym, które ma wiele różnych zastosowań w matematyce. W rozdziale o funkcjach uwikłanych pokażemy zastosowanie twierdzenia Banacha.

Twierdzenie 3.2.3 (Twierdzenie Banacha) *Niech (X, d) będzie zupełną przestrzenią metryczną. Niech $F : X \to X$ będzie odwzorowaniem zwężającym, to znaczy:*

$$(\exists c \in (0, 1))(\forall x, y \in X)\ (d(F(x), F(y)) \leq c \cdot d(x, y).$$

to istnieje dokładnie jedno $z \in X$ takie że $F(z) = z$.

Dowod. *Niech $x \in X$ będzie dowolnym punktem naszej przestrzeni. Definiujemy ciąg $y \in X^{\mathbb{N}}$ następująco:*

$$y_0 = x \wedge (\forall n \in \mathbb{N})(y_{n+1} = F(y_n)).$$

Zauważmy, że dla dowolnej liczby naturalnej n dla dowolnego $x \in X$ mamy

$$d(F^n(x), F^{n+1}(x)) \leq c \cdot d(F^{n-1}(x), F^n(x)) \leq \ldots \leq c^n \cdot d(x, F(x)).$$

Pokażemy, że ten ciąg jest podstawowy. Wpierw zauważmy, że jeśli m, n są liczbami naturalnymi $m < n$, to wtedy

$$\begin{aligned}
d(y_m, y_n) \leq & d(y_m, y_{m+1}) + d(y_{m+1}, y_{m+2}) + \ldots + d(y_{n-1}, y_n) \\
= & d(F^m(x), F^{m+1}(x) + d(F^{m+1}(x), F^{m+2}(x)) + \ldots d(F^{n-1}(x), F^n(x)) \\
\leq & c^m d(x, F(x)) + c^{m+1} d(x, F(x)) + \ldots + c^{n-1} d(x, F(x)) \\
\leq & d(x, F(x)) \sum_{k=0}^{\infty} c^{m+k} = d(x, F(x)) \cdot \frac{c^m}{1-c}.
\end{aligned}$$

Ponieważ $c \in (0,1)$, to $\lim_{n\to\infty} c^n = 0$ a stąd dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie że dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}$ jeśli $n_0 < m, n$ to wtedy $d(y_m, y_n) < \epsilon$. Stąd y jest ciągiem podstawowym w przestrzeni X a więc zbieżny, bo X jest przestrzenią zupełną. Istnieje więc $z \in X$ takie że $z = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} F^n(x)$. Pokażemy, że $F(z) = z$.

Dla dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej $\epsilon > 0$ istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie że dla dowolnego $n > n_0$ zachodzi $d(F^n(x), z) < \frac{\epsilon}{2}$. Wybierzmy liczbę naturalną n, taką, że $n - 1 > n_0$, to wtedy

$$d(F(z), z) \leq d(F(z), F^n(x)) + d(F^n(x), z) \leq c \cdot d(z, F^{n-1}(x)) + d(F^n(x), z) < \epsilon.$$

Ponieważ powyższa nierówność zachodzi dla każdego $\epsilon > 0$, więc z jest punktem stałym odwzorowania F, czyli mamy $F(z) = z$. Pokażemy jedyność punktu stałego. Niech $z, z' \in X$ będą punktami stałymi, to wtedy

$$d(z, z') = d(F(z), F(z')) \leq c \cdot d(z, z') \longrightarrow d(z, z') = 0 \longrightarrow z = z'.$$

Pierwsza implikacja wynika z faktu, że $0 \leq c < 1$, natomiast druga wynika z definicji metryki d. ■

Przykład 3.2.1 (Przestrzeń $\mathfrak{C}([0,1)$) *Ważną przestrzenią metryczną zupełną jest przestrzeń wszystkich rzeczywistych funkcji ciągłych określonych na odcinku $[0,1]$ oznaczoną przez $X = \mathfrak{C}([0,1])$ z metryką zbieżności jednostajnej:*

$$(\forall f, g \in \mathfrak{C}([0,1]))(d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0,1]\}).$$

Łatwo sprawdzić, że funkcja d określona powyższym wzorem stanowi metrykę na przestrzeni X. Pokażemy, że nasza przestrzeń jest zupełna. Niech będzie dany ciąg podstawowy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$. Wówczas dla każdej liczby $x \in [0,1]$ ciąg wartości $(f(x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ jest ciągiem podstawowym na prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$ (która jako przestrzeń euklidesowa jest przestrzenią zupełną). Wtedy dla dowolnego $x \in [0,1]$ istnieje $g(x) \in \mathbb{R}$ taka że $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x)$. Pokażemy, że $g \in X$ oraz $\lim_{n\to\infty} d(f_n, g) = 0$ czyli g jest jednostajną granicą ciągu f_n a więc g musi być funkcją ciągłą na mocy twierdzenia 1.2.10. Jednostajną zbieżność ciągu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ do funkcji g uzyskujemy, stosując twierdzenie 1.2.11. Niech $\epsilon > 0$ będzie dowolne, to istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie że dla dowolnego $m, n > n_0$ $d(f_n, f_m) < \epsilon$ czyli $\sup\{|f_n(x) - f_m(x)| : x \in [0,1]\} < \epsilon$. *Niech $x \in [0,1]$ będzie dowolne, to wtedy mamy*

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup\{|f_n(x) - f_m(x)| : x \in [0,1]\} < \epsilon,$$

a więc założenie twierdzenia 1.2.11 jest spełnione.

