

Analiza matematyczna 2

dr Joanna Jureczko

Zestaw 3

Równania różniczkowe rzędu drugiego sprowadzalne do równań rzędu pierwszego.
Równania różniczkowe liniowe o współczynnikach stałych.
Układy równań różniczkowych rzędu pierwszego.

ZADANIA

3.1. Rozwiązać równania różniczkowe z warunkami początkowymi, jeżeli są podane

- a) $y'' = 1 - y'^2$,
- b) $y'' = x + \sin x$,
- c) $2y'' = 3y^2$, $y(-2) = 1 = y'(-2)$,
- d) $xy'' = 2(x + y')$, $y(1) = 0, y'(1) = -1$.

3.2. Sprawdzić, która z podanych par tworzy układ fundamentalny na zadanym przedziale. Znaleźć rozwiązania tych równań z zadanymi warunkami początkowymi

- a) $y_1(x) = e^{-x}$, $y_2(x) = e^{2x}$, $(-\infty, \infty)$, $y'' - y' - 2y = 0$, $y(0) = -1, y'(0) = -5$,
- b) $y_1(x) = \ln x$, $y_2(x) = x$, $(0, e)$, $x^2(1 - \ln x)y'' + xy' - y = 0$, $y(1) = 2, y'(1) = 1$,
- c) $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2$, $(0, \infty)$, $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$, $y(1) = 3, y'(1) = 1$.

3.3. Rozwiązać równania różniczkowe liniowe o stałych współczynnikach z warunkami początkowymi

- a) $y'' + 9y = 0$, $y(\frac{\pi}{3}) = 1, y'(\frac{\pi}{3}) = 1$,
- b) $y'' - 2y' + y = 0$, $y(1) = 2, y'(1) = 3$,
- c) $y'' - 7y' + 10y = 0$, $y(0) = 1, y'(0) = 5$.

3.4.* Korzystając z metody uzmienniania stałych rozwiązać równania różniczkowe

- a) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$,
- b) $y'' - y = \frac{4x^2+1}{x\sqrt{x}}$,
- c) $y'' - 2y' \operatorname{tg} x = 1$.

3.5.* Rozwiązać układy równań różniczkowych z warunkami początkowymi, jeżeli są podane

- a) $y' = y + x$, $z' = y + z + x$,
- b) $x' - 3x - 8y = 0$, $y' + x + 3y = 0$,
- c) $y' = 1 - \frac{1}{z}$, $z' = \frac{1}{y-x}$,
- d) $x' = x \ln y$, $y' = -y$, $x(0) = e^{-2}, y(0) = e^2$,
- e) $x' = x^3$, $y' = \frac{1}{yx^2}$, $x(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}, y(0) = -\sqrt{2}$.

ODPOWIEDZI

3.1. a) $y = -x + \ln |C_1 e^{2x} + 1| + c_2$, b) $y = \frac{1}{6}x^3 + C_1 x - \sin x + C_2$, c) $y = \frac{4}{x^2}$ (lub $y = \frac{4}{(x+4)^2}$), d) $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{2}{3}$.

3.2. a) $y = e^{-x} - 2e^{2x}$, b) $y = 2x - \ln x$, c) $y = 5x - 2x^2$.

3.3. a) $y = -\cos 3x - \frac{1}{3}\sin 3x$, b) $y = (1+x)e^{x-1}$, c) $y = e^{5x}$.

3.4. a) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + \frac{x^2}{2} e^{-2x}$, b) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 4\sqrt{x}$,
c) $y = C_1 + C_2 \operatorname{tg} x + \frac{x \operatorname{tg} x}{2}$.

3.5. a) $y(x) = Ae^x - x - 1$, $z(x) = Axe^x + Be^x + 1$,

b) $x(t) = -4Ae^t - Be^{-t}$, $y(t) = Ae^t + Be^{-t}$,

c) $y(x) = \frac{1}{AB}e^{-Bx} + x$, $z(x) = Ae^{Bx}$,

d) $x(t) = e^{2-t}$, $y(t) = e^{-(2-t)^2/2}$,

e) $x(t) = \frac{1}{\sqrt{2(1-t)}}$, $y(t) = \pm\sqrt{4 - 2(1-t)^2}$.