

Analiza matematyczna 2

dr Joanna Jureczko

Zestaw 5

Ciągi liczbowe o wyrazach zespolonych.
Pochodna i całka funkcji zespolonej.

ZADANIA

5.1. Zbadać zbieżność ciągów

a) $z_n = n + \frac{i}{n^2}$, b) $z_0 = \frac{5^n}{n!} + i$, c) $z_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$, d) $z_n = \frac{2n(n+1)+3ni}{n+1}$.

5.2. Obliczyć pochodną funkcji

a) $z = 3i - 1 + (1 + 2i)t$, b) $z = 2 \cos t + e^{-2t}i$, c) $z = (i + 3t^3) \ln t$, d) $z = 2i \sin(3t) + t^2 e^{ti}$.

5.3. Obliczyć całki

a) $\int_0^{\pi/2} (\cos t + 2ti) dt$, b) $\int_0^2 [1 + (1+i)t^2] dt$, c) $\int_{-1}^1 (1 - e^{ti}) dt$, d) $\int_0^{\pi/2} (\cos t + i \sin t) dt$.

5.4. Zbadać, czy funkcja $f(z)$ jest holomorficzna

a) $f(z) = z^2$, b) $f(z) = \bar{z}$, c) $f(z) = z \operatorname{Re}(z)$, d) $f(z) = \frac{1}{z^2}$.

5.5. Znaleźć część rzeczywistą i urojoną funkcji $f(z)$ i sprawdzić, czy funkcja spełnia równanie Cauchy'ego=Riemana

a) $f(z) = \sin z$, b) $f(z) = e^z$, c) $f(z) = z^3$.

5.6. Znaleźć funkcję holomorficzną $f(z) = u + vi$, gdy

a) $u = x^2 - y^2 + 2x$, b) $u = \frac{x}{x^2+y^2}$, c) $u = 2e^x \sin y$.

5.7. Obliczyć całki

a) $\int_C \operatorname{Im}(z) dz$, gdzie C jest odcinkiem o początku $z_1 = 0$ i końcu $z = 2 + i$,

b) $\int_C |z| dz$, gdzie C jest krzywą o równaniu $z = e^{ti}$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$,

c)* $\int_0^{1+i} e^{\bar{z}} dz$ wzdłuż łamanej o wierzchołkach $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = 1 + i$,

d)* $\int_C z \sin z dz$, gdzie C jest dowolną krzywą regularną o początku $z_1 = 0$ i końcu $z_2 = i$,

e)* $\int_C \sin(2z + 1) dz$, gdzie C jest dowolną krzywą regularną o początku $z_1 = 0$ i końcu $z_2 = \frac{\pi}{2}$,

f)* $\int_C e^z dz$, gdzie C jest dowolną krzywą regularną o początku $z_1 = 0$ i końcu $z_2 = \pi i$.

ODPOWIEDZI

5.1. a) rozbieżny, b) zbieżny $z_0 = i$, c) zbieżny $z_0 = i$, d) rozbieżny.

5.2. a) $z' = 1 + 2i$, b) $z' = -2 \sin t - 2ie^{-2t}$, c) $z' = 9t^2 \ln t + (i + 3t^3)\frac{1}{t}$, d) $z' = (6 \cos(3t) + 2te^t + t^2e^t)i$.

5.3. a) $1 + \frac{\pi^2}{4}i$, b) $2 + \frac{8}{3}(1 + i)$, c) $2 + \frac{1-e^2}{e}i$, d) $1 + i$.

5.4. a) tak, b) nie, c) nie, d) tak, poza $z = 0$.

5.5. a) $u = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) \sin x, v = \frac{1}{2}(e^{-y} + e^y) \cos x$, b) $u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$, c) $u = x^3 - 3xy^2, v = 3x^2y - y^3$.

5.6. a) $f(z) = z^2 + 2z + ci$, b) $f(z) = \frac{1}{z} + ci$, c) $f(z) = -2e^z i + ci$.

5.7. a) $\frac{1}{2}(2 + i)$, b) $2i$, c) $e^{1-i} - 2e^{-i} + 1$, d) $-e^{-1}i$, e) $\cos 1$, f) -2 .