3.3 Rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych

Definicja 3.3.1 (Różniczkowalność funkcji wielu zmiennych) *Niech będzie dany zbiór $D \subseteq \mathbb{R}^n$ oraz $x_0 \in D$ taki że dla pewnego $r > 0$ $K(x_0, r) \subseteq D$. Nich $f : D \to \mathbb{R}^m$ będzie funkcją wielu zmiennych. Powiemy że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 jeżeli istnieją funkcja $u : D \to \mathbb{R}^m$ oraz macierz $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ takie że*

$$(\exists \delta > 0)(\forall x \in K(x_0, \delta))\ (f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + u(x)) \wedge \lim_{x \to x_0} \frac{u(x)}{\|x - x_0\|} = \mathbf{0}$$

lub równoważnie

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Twierdzenie 3.3.1 *Jeżeli $f : D \to \mathbb{R}^m$ jest funkcją różniczkowalną w $x_0 \in D$ i ma wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w x_0, to macierz A jest jedyna i wyraża się wzorem następującym:*

$$(\forall i \in \{1, \ldots, m\})(\forall j \in \{1, \ldots, n\})\ [A]_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0),$$

gdzie $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$, dla pewnych funkcji $f_i : D \to \mathbb{R}$ oraz $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Dowod. *Niech* ■

Definicja 3.3.2 (Macierz Jacobiego) *Załóżmy że funkcja $f : U \to \mathbb{R}^m$ jest określona na pewnym zbiorze otwartym $U \subseteq \mathbb{R}^n$ i posiada na U wszystkie pochodne pierwszego rzędu, to macierz $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ taką że*

$$(\forall i \in \{1, \ldots, m\})(\forall j \in \{1, \ldots, n\})\ [A]_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x),$$

nazywamy macierzą Jacobiego funkcji f na zbiorze U w punkcie $x \in U$ i oznaczamy ją przez $J_f(x)$.

Twierdzenie 3.3.2 *Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0, to jest w tym punkcie ciągła.*

Dowod. *Zauważmy że*

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} f(x) =& f(x_0) + \lim_{x \to x_0} \big(f(x) - f(x_0)\big) = f(x_0) + \\ &+ \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{\|x - x_0\|} \|x - x_o\| + A(x - x_0) \right) = \\ =& f(x_0) + 0 = f(x_0).\end{aligned}$$

■

Twierdzenie 3.3.3 *Jeżeli funkcja f ma wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu ciągłe w otoczeniu punktu $\bar{x}_0$, to f jest funkcą różniczkowalną w $\bar{x}_0$.*

Dowod. *Niech $\bar{x}, \bar{x}_0 \in U \subseteq \mathbb{R}^n$, gdzie U jest zbiorem otwartym na którym wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu są funkcjami ciągłymi. Niech $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\bar{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Dla $k = 1, \ldots n$ załóżmy, że $\bar{x}_k = (x_1^0, \ldots, x_k^0, x_{k+1}, \ldots, x_n)$. Dla każdego $i \in \{1, \ldots, m\}$ mamy*

$$\begin{aligned} f_i(\bar{x}) - f_i(\bar{x}_0) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\bar{x}_0)(x_k - x_k^0) &= \sum_{k=1}^{n} \left(f_i(\bar{x}_{k-1}) - f_i(\bar{x}_k) - \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\bar{x}_0)(x_k - x_k^0) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\bar{\xi_k})((\bar{x}_{k-1})_k - (\bar{x}_k)_k) - \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\bar{x}_0)(x_k - x_k^0) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\bar{\xi_k})(x_k - x_k^0) - \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\bar{x}_0)(x_k - x_k^0) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\bar{\xi_k}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\bar{x}_0) \right)(x_k - x_k^0) \end{aligned}$$

Jeżeli $\bar{x}$ dąży do $\bar{x}_0$, to dla każdego k, $\bar{x}_k \in U$ oraz $\bar{\xi_k} \in U$ dążą do $\bar{x}_0$ oraz $\frac{|x_k - x_k^0|}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} \leq 1$. Wtedy, korzystając z faktu, że pochodne cząstkowe są ciągłe na U dla każdego $i \in \{1, \ldots, m\}$, mamy

$$\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} \frac{f_i(\bar{x}) - f_i(\bar{x}_0) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\bar{x}_0)(x_k - x_k^0)}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} = 0.$$

W konsekwencji mamy:

$$\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} \frac{\|f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0) - J_f(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0)\|}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} = 0,$$

co należało dowieść. ■

Podamy teraz twierdzenie o różniczkowalnoąci funkcji złożonej.

Twierdzenie 3.3.4 *Niech k, m, n będą dodatnimi liczbami naturalnymi, $x_0 \in U \subseteq \mathbb{R}^n$, $y_0 \in V \subseteq \mathbb{R}^k$ będą punktami zawartymi w pewnych zbiorach otwartych U i V odpowiednio. Niech $f : D_f \to \mathbb{R}^k$, $g : D_g \to \mathbb{R}^m$ będą funkcjami takimi że*

1. *$U \subseteq D_f \subseteq \mathbb{R}^n$,*
2. *$V \subseteq D_g \subseteq \mathbb{R}^k$ i $V \subseteq f[D_f]$,*
3. *$y_0 = f(x_0)$,*
4. *f jest różniczkowalna w x_0 i B jest macierzą Jacobiego funkcji f w punkcie x_0,*

5. g jest różniczkowalna w y_0 i A jest macierzą Jacobiego funkcji g w punkcie y_0,

to funcja złożona $g \circ f$ jest też różniczkowalna w x_0 oraz macierz $A \cdot B$ jest macierzą Jacobiego funkcji $g \circ f$ w x_0.

Dowod. *Pokażemy, że*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|g \circ f(x) - g \circ f(x_0) - AB(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Z ciągłości funkcji f, istnieje takie $r > 0$, że $K(x_0, r) \subseteq U$ oraz $f[K(x_0, r)] \subseteq V$. Niech $y = f(x)$ dla $x \in K(x_0, r)$.

Zauważmy, że istnieją funkcje u, v, takie że $f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + u(y)$ i $lim_{x \to x_0} \frac{\|u(x)\|}{\|x - x_0\|} = 0$, $g(y) = g(y_0) + A(y - y_0) + v(y)$ i $lim_{y \to y_0} \frac{\|v(y)\|}{\|y - y_0\|} = 0$. Więc mamy

$$\begin{aligned}\frac{\|g \circ f(x) - g \circ f(x_0) - AB(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} &\leq \frac{\|g(y) - g(y_0) - A(y - y_0)\|}{\|y - y_0\|} \frac{\|y - y_0\|}{\|x - x_0\|} + \frac{\|A(y - y_0) - AB(x - x}{\|x - x_0\|} \\ &= \frac{\|v(y)\|}{\|y - y_0\|} \frac{\|A(x - x_0) + u(x)\|}{\|x - x_0\|} + \|A\| \frac{\|f(x) - f(x_0) - B(x - x_0)}{\|x - x_0\|} \\ &= \frac{\|v(y)\|}{\|y - y_0\|} \left(\|A\| + \frac{u(x)}{\|x - x_0\|} \right) + \|A\| \frac{\|u(x)\|}{\|x - x_0\|}.\end{aligned}$$

