

Analiza matematyczna 2

dr Joanna Jureczko

Zestaw 4

Równania różniczkowe zwyczajne - zadania dodatkowe

ZADANIA

4.1.* Rozwiązać równania różniczkowe

a) $x^2\left(\frac{dy}{dx} + y^2\right) = a(xy - 1)$

b) $(x^2y^2 + 1)y + (x^2y^2 - 1)x\frac{dy}{dx} = 0$

c) $(y - x)\sqrt{1 + x^2\frac{dy}{dx}} = \sqrt{(1 + y^2)^3}$

d) $(y^2 - 6x)\frac{dx}{dy} + 2y = 0.$

4.2.* Rozwiązać równania różniczkowe

a) $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2$

b) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$

c) $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$

d) $y''' - y'' = 6x + e^{-x}$

e) $y^{(4)} + 4y'' + 4y = 3\sin x$

f) $y^{(4)} - y = 4\sin x - 8e^{-x} + 1.$

4.3.* Wyznaczyć równania różniczkowe rodzin krzywych określonych podanymi równaniami

a) $y = ct^3$

b) $t^2 + 4y^2 = c$

c) $y - ct = c - 1$

d) $y^2 = 2ct - 2t^2.$

ODPOWIEDZI

4.1.* a) $a \neq 1, xy(1 - cx^{a-1}) = a - cx^{a-1}; a = 1, (xy - 1) \ln cx = 1$ (wsk. podstawienie $xy = u$). b) $x^2 e^{x^2 y^2} = cy^2$ (wsk. podstawienie $xy = u$). c) $\operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}(u - v)) = u + c$ (wsk. podstawienie $x = \operatorname{tg} u, y = \operatorname{tg} v$). d) $y^2 - 2x = cy^3$ (wsk. podstawienie y - zmienna niezależna, x - zmienna zależna, wtedy $\frac{dy}{dx} - \frac{3}{y}x = -\frac{1}{2}y$).

4.2.* a) $2\sqrt{c_1 y - 4}(c_1 y + 8) = 3c_1^2(c_2 \pm t), y(t) = \frac{c_1}{\cos^2(c_2 \pm t)}$. b) $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$. c) $y = c_1 e^x + c_2 x + c_3 e^x - \frac{1}{2}e^{-x} - 3x^2 - x^3$. d) $y = c_1 + c_2 x + (c_3 + x)e^{-x} + x^3 - 3x^2$. e) $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x - \frac{1}{2}x \cos x$. f) $y = x \cos x + 2xe^{-x} - 1 + c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$.

4.3.* a) $y't = 3y$. b) $t + 4yy' = 0$. c) $y'(1 + t) = y + 1$. d) $y' = \frac{y}{2t} - \frac{t}{y}$.