Analiza matematyczna 2

dr Joanna Jureczko

Zestaw 6
Transformacja Laplace'a. Całka Laplace'a
Transformacja odwrotna Laplace'a.

ZADANIA

6.1. Znaleźć transformatę Laplace'a funkcji
a) $f(t) = e^{2t}$, b) $f(t) = \sin(3t)$, c) $f(t) = e^{-2t}\cos t$, d) $f(t) = 1 - e^{2t}\cos t$, e) $f(t) = t\cos(3t)$, f) $f(t) = \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$, g) $f(t) = \frac{e^{-4t} - e^{-6t}}{2}$, h)* $f(t) = \cos ht - 1$.

6.2. Wyznaczyć oryginał $f(t) = L^{-1}[F(s)]$, jeżeli
a) $F(s) = \frac{1}{s(s-2)^2}$, b)* $F(s) = \frac{s-1}{s^2-2s-3}$, c) $F(s) = \frac{s+5}{s(s^2+10s+29)}$, d) $F(s) = \frac{9}{(s^2+9)^2}$, e) $F(s) = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$, f)* $F(s) = \frac{Cs+D}{(s+a)^2+b^2}$, g) $F(s) = \frac{s^2}{(s^2+4)^2}$.

6.3.* Obliczyć całkę Laplace'a funkcji

a) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } t \leqslant 0 \\ e^{at} & \text{gdy } t > 0 \end{cases}$ b) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } t \leqslant 0 \\ t & \text{gdy } t > 0 \end{cases}$

c) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } t \leqslant 0 \\ \sin \omega t & \text{gdy } t > 0 \end{cases}$ d) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } t \leqslant 0 \\ te^{at} & \text{gdy } t > 0 \end{cases}$

6.4. Stosując transformację Laplace'a rozwiązać przy podanych warunkach równanie początkowe
a) $y' + 3y = 5e^{2x}, y(0) = 4$,
b) $y'' + 4y' + 4y = (\cos x + 2\sin x)e^{-2x}, y(0) = -1, y'(0) = 1$,
c) $y' - y = xe^{2x}, y(0) = 0$,
d) $y'' - 2y' = (x^2 + x - 3)e^x, y(0) = 0, y'(0) = 2$,
e) $y'' - 2y' + y = x^2e^x, y(0) = y'(0) = 0$,
f) $y'' - 2ay' + (a^2 + b^2)y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$,
g) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 6e^{-x}, y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$,
h) $4y''' - 8y'' - y' - 3y = -8e^x, y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$.

6.5. Rozwiązać układ równań różniczkowych

a) $\begin{cases} 3y' - 2z' = 2y + 3z \\ y' + 4z' = -4y + z \end{cases}$ $y(0) = 0, z(0) = 1$ b) $\begin{cases} y' + z = 0 \\ z' - 2y - 2z = 0 \end{cases}$ $y(0) = z(0) = 1$,

c) $\begin{cases} y' + 2y + z = 4t + 1 \\ z' + y - z = \frac{3}{2}t^2 \end{cases}$ $y(0) = z(0) = 0$,

d)* $\begin{cases} y' - z' - 2y + 2z = 1 - 2t \\ y'' + 2z' + y = 0 \end{cases}$ $y(0) = y'(0) = 0, z(0) = z'(0) = 0$,

e)* $\begin{cases} x' = y - z \\ y' = x + y \\ z' = x + z \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = 2, z(0) = 3$.

6.6 Obliczyć splot funkcji $f_1(t) \star f_2(t)$, jeżeli
a) $f_1(t) = t, f_2(t) = \cos t$, b) $f_1(t) = t, f_2(t) = e^t$, c) $f_1(t) = t^2, f_2(t) = e^t$, d) $f_1(t) = \sin t, f_2(t) = \sin t$, e)* $f_1(t) = e^{ct}, f_2(t) = at + b$.

ODPOWIEDZI

6.1. a) $F(s) = \frac{1}{s-a}$, b) $F(s) = \frac{3}{s^2+9}$, c) $F(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+5}$, d) $F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-2} + \frac{s}{s^2+1}$, e) $F(s) = \frac{3}{s^2-9}$, f) $F(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}$, g) $F(s) = \frac{11}{(s+6)(s+4)}$, h) $F(s) = \frac{1}{s(s^2-1)}$.

6.2. a) $\frac{e^{2t}}{2}(t-\frac{1}{2})+\frac{1}{4}$, b) $e^t \cos h2t$, c) $\frac{1}{29}[e^{-5t}(2\sin 2t - 5\cos 2t)+5]$, d) $\frac{1}{6}\sin 3t - \frac{1}{2}t\cos 3t$, e) $t\cos t$, f) $\frac{1}{b}e^{-at}[(D-aC)\sin bt + bC\cos bt]$, g) $\frac{1}{4}(\sin 2t + 2t\cos 2t)$.

6.3. a) $F(s) = \frac{1}{s-a}$, b) $F(s) = \frac{1}{s}$, c) $F(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$, d) $F(s) = \frac{1}{(s-a)^2}$.

6.4. a) $y = e^{2x} + 3e^{-3x}$, b) $y = xe^{-2x} - (\cos x + 2\sin x)e^{-2x}$, c) $y = (x-1)e^{2x} + e^x$, d) $y = e^x(e^x - x^2 - x + 1) - 2$, e) $y = \frac{1}{12}x^4e^x$, f) $y = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx$, g) $y = x^3e^{-x}$, h) $y = e^x$.

6.5. a) $\begin{cases} y = \sin x \\ z = \cos x \end{cases}$, b) $\begin{cases} y = e^t(\cos t - 2\sin t) \\ z = e^t(\cos t + 3\sin t) \end{cases}$, c) $\begin{cases} y = t^2 + t \\ z = -\frac{1}{2}t^2 \end{cases}$, d) $\begin{cases} y = 2 - 2t^{-1} - 2te^{-t} \\ z = 2 - t - 2e^{-t} - 2te^{-t} \end{cases}$,
e) $\begin{cases} x = 2 - e^t \\ y = -2 + 4e^t - te^t \\ z = -2 + 5e^t + te^t \end{cases}$

6.6. a) $1-\cos t$, b) $e^t - (t+1)$, c) $2e^t - t^2 - 2t - 2$, d) $\frac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$, e) $\frac{1}{c^2}[(bc-a)(1-e^{ct}) - act]$.