Ponieważ założyliśmy że $y = f(x)$ oraz $y_0 = f(x_0)$, to z ciągłości funkcji f mamy: jeśli $x \to x_0$, to $y \to y_0$. Stąd dla x-a dążącego x_0, ostatnie wyrażenie w powyższej nierówności dąży do zera, więc także pierwsze wyrażenie (które jest nieujemne) również dąży do 0, gdy x dąży do x_0. ■

Przykład 3.3.1 *Niech będą dane funkcje różniczkowalne $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ oraz $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, takie że dla pewnych funkcji $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mamy $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x)$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^n$. Wtedy macierze Jacobiego są odpowiednio równe:*

$$J_g(y) = \left(\tfrac{\partial g}{\partial x_1}(y) \ldots \tfrac{\partial g}{\partial x_n}(y) \right); \; J_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x). \end{pmatrix}$$

Więc pochodna funkcji złożonej (czyli macierz Jacobiego) w punkcie x wynosi

$$J_{g \circ f}(x) = \left(\sum_{k=1}^n \tfrac{\partial g}{\partial x_k}(f(x)) \tfrac{\partial f_k}{\partial x_1}(x) \quad \ldots \quad \sum_{k=1}^n \tfrac{\partial g}{\partial x_k}(f(x)) \tfrac{\partial f_k}{\partial x_n}(x) \right)$$

Przykład 3.3.2 *Niech $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$ będą dwoma ustalonymi wektorami. Niech $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ będzie funkcją jednej zmiennej o wartościach w $\mathbb{R}^n$ zadaną wzorem następującym:*

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \; h(t) = x_0 + t(x - x_0) = (x_1^0 - t(x_1 - x_1^0), \ldots, x_n^0 - t(x_n - x_n^0)).$$

Wtedy, funkcja f jest różniczkowalna w punkcie t i jej macierz Jacobiego wynosi:

$$J_h(t) = \begin{pmatrix} x_1 - x_1^0 \\ \vdots \\ x_n - x_n^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix},$$

gdzie $\Delta x_k = x_k - x_k^0$ dla dowolnego $k \in \{1, \dots, n\}$.

Przykład 3.3.3 (Wzór Taylora funkcji rzeczywistej wielu zmiennych) *Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną w punkcie x_0. Ustalmy dowolny punkt $x \in \mathbb{R}^n$ i niech $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją jednej zmiennej zdefiniowanej następująco:*

$$(\forall t \in \mathbb{R})\ \varphi(t) = f(x_0 + t(x - x_0)) = f \circ h(t)$$

jako złożenie funkcji f z funkcją h zdefiniowaną w poprzednim przykładzie. Wówczas pochodna funkcji φ wyraża się wzorem następującym

$$\varphi'(t) = J_\varphi(t) = J_f(h(t))J_h(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(h(t)) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(h(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(h(t))\Delta x_k.$$

Jeżeli ponadto, założymy że istnieją wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji f, to różniczkując funkcję $\frac{\partial f}{\partial x_k}h(t)$ jak poprzednio po zmiennej t otrzymujemy:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}h(t)\right)'_t = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k}(h(t))\Delta x_l.$$

Więc druga pochodna funkcji φ w punkcie t wynosi

$$\varphi^{"}(t) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k}(h(t))\Delta x_l \Delta x_k.$$

Jeżeli założymy że dla ustalonej liczby naturalnej m, funkcja f ma wszystkie ciągłe pochodne cząstkowe m-tego rzędu w pewnym otoczeniu punktu x_0, to $\varphi^{(m)}(t)$ istnieje i wyraża się następującym wzorem:

$$\varphi^{(m)}(t) = \sum_{k_1=1}^{n} \dots \sum_{k_m=1}^{n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{k_1} \dots \partial_{x_m}}(h(t))\Delta x_{k_1} \dots \Delta x_{k_m}.$$

Ostatecznie, przy ostatnim założeniu, możemy zastosować wzór Taylora dla funkcji φ w punkcie $t = 1$ dla $t_0 = 0$:

$$f(x) = \varphi(1) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}1^k + \frac{\varphi^{(m)}(c)}{m!}1^m = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} \sum_{n_1=1}^{n} \dots \sum_{n_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{n_1} \dots \partial_{x_{n_k}}}(x_0)\Delta x_{n_1} \dots \Delta x_{n_k} +$$

$$+ \frac{1}{m!} \sum_{k_1=1}^{n} \dots \sum_{k_m=1}^{n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{k_1} \dots \partial_{x_m}}(x_0 + c(x - x_0))\Delta x_{k_1} \dots \Delta x_{k_m},$$

dla pewnego $c \in (0,1)$. Ostatni wzór jest tzw. wzorem Taylora dla funkcji rzeczywistej o n zmiennych a ostatni składnik w sumie, jest nazywany m-tą resztą Lagrange'a.

Na podstawie poprzedniego przykładu możemy sformułować następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.3.5 *Niech $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \subseteq U \subseteq D_f$, gdzie U jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^n$. Niech $f : D_f \to \mathbb{R}$ będzie funkcją rzeczywistę n zmiennych, tak że dla ustalonej liczby naturalnej m istnieją wszystkie ciągłe pochodne cząstkowe m-tego rzędu na zbiorze U. Niech $x \in U$, to wtedy istnieje $c \in (0,1)$ taka że*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} \sum_{n_1=1}^{n} \dots \sum_{n_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{n_1} \dots \partial_{x_{n_k}}}(x_0) \Delta x_{n_1} \dots \Delta x_{n_k} + R_m(x),$$

gdzie

$$R_m(x) = \frac{1}{m!} \sum_{k_1=1}^{n} \dots \sum_{k_m=1}^{n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{k_1} \dots \partial_{x_m}}(x_0 + c(x - x_0)) \Delta x_{k_1} \dots \Delta x_{k_m},$$

jest m-tą resztą Lagrange'a.

3.4 Ekstrema lokalne i warunkowe funkcji wielu zmiennych

Częstym problemem z jakim mamy do czynienia jest wyznaczenie wielkości najwiekszej lub najmniejszej z funkcji zadanej na danym obszarze. Twierdzenie Weierstrassa gwarantuje istnienie takich wartości dla funkcji ciągłych zadanych na zwartych podzbiorach przestrzeni euklidesowej o określonym wymiarze.

Definicja 3.4.1 (Extremum lokalne) *Niech $x_0 \in U \subseteq\subseteq \mathbb{R}^n$ bedzie otoczeniem otwartym punktu x_0. Niech $f : D \to \mathbb{R}^m$ będzie funkcją, to x_0 jest*

- *minimum lokalnym f jeśli $(\exists r > 0)(\forall x \in B(x_0, r)) f(x_0) \leq f(x)$,*
- *maximum lokalnym f jeśli $(\exists r > 0)(\forall x \in B(x_0, r)) f(x) \leq f(x_0)$,*
- *ekstremum lokalnym f jeśli jest minimum lokalne lub maximum lokalne funkcji f.*

Powiemy, że x_0 jest maksimum globalnym funkcji f jeśli $\forall x \in D) f(x) \leq (x_0)$, analogicznie definiujemy minimum globelne.

Przykład 3.4.1 *Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie zadana wzorem $f(x,y) = x^2 + y^2$, to dla dowolnego $x, y \in \mathbb{R}$ mamy*

$$f(0,0) = 0 \leq x^2 + y^2 = f(x,y).$$

Więc $(0,0)$ jest minimum globalnym funkcji f.

Wiemy, że w przypadku funkcji f rzeczywistej jednej zmiennej, jeżeli f posiada pochodną w punkcie x_0, które jest ekstremum lokalnym funkcji f, to $f'(x_0) = 0$. Z tego faktu wynika, że jeżeli rzeczywista funkcja wielu zmiennych ma pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w x_0 i x_0 jest ekstremum lokalnym, to wspomniane wszystkie pochodne cząstkowe zerują się w tym punkcie.

Twierdzenie 3.4.1 (Warunek konieczny istnienia ekstremum) *Jeżeli x_0 jest extremum lokalnym funkcji f i wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu istnieją w tym punkcie, to są one równe zeru.*

Dowod. *Niech $n \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. oraz $v_k = (0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ dla $k \in \{1, \ldots n\}$. Niech $r > 0$ takie że $B(x_0, r) \subseteq D$, to definiujemy funkcję dla $t \in (-r, r)$*

$$\varphi(t) f(x_0 + tv_k).$$

Jeżeli x_0 jest ekstremum lokalnym funkcji f, to 0 jest ekstremum lokalnym funkcji φ. Zauważmy, że

$$\varphi'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv_k) - f(x_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial v_k}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0).$$

Ponieważ z założenia $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)$ istnieje, więc pochodna funkcji φ istnieje w 0. Ponieważ 0 jest ekstremum funkcji φ jednej zmiennej, to wtedy $\varphi'(0) = 0$ a więc $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)$. Ponieważ k było dowonie wybrane spośród liczb $\{1, \ldots, n\}$, więc otrzymujemy tezę twierdzenia. ■

Tak jak w przypadku funkcji jednej zmiennej, podobnie istnieją funkcje, dla których zachodzi warunek konnieczny w punkcie x_0 ale ekstremum lokalne funkcji f nie wystepuje w x_0. Przykładem jest tutaj $f(x, y) = x^2 - y^2$ i $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Podamy warunek, który gwarantuje że, funkcja ma ekstremum lokalne. Wierw przypomnimy pojęcie dodatniej określoności macierzy kwadratowej. Powiemy, że macierz kwadratowa $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jest

- *dodatnio określona jeżeli $(\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{0}) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j > 0$,*
- *ujemnie określona jeżeli $(\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{0}) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j < 0$.*

Zachodzi tzw. kryterium Sylvestera.

Twierdzenie 3.4.2 (Kryterium Sylvestera) *Jeżeli macierz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jest symetryczna, to*

- *A jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy gdy*

$$(\forall k \in \{1, \ldots, n\})\ det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \\ a_{1k} & \ldots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0.$$

- *A jest ujemnie określona wtedy i tylko wtedy gdy*

$$(\forall k \in \{1, \ldots, n\})\ det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ & & \\ a_{1k} & \ldots & a_{kk} \end{pmatrix} < 0.$$

Twierdzenie 3.4.3 (warunek wystarczający istnienia ekstremum) *Niech $x_0 \subseteq U \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n$, U otwarty w $\mathbb{R}^n$. Niech będzie dana funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ i macierz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ taka, że dla dowolnego $i, j \in \{1, \ldots, n$ $[\mathrm{ch}\,(x_0)]_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)$ oraz*

1. *wszystkie pochodne pierwszego i drugiego rzędu istnieją i są ciągłe w U,*
2. $\forall \in \{1, \ldots, n\}(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0)$.

Wtedy mamy

- *jeśli $\mathrm{ch}\,(x_0)$ jest dodatnio określona, to f mam minimum lokalne w x_0,*
- *jeśli $\mathrm{ch}\,(x_0)$ jest ujemnie określona, to f mam minimum lokalne w x_0.*

Dowod. *Funkcja f spełnia założenia twierdzenia o rozwinięciu Taylora do drugiego stopnia w pewnym otoczeniu $B(x_0, r)$ dla pewnego $r > 0$*

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\Delta x_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_2}(x_0)\Delta x_i \Delta x_j.$$

Ponieważ na mocy (1) *wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu się zerują w x_0, to dostajemy*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_2}(x_0)\Delta x_i \Delta x_j.$$

Jeżeli $\mathrm{ch}\,(x_0)$ jest dodatnio określona, to na mocy ciągłości pochodnych drugiego rzędu, istnieje $\delta > 0$ taka że $\delta < r$ i $\mathrm{ch}\,(y)$ jest dodatnio określona w każdym $y \in B(x_0, \delta)$ (wszystkie wyznaczniki które występują w kryterium Sylvestera są dodatnie). Wtedy, dla dowolnego $x \in B(x_0, \delta)$ otrzymujemy

$$f(x) - f(x_0) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_2}(x_0)\Delta x_i \Delta x_j > 0,$$

więc x_0 jest minimum lokalnym funkcji f. Analogiczne rozumowanie zachodzi, gdy macierz $\mathrm{ch}\,(x_0)$ *jest ujemnie określona, wtedy x_0 jest maksimum lokalnym funkcji f.* ■

Definicja 3.4.2 (Ekstremum warunkowe) *Niech $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym oraz mamy dwie funkcje $f : U \to \mathbb{R}$ oraz $G : U \to \mathbb{R}^m$. Niech $x_0 \in U$ będzie takie że $G(x_0) = 0$, to x_0 jest ekstremum warunkowym funkcji f jeśli*

- $G(x_0) = \bar{0} \in \mathbb{R}^m$,
- $(\exists r > 0)(\forall x \in B(x_0, r))\ G(x) = \bar{0} \longrightarrow f(x) \leq f(x_0)$ *wtedy* f *przyjmuje warunkowe maksimum lokalne w* x_0 *lub*
- $(\exists r > 0)(\forall x \in B(x_0, r)) G(x) = \bar{0} \longrightarrow f(x_0) \leq f(x)$ *wtedy* f *przyjmuje warunkowe minimum lokalne w* x_0.

Wpierw rozważmy bardzo szczególny przypadek, mianowicie niech f, G *będa funkcjami dóch zmiennych określonych na zbiorze otwartym* $U \subseteq \mathbb{R}^2$, $f, G : U \to \mathbb{R}$ *i załóżmy, że*

- $(x_0, y_0) \in U$ *i* $G(x_0, y_0) = 0$,
- *jest* $r > 0$ *oraz funkcja* $g : (x_0 - r, x_0 + r) \to \mathbb{R}$ *taka że dla kazdego* $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ $G(x, g(x)) = 0$ *i* $g(x_0) = y = 0$.

Załóżmy, że wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego funkcji f *rzędu istnieją i* g *jest różniczkowalną funkcją w pewnym otoczeniu punktu* x_0. *Bez straty ogólności możemy założyc, że* g *jest różniczkowalna na przedziale* $(cx_0 - r, x_0 + r$. *Zauważmy, że na rozważanym przedziale, funkcja* $h(x) = f(x, g(x))$ *jest stała i przyjmuje wartość równą* 0. *Wtedy, na mocy różniczkowalności funkcji złożonej, dla dowolnego* $x \in (x_0 - r, x_+ r)$ *mamy:*

$$0 = h'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \cdot g'(x)$$

Jeżeli dodatkowo założymy, że $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, *to z założenia ciągłości pochodnej cząstkoej po zmiennej* y, *w pewnym otwartym prostokącie* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ $0 < \delta < r$ *mamy* $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$. *Stąd*

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial t}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))}$$

Rozdział 4

Dodatek

4.1 Zbiory

Wśród aksjomatów teorii mnogości są **aksjomat ekstensjonalności**, **aksjomat pary**, **aksjomat sumy**, **aksjomat nieskończoności** *oraz* **ufundowania** *których brzmienie jest następujące:*

Aksjomat ekstensjonalności (AE) $(\forall x)(\forall y)\ \ x = y \longleftrightarrow ((\forall t)\ t \in x \longleftrightarrow t \in y)$,

Aksjomat pary (APair) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall t) t \in z \longleftrightarrow (t = x \vee t = y)$,

Aksjomat sumy (AU) $(\forall x)(\exists y)(\forall t)\ \ t \in y \longleftrightarrow (\exists u \in x) t \in u$,

Aksjomat potęgowania (AP) $(\forall x)(\exists y)(\forall t)\ (t \in y) \longleftrightarrow ((\forall s) s \in y \longrightarrow s \in t)$

Aksjomat wyróżniania (AW) *Niech* $\phi \in \mathcal{L}(\in)$ *będzie formułą języka teorii mnogości,* p *skończony wektor parametrów. To wtedy mamy* $(\forall x)(\exists y)(\forall t) \quad (t \in y \longleftrightarrow t \in x \wedge \phi(t, p))$,

Aksjomat nieskończoności (AInf) $(\exists x)\ \emptyset \in x \wedge (\forall t \in x) t \cup \{t\} \in x$,

Aksjomat ufundowania (AF) $(\forall s)(s \neq \emptyset \longrightarrow (\exists x \in s) x \cap s = \emptyset)$.

W aksjomacie pary, zbiór z *jest jedyny na podstawie AE i oznaczamy przez* $\{x, y\}$*, dalej przez* $\{x\}$ *oznaczamy zbiór* $\{x, x\}$*. W aksjomacie sumy zbiór* y *oznaczamy przez* $\bigcup x$ *który jest jedyny na mocy (AE). W aksjomacie potegowania zbiór* y *oznaczamy przez* $P(x)$*. W aksjomacie wyróżniania* y *jest jedynym takim zbiorem na mocy (AE) i* y *oznaczamy przez* $\{t :\ t \in x \wedge \phi(t, p)\}$ *albo prosciej* $\{t \in x :\ \phi(t, p)\}$*. Dla dowolnych zbiorów* a *i* b*, niech* $a \cup b = \bigcup\{a, b\}$*.*

Mamy nastepujący fakt:

Fakt 4.1.1 $(\forall x)(\neg(x \in x))$.

Dowod. *Niech x bedzie takim zbiorem dla którego zachodzi $x \in x$. Rozważmy następujący zbiór:*

$$s = \{t : \ t \in x \wedge t \in t\}.$$

Oczywiście zbiór ten jest niepusty ponieważ jego elementem jest sam x. Z (AF) mamy taki $t \in s$ $s \cap t = \emptyset$ ale $t \in t$ oraz $t \in s$ tak więc $t \in s \cap t$ więc $\neg(s \cap t = \emptyset)$. ■

Zamiast $\neg(x \in y)$ będziemy pisać $x \notin y$. Powiemy że $a \subseteq b$ wtedy i tylko wtedy gdy $(\forall t)\ t \in a \longrightarrow t \in b$, w miejsce $\subseteq$ możemy też wstawić $\subset$.

Uwaga 4.1.1 *Z faktu 4.1.1 wynika to, że nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów to jest*

$$\neg((\exists x)(\forall t) t \in x).$$

Gdyby taki zbiór x istniał, to że jest jest on zbiorem, mielibyśmy $x \in x$ co jest niemożliwe.

Aksjomat nieskończoności mówi że instnieje zbiór x, który jest induktywny. W tym zbiorze możemy wprowadzić relację $<$ w taki sposób:

$$(\forall a, b \in x) \ \ (a < b \longleftrightarrow a \in b).$$

Niech $z = \{y \in P(x) : AInf(y)\}$ będzie zbiorem podzbiorów x które spełniaja $(AInf)$. Jest on niepusty ponieważ sam x do niego należy. Z (AF) jest taki $\omega \in z$ taki że $\omega \cap z = \emptyset$. Dla $t \in \omega$ niech $t+1 = t \cup \{t\}$ oraz $0 = \emptyset$. Widzimy natychmiast $t \in t+1$ a więc $t < t+1$, zauważmy że $0 + 1 = \emptyset \cup \{0\} = \{0\}$, tak więc przez 1 bedziemy oznaczać $\{0\}$.

Twierdzenie 4.1.1 *Istnieje $\subset$-minimalny zbiór induktywny, to znaczy*

$$(\exists \omega)((\neg(\exists x) x \subset \omega \wedge x \neq \omega \wedge x \text{ jest induktywny}).$$

Dowod. *Na mocy $(AInf)$ istnieje x kóry jest induktywny a z poprzedniej uwagi, istnieje ω, który jest $\subset$-minimalnym podzbiorem zbioru induktywnego x. Niech będą dwa zbiory induktywne x oraz y. Ponadto niech ω_x jest minimalnym induktywnym podzbiorem x a ω_y bedzie minimalnym podzbiorem induktywnym y. To $\omega_x \cap \omega_y$ jest też zbiorem induktywnym, zawartym w x oraz y. Wobec minimalności zbiorów ω_x i ω_y mamy $\omega_x = \omega_x \cap \omega_y$ oraz $\omega_y = \omega_x \cap \omega_y$, a stąd otrzymujemy równość $\omega_x = \omega_y$. Tak więc istnieje najmniejszy zbiór induktywny $\omega = \bigcap\{x : \ x \text{ jest induktywny}\}$.* ■

W teorii mnogości zbiór o którym mowa w powyższym twierdzeniu, oznaczmy przez ω. Ponadto widzimy że $\{0, 1, 1+1, (1+1)+1, \ldots\} \subset \omega$. Taki zbiór będziemy nazywać zbiorem liczb naturalnych i poza tym rozdziałem, oznaczać będziemy go przez $\mathbb{N}$ a każdy jego element nazywać będziemy liczbą naturalną.

Powiemy, że zbiór y jest tranzytywny wtedy i tylko wtedy gdy

$$(\forall t)(\forall x) \ (t \in x \wedge x \in y) \longrightarrow t \in y.$$

Fakt 4.1.2 *ω jest zbiorem tranzytywnym.*

Dowod. *Rozważmy następujący zbiór*

$$z = \{t \in \omega : \ \ t \subset \omega\}.$$

Zauważmy, że jest on induktywny. Oczywiście $\emptyset \in \omega$ oraz $\emptyset \subset \omega$ więc $\emptyset \in z$. Niech $t \in z$, to $t \in \omega$ oraz $t \subset \omega$. ω jest induktywny, więc $t \cup \{t\} \in \omega$. Ponadto, $t \in \omega$, więc $\{t\} \subset \omega$. Ponieważ $t \in z$ to również $t \subset \omega$ a więc $t \cup \{t\} \subset \omega$ więc $t \cup \{t\} \in z$, co świdczy, że z jest induktywnym podzbiorem ω, co wobec minimalności ω otrzymujemy równość $z = \omega$. Pokazemy teraz, że ω jest tranzyrywym zbiorem. Niech $t \in \omega$, to $t \in z$ a więc $t \subset \omega$, to oznacza, że jesli $s \in t$ i $t \in \omega$, to również $s \in \omega$, co kończy dowód naszego faktu. ■

Fakt 4.1.3 *$(\omega, \in)$ jest relacją tranzytywną.*

Dowod. *Wystarczy pokazać, że każdy element ω jest tranzytywny. Niech $z \subseteq \omega$*

$$z = \{t \in \omega : \ \ t \text{ jest tranzytywny}\}.$$

Pokażemy, że zbiór z jest zbiorem induktywnym. Oczywiście $\emptyset \in \omega$ jest zbiorem tranzytywnym. Niech $t \in Z$, pokażemy, że $t \cup \{t\}$ jest również w z. ω jest zbiorem induktywnym i $t \in \omega$ więc $t \cup \{t\} \in \omega$. Niech $s \in t \cup \{t\}$, to albo $s \in t$ albo $s = t$. Niech $s \in t$, ponieważ t jest tranzytywny, to $s \subset t$ ale $t \subset t \cup \{t\}$ więc $s \subset t \cup \{t\}$. Natomiast, jeśli $s = t$, to $s \subset t \subset t \cup \{t\}$. Tak więc $t \cup \{t\} \in \omega$ i jest tranzytywny, stąd jest również elementem zbioru z. Zbiór z jest induktywnym podzbiorem ω, co wobec minimalności ω zbiory te są równe $z = \omega$. ■

Pokażemy, nastepujący fakt.

Fakt 4.1.4 *$(\forall x)$ $(x, <)$, (tutaj $< = \in$) spełnia następujace własności:*

1. *$(\forall t \in x)\ \ \neg(t < t)$,*
2. *$(\forall y \in P(x))\ (y \neq \emptyset) \longrightarrow (\exists t \in y)(\neg(\exists r \in y)(r < t))$.*

Dowod. *Pierwsza własność wynika wprost z poprzedniego faktu oraz $z < = \in$. Niech teraz $y \subseteq x$ będzie niepustym podzbiorem $tr(x)$. To na mocy (AF), jest takie $t \in y$ że $t \cap y \neq \emptyset$. W takim razie $\neg(\exists r \in y) r \in t$ tj. $\neg(\exists r \in y) r < t$ a to właśnie oznacza że t jest $<$-minimalnym elementem zbioru y, co kończy dowód naszego faktu.* ■

Wniosek 4.1.1 *Uporządkowana para $(\omega, <)$ spełnia nastepujące własności:*

1. *$(\forall t \in \omega)\ \ \neg(t < t)$,*
2. *$(\forall r, s, t \in \omega)\ \ r < s \wedge s < t \longrightarrow r < t$,*
3. *$(\forall y \in P(\omega))\ (y \neq \emptyset) \longrightarrow (\exists t \in y)(\neg(\exists r \in y)(r < t))$.*

Twierdzenie 4.1.2 (Twierdzenie indukcji matematycznej) *Jesli z jest zbiorem takim że*

1. $0 \in z$ *oraz*
2. $(\forall n \in \mathbb{N})((\forall m < n)(m \in z)) \longrightarrow n \in z$,

to wtedy $\omega \subset z$.

Dowod. *Załóżmy, że teza jest nieprawdziwa, więc* $s = \{n \in \omega : \ n \notin z\}$ *jest niepusty, to jest takie* $n \in s$, *że* n *jest* $\in$*-minimalnym elementem zbioru* s. *Z założenia pierwszego* $0 < n$, *oraz z minimalności* n $(\forall m \in n) m \in z$, *więc z drugiej własności mamy* $n \in z$ *co prowadzi do sprzeczności.* ■

Pokażemy, że ω *spełnia aksjomaty Peano.*

Twierdzenie 4.1.3 *Zbiór* $\mathbb{N}$ *wraz z funkcją* $\mathbb{N} \ni n \mapsto n+1 \in \mathbb{N}$ *spełnia następujące własności:*

1. $0 \in \omega$,
2. $\neg(\exists n \in \omega)\ n+1 = 0$,
3. $(\forall n \in \mathbb{N})\ n \neq 0 \longrightarrow (\exists m \in \omega)\ n = m+1$,
4. $(\forall m, n \in \omega)\ \ m \neq n \longrightarrow m+1 \neq n+1$,
5. *spełniona jest twierdzenie o indukcji matematycznej.*

Dowod. *Pierwsza druga oraz ostatnia własność w tym twierdzeniu zostały wykazane wcześniej. Udowodnimy własność trzecią. Niech*

$$s = \{n \in \omega : n = 0 \vee (\exists m \in \omega)\ n = m+1.$$

Pokażemy, że s *jest induktywny. Oczywiście* $0 \in s$, *niech* $n \in s$, *to* $n \in \omega$, *niech* $m = n$, *to* $n+1 = m+1$ *i oczywiście* $m \in \omega$ *a więc* $(\exists m)\ n+1 = m+1$. ω *jest induktywny i* $n \in \omega$, *więc* $n+1 \in \omega$ *a stąd* $n+1 \in s$. *Pokazaliśmy więc, że* s *jest induktywnym podzbiorem* ω *a więc* $s = \omega$ *wobec minimalności* ω. *Stąd otrzymujemy*

$$\omega = \{n \in \omega : \ \ n = 0 \vee (\exists m \in \omega)\ n = m+1\}.$$

Pokażemy prawdziwość przedostatniej własności. Niech $n \neq m$ *oraz* $n+1 = m+1$, *to wtedy jest* $t \in n$, *takie że* $t \notin m$ *lub odwrotnie. Załóżmy pierwszy wariant alternatywy. Oczywiście* $t \in n \subset n \cup \{n\} = n+1$. *Gdyby* $t \in m+1 = m \cup \{m\}$ *to wtedy* $t = m$ *więc* $m \in n$ *więc* $m+1 \in n+1$ *ale* $m+1 = n+1$ *to* $m+1 \in m+1$ *sprzeczność. Więc* $n+1 \neq m+1$. *Drugi wariant, analogicznie prowadzi do sprzeczności.* ■

Z przedostatniej własności powyższego twierdzenia dostajemy.

Twierdzenie 4.1.4 (Zasada indukcji matematycznej) *Jesli z jest zbiorem takim że*

1. $0 \in z$ *oraz*

2. $(\forall n \in \omega) n \in z \longrightarrow n+1 \in z$,

to wtedy $\mathbb{N} \subset z$.

Dowod. *Załóżmy, że teza jest nieprawdziwa, więc* $s = \{n \in \omega : n \notin z\}$ *jest niepusty, to jest takie* $n \in s$, *że* n *jest* $\in$*-minimalnym elementem zbioru* s. *Z założenia pierwszego* $0 < n$, *więc z* 3 *własności twierdzenia 4.1.3* $(\exists m \in \mathbb{N}) m+1 = n$ *a wobec minimalności* n *wiemy że* $m \in z$, *co z drugiej własności wynika że* $n = m+1 \in z$, *co prowadzi do sprzeczności.* ■

4.2 Konstrukcja liczb rzeczywistych*

W tej sekcji przedstawimy konstrukcję liczb rzeczywistych spełniających aksjomaty wypisane na początku rozdziału w oparciu o przedziały Dedekinda.

Niech $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ *będzie ciałem liczb wymiernych z naturalnym porządkiem liniowym* $\leq$. *Podzbiór* $A \subset \mathbb{Q}$ *nazywamy przedziałem wtedy i tylko wtedy gdy*

1. A *jest ograniczony z góry*

2. *jeśli* $y < x \in A$ *to* $y \in A$.

Mówimy, że przedział $A \subset \mathbb{Q}$ *jest bez końca wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego* $x \in A$ *istnieje* $y \in A$ *taki że* $x < y$. *Zdefiniujemy* $(\mathbb{R}, <)$ *w sposób następujący:*

$$x \in \mathbb{R} \longleftrightarrow x \subset \mathbb{Q} \text{ jest przedziałem bez końca.}$$

Niech $x, y \in \mathbb{R}$ *to* $x \leq y$ *wtedy i tylko wtedy gdy* $x \subset y$. *Zachodzi następujące twierdzenie*

Twierdzenie 4.2.1 *Zbiór* $(\mathbb{R}, \leq)$ *jest liniowym porządkiem zupełnym tzn.*

1. $\forall x \in \mathbb{R} \;\; x \leq x$

2. $\forall x, y \in \mathbb{R} \;\; x \leq y \wedge y \leq x \longrightarrow x = y$

3. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \;\; x \leq y \wedge y \leq z \longrightarrow x \leq z$

4. $\forall x, y \in \mathbb{R} \;\; x < y \vee x = y \vee y < x$ *gdzie* $x < y \longleftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y$.

5. *jeśli* $A \subset \mathbb{R}$ *jest ograniczony z góry, to istnieje najmniejsze jego ograniczenie.*

Dowod. *Jedynie nietrywialnym warunkiem jest ostatni z nich. Niech* $A \subset \mathbb{R}$ *jest zbiorem ograniczonym w* $\mathbb{R}$, *to istnieje* $x_0 \in \mathbb{R}$ *że dla każdego* $x \in A$ $x \leq x_0$. *Niech* $z = \bigcup_{x \in A} x$, *pokażemy wpierw że* z *jest przedziałem w* $\mathbb{Q}$ *(tzn.* $z \in \mathbb{R}$*).*

1) ograniczoność *Ponieważ dla każdego* $x \in A$ $x \leq_{\mathbb{R}} x_0$ *to dla każdego* $x \in A$ $x \subset x_0$ *a więc* $z = \bigcup_{x \in A} x \subset x_0$ *więc* z *jest ograniczony w* $\mathbb{Q}$ *(bo* x_0 *jest ograniczony w* $\mathbb{Q}$*).*

2) *Niech* $u <_{\mathbb{Q}} v \in z = \bigcup_{x\in A} x$, *to wtedy istnieje* $x \in A$ *że* $v \in x$ *ale* x *jest przedziałem w* $\mathbb{Q}$ *i* $u <_{\mathbb{Q}} v \in x$ *więc* $u \in x$ *stąd* $u \in \bigcup_{x\in A} x$ *a więc* $u \in z$. *Udowodnimy, że* z *nie ma końca. Niech* $u \in z$ *to istnieje* $x \in A$ *że* $u \in x$ *ale* x *nie ma końca to istnieje* $t_x \in x$ *że* $u < t_x$ *stąd* $t_x \in z = \bigcup_{x\in A} x$ *a więc istnieje* $t_x \in z$ *że* $x < t_x$ *stąd ostatecznie* $z \in \mathbb{R}$. *Oczywiście dla każdego* $x \in A$ $x \subset z$ *a więc* $x \leq_{\mathbb{R}} z$ *dla każdego* $x \in A$.

Pozostało jedynie udowodnić że z *jest najmniejszym ograniczeniem zbioru* A *w* $(\mathbb{R}, \leq)$. *Przypuścmy że istnieje* $\mathbb{R} \ni z' < z$ *takie że jest ograniczeniem zbioru* A, *więc* $z' \subset z$ *i jednocześnie* $v \in z \setminus z' = \bigcup_{x\in A} x \setminus z \neq \emptyset$. *Istnieje więc* $x \in A$ *że* $v \in x$ *i* $v \notin z'$. x *i* z' *jest przedziałem stąd* $z' \subset x$ *i* $z' \neq x$ *stąd* $z' < x$ *i z drugiej strony* $A \ni x \leq z'$ *a więc* $z' < z'$ *a stąd* $z' \neq z'$ *co jest niemożliwe.* ■

Teraz zdefiniujemy działania zgodne porządkiem w w zbiorze licz rzeczywistych.

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (x, y) \mapsto x + y := \{u + v : \ u \in x \wedge v \in y\}.$$

Zamiast $+(x, y)$ *będziemy pisać* $x + y$. *Zachodzi następujący fakt*

Fakt 4.2.1 *Zbiór* $(\mathbb{R}, +)$ *jest grupą abelową.*

Dowod. *Niemal oczywisty.*

łączność *Niech* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *to wtedy*

$$\begin{aligned}(x + y) + z =& \{u + v : \ (u, v) \in x \times y\} + \{t : \ t \in z\} = \{(u + v) + t; \ (u, v, t) \in x \times y \times z\} \\ =& \{u + (v + t); \ (u, v, t) \in x \times y \times z\} = \{u; \ u \in x\} + \{v + t : \ (v, t) \in y \times z\} \\ =& x + (y + z).\end{aligned}$$

element neutralny

$$x + 0 = \{u + v : \ (u, v) \in x \times 0\} = \{u + 0 : \ u \in x\} = \{u : \ u \in x\} = x,$$

ponieważ $v \in 0$ *to* $u + v < u \in x$ *więc* $u + v \in x$ *i w drugą stronę* $u \in x$ *to istnieje* $u' \in x$ *i* $v \in 0$ *że* $u = u + v$.

element przeciwny

$$x + (-x) = \{u + v : \ (u, v) \in x \times (-x)\} = \{u : u \in 0\}.$$

przemienność

$$x + y = \{u + v : \ (u, v) \in x \times y\} = \{v + u : \ (v, u) \in y \times u\} = y + u,$$

co kończy dowód naszego faktu. ■

Teraz zdefiniujemy działanie mnożenia w $\mathbb{R}$. Niech $x, y \in \mathbb{R}$ to

$$xy = \begin{cases} \{t \in \mathbb{Q} : \ (\exists (u,v) \in x \times y)\ 0 \le u, v \wedge t < uv\} & dla\ x, y > 0 \\ \{t \in \mathbb{Q} : \ (\exists (u,v) \in x \times y)\ 0 \le x \wedge t < uv\} & dla\ x \ge 0 \wedge y < 0 \\ \{t \in \mathbb{Q} : \ (\exists (u,v) \in x \times y)\ 0 \le y \wedge t < uv\} & dla\ y \ge 0 \wedge x < 0 \\ \bigcup \{t \in \mathbb{Q} : \ (\exists s \in \mathbb{Q}) t < s \wedge s \in \bigcap \{w \in \mathbb{Q} : (\exists (u,v) \in x \times y)\ w < uv\}\} & dla\ x, y < 0 \end{cases}.$$

Powyższe działanie jest poprawnie okreslone, gdyż w każdym wymienionych przypadków jako wynik otrzymujemy przedział bez końców.

Analogicznie można udowodnić analogicznie nastepujący fakt.

Fakt 4.2.2 $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *jest ciałem.*

Dowód tego faktu może nie jest zbyt trudny ale niestety żmudny, więc go pominiemy.

Skorowidz

Bibliografia

[1] Kazimierz Kuratowski, Wstęp do rachunku różniczkowego*, PWN (1977), Biblioteka Matematyczna tom* **22**

[2] Marian Gewert i Zbigniew Skoczylas, Analiza matematyczna 1*, GiS (2003